

广义镜像对称频率响应线性相位正交滤波器组

陈 力

(汕头大学电子工程系, 汕头 515063)

摘 要: 本文研究了镜像对称频率响应特性的线性相位正交滤波器组, 新算法利于设计的快速收敛. 信道数为偶数时, 提出了一个广义线性乘积因子, 新的格型结构带有附加的自由变量参数, 可用来提高滤波器的特性. 信道数是奇数时, 研究了新的结构因子, 设计了奇数信道数的滤波器组.

关键词: 线性相位; 滤波器组; 格型结构; 局部最优

中图分类号: TN912.3 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2000) 10-0049-03

A Generalized Factorization Algorithm for Linear-phase Paraunitary Filter Banks with Pairwise Mirror Image Responses

CHEN Li

(Dept. of Electrical Engineering, Shantou University, Shantou 515063, China)

Abstract: Generalized algorithms are proposed for linear-phase paraunitary filter banks with pairwise-mirror-image frequency responses. The proposed algorithms promote fast convergence of design process. When the number of channels is even, a generalized linear factor is proposed that has additional free parameters and helps to improve the characteristics of the filters. When the number of channels is odd, a new structure is proposed.

Key words: linear phase; filter banks; lattice structures; local minimum

1 引言

近年来设计多速率线性相位滤波器组的工作受到研究人员广泛关注. 多速率滤波器具有利用重叠变换使块效应减轻的优点^[1~3]. 图 1 示出了 M 信道的滤波器组, 其中分析和综合滤波器分别为 $H_k(z)$ 、 $F_k(z)$, $0 \leq k \leq M-1$. 实际中常要求滤波器具有对称镜像性质^[4,5], 因为设计过程中自由参量数随滤波器长度成线性增长, 随信道数 (M) 成二次 (平方) 增长. 在高维的参数空间中, 对高阶非线性目标函数进行最优化设计速度较慢且较难收敛于预期设计目标. 一种加快设计的方法是溶入对称镜像 (PMI) 频率响应性质, 其中滤波器 $H_k(z)$ 和 $H_{M-1-k}(z)$, $0 \leq k \leq M-1$ 彼此关于 $z/2$ 镜像对称, 也就是 $H_{M-1-k}(z) = \pm H_k(z)$, $0 \leq k \leq M-1$. 本文研究具有 PMI 特性的滤波器组的新算法.

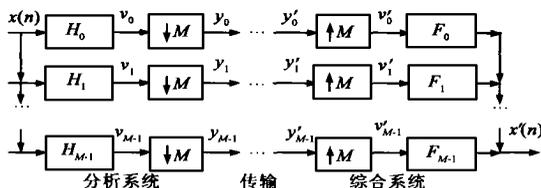


图 1 M-信道分析/综合系统

2 符号说明和基本性质

M 为奇和偶数时, L 分别表示 $(M-1)/2$ 和 $M/2$. 对角矩阵 V_i 是在对角线上有交替的 ± 1 的矩阵 ($+1$ 开头); 交换矩阵 J_i 为反对角线元素为 1 而其余元素为 0 的矩阵. 满足 $W = JWJ$ 的矩阵 W 称为中心对称矩阵, 满足 $W = VWV$ 、 $W = -VWV$ 的矩阵 W 分别称为间零、反间零矩阵.

2.1 矩阵 $E(z)$ 的线性相位性质

对长度为 NM 的滤波器组, 线性相位 (LP) 性质使多相矩阵 $E(z)$ 满足 $E(z) = z^{-(N-1)} E(z^{-1}) J_M$, 其中 J_M 是对角线元素 $i, i = \pm 1$ 的对角矩阵^[6]. 该性质对于 M 为偶数或奇数的滤波器组都适用.

2.2 矩阵 $E(z)$ 的 PMI 性质

在偶和奇信道的情况下, PMI 性质分别为: (1) $E(z) = J_M E(z) V_M$; (2) $E_e(z) = J_M E_e(z) V_M$, $E_o(z) = -J_M E_o(z) V_M$, 其中 $E_e(z)$ 和 $E_o(z)$ 代表 $E(z)$ 中含 z 的偶和奇数阶次的成分.

2.3 矩阵 $E(z)$ 的因式分解结构

因式分解的基本思想是寻找低阶因子使 PMI 和 LP 性质 (简称 PMLP) 在格状结构的级联过程中保持不变. 因此, 构造高阶滤波器组可以简化成构造适当的低阶因子:

$$E(z) = E_0 \prod_{i=0}^{N-1} A_{N-1-i}(z) \quad (1)$$

其中初始矩阵 E_0 是一个 0 阶的常数正交矩阵, E_0 满足 PMLP 性质, $A_i(z)$ 是低阶因子. M 为偶数时, 正交矩阵满足 $(V_M + J_M)/\sqrt{2}$ PMLP 性质, 可以用作 E_0 ; M 为奇数时, 求解 E_0 的方法是在 E_0 的元素中运用 PMLP 性质, 然后求解并列方程组.

3 偶数 M 的结构形式

3.1 LP 约束

由式 $E_{i+1}(z) = E_i(z) A_i(z)$, 又因为 $E_{i+1}(z)$ 和 $E_i(z)$ 均满足 LP 性质, $E_{i+1}(z) = z^{-N_{i+1}} E_{i+1}(z^{-1}) J_M$, $E_i(z) = z^{-N_i} E_i(z^{-1}) J_M$, 因此 $E_i(z) A_i(z) = z^{-N_{i+1}} E_i(z^{-1}) A_i(z^{-1}) J_M$. 将 $E_i(z) = z^{-N_i} E_i(z^{-1}) J_M$ 代入上式左边并简化得到 $A_i(z) = z^{-N_i} J_M A_i(z^{-1}) J_M$. 令阶数 N_i 为 1, 可得到文献[6,7]中偶信道数 (M) 系统中的因子 $A_i(z) = Q_{i,0} D(z) Q_{i,1}$, 其中 $D(z)$ 是对角矩阵 $D(z) = \text{diag}(L, z^{-1} L)$, $Q_{i,0}$ 和 $Q_{i,1}$ 是如下形式的中心对称的正交矩阵

$$Q_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ J & -J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ J & -J \end{pmatrix} \quad (2)$$

因此 $E(z) = E_0 (Q_{1,0} D(z) Q_{1,1}) (Q_{2,0} D(z) Q_{2,1}) \dots (Q_{i-1,0} D(z) Q_{i-1,1}) Q_{i,0} = 0$. 可以证明 $(Q_{i-1,1} Q_{i,0})$ 也是中心对称矩阵: $Q_{i-1,1} Q_{i,0} = (J Q_{i-1,1} J) (J Q_{i,0} J) = J (Q_{i-1,1} Q_{i,0}) J$, 因此 $(Q_{i-1,1} Q_{i,0})$ 可合并为单个矩阵 Q_i .

3.2 PMI 约束

定理 1 对 M 为偶数的情况, 因子 $A_i(z)$ 中具有 PMI 性质 $A_i(z) = V_M A_i(z) V_M$. $A_i(z)$ 可用满足

$$W_{i,0} = V_L U_{i,0} \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}, W_{i,1} = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix} U_{i,1} V_L \quad (3)$$

的因子 $A_i(z) = Q_{i,0} D(z) Q_{i,1}$ 来构造.

证明 将 $A_i(z) = Q_{i,0} D(z) Q_{i,1}$ 代入 PMI 性质 $A_i(z) = V_M A_i(z) V_M$, 并应用 $V_{i,0} = (-1)^{L+1} J V_L J$, 得出: $(W_{i,0} + U_{i,0}) (W_{i,1} + U_{i,1})$ 和 $(W_{i,0} - U_{i,0}) (W_{i,1} - U_{i,1})$ 是间零矩阵; $(W_{i,0} + U_{i,0}) (W_{i,1} - U_{i,1})$ 和 $(W_{i,0} - U_{i,0}) (W_{i,1} + U_{i,1})$ 是反间零矩阵. 简化这些间零和反间零性质, 得到 $W_{i,0} = V_L U_{i,0} P_i$ 和 $W_{i,1} = P_i U_{i,1} V_L$, 其中 P_i 是正交矩阵且满足 $P_i^2 = I$. 基于附录得出式(3). 取 $P_i = V_L$, 可 $W_{i,0} = V_L U_{i,0} V_L$, $W_{i,1} = V_L U_{i,1} V_L$ 的特殊情况. 因子 $A_i(z)$ 参数的自由度依赖于三个矩阵 $U_{i,0}$, $U_{i,1}$ 以及 A_i 中 ± 1 的选择. 合并 $Q_{i,1}$ 和 $Q_{i+1,0}$ 成单一矩阵 Q_i 得: $E(z) = E_0 Q_0 D(z) Q_1 D(z) Q_2 D(z) Q_3 = E_0 Q_0 D(z) Q_1 D(z) Q_2 D(z) Q_3$. 因为 $W_{i,1} = P U_{i,1} V$, $W_{i+1,0} = V U_{i+1,0} P$, 所以 $W_i = W_{i,1} W_{i+1,0} = (P U_{i,1} V) (V U_{i+1,0} P) = P U_{i,1} U_{i+1,0} P$. 在 $i=0, N$ 的情况下, 对应的方程为 $W_0 = V U_0 P_1$ 和 $W_N = P_N U_N V$, 式(3)与文献[4]中采用的因式分解 $W_i = V U_i V$ 比较表明, 附加的自由度存在与矩阵 P 中.

4 奇数 M 的结构形式

4.1 矩阵 $A_i(z)$ 的 PMI 性质

定理 2 对信道数 M 为奇数的情况, 因子 $A_i(z)$ 具有如下对称性质

$$A_{i,0}(z) = -V_M A_{i,0}(z) V_M, A_{i,e}(z) = V_M A_{i,e}(z) V_M \quad (4)$$

其中 $A_{i,0}(z)$ 和 $A_{i,e}(z)$ 分别表示 $A_i(z)$ 中含有 z 的奇和偶数次阶数的成分.

4.2 矩阵 $A_i(z)$ 的构造

M 为奇数时, 因子 $A_i(z) = D_{-1}(z) Q_{i,1} D_1(z) Q_{i,2} D_{-1}(z) Q_{i,3} D_1(z) Q_{i,4}$ 满足下述约束条件时可获得 PMI 性质: $D_1(z)$ 和 $D_{-1}(z)$ 是对角矩阵 $D_{-1}(z) = \text{diag}(I_{L-1}, z^{-1} I_L)$, $D_1(z) = \text{diag}(I_L, z^{-1} I_{L-1})$, 矩阵 $Q_{i,1}, Q_{i,2}, Q_{i,3}, Q_{i,4}$ 是形式为

$$Q_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & I \\ \mathbf{0} & \sqrt{2} & \mathbf{0} \\ J & \mathbf{0} & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_i & a_i & \mathbf{0} \\ b_i & c_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & J \\ \mathbf{0} & \sqrt{2} & \mathbf{0} \\ I & \mathbf{0} & J \end{pmatrix} \quad (5)$$

的中心对称正交矩阵. 式(5)中子矩阵 (W_i, a_i, b_i, c_i) 和子矩阵 U_i 是正交矩阵. 矩阵 $Q_{i,1}, Q_{i,3}$ 的特点是式(5)中矢量 $a_i = 0$, $b_i = 0$ 及标量 $c_i = 0$. 矩阵中 $Q_{i,1}, Q_{i,2}, Q_{i,3}, Q_{i,4}$ 的子矩阵 $W_{i,1}, W_{i,2}, W_{i,3}, W_{i,4}$ 皆满足间零特性 $W = V W V$, 而 $a_{i,1} = 0$, $a_{i,2} = (-1)^{L+1} V_L a_{i,2}$, $a_{i,3} = 0$, $a_{i,4} = (-1)^{L+1} V_L a_{i,4}$, $b_{i,1} = 0$, $b_{i,2} = (-1)^{L+1} b_{i,2}$, $b_{i,3} = 0$, $b_{i,4} = (-1)^{L+1} b_{i,4}$.

5 实验

设计的目标函数是分析滤波器的阻带响应幅度能量

$$= \sum_{k=0}^{M-1} |H_k(e^j)|^2 d, \text{ 分析滤波器是能量互补的, 即 } \sum_{k=0}^{M-1} |H_k(e^j)|^2 = 1, \text{ 因此, 如果阻带能量足够地小, 那么滤波器的通带响应 } |H_k(e^j)| \text{ 将足够地接近幅值 } [2].$$

由于 PMI 性质, 只有开始的 $M/2$ (对于 M 是奇数时为 $(M+1)/2$) 个滤波器包含在目标函数中. 滤波器设计的具体过程如下: (1) 选择合适的滤波器初始通带、阻带的初始值. 由于滤波器设计中涉及的正交矩阵可等效空间的旋转, 可通过随机数函数初始化旋转角值产生 U, V, W, P, Q 等矩阵, 进而确定的滤波器冲激响应多相位矩阵 $E(z)$. (2) 利用多相位矩阵 $E(z)$ 的正交性及通带、阻带间能量互补关联特性, 对设计目标函数的阻带成份进行简化、优化. 利用多相位矩阵的线性相位的对称和反对称性质, 优化目标函数设计. 在高阶滤波器设计中可以采用 FFT 运算, 以避免直接时域运算所涉及的平面转角值的余弦函数运算以及字长效应. (3) 通过数学最优化共轭梯度算法, 改变旋转角值, 在实验中确定滤波器格状网络中的频率响应, 以期设计达到一定的阻带衰减指标 (对于要求不高的应用场合, 可以采用单纯型法, 其结果亦可以作为共轭梯度算法的预处理, 优选一系列旋转角的初始值). (4) 在初始设计出的滤波器的基础上, 逐渐增加过渡带以提高滤波器的通带、阻带指标, 并保持各个信道滤波器的通带、阻带和过渡带均匀一致地收敛于理想特性. 表 1 给出了一个 3-信道 PMLP 滤波器组的冲激响应系数. 由于 LP 性质 $h_k(n) = h_k(26-n)$, 只列出起始的 14 个系数. 从表 1 可以看出滤波器 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 互为镜像对称, $h_0(n) = (-1)^n h_2(n)$, 同时, 位于频谱中间的滤波器 $h_1(n)$ 相对自身镜像对称. 对于 n 为奇数的情况, $h_1(n) = 0$. 表 2 和图 2 示出了一个 16 样点的 8-信道滤波器组, 考虑到滤波器

组的镜像对称,表 2 只给出了前 4 个滤波器的冲激响应系数.

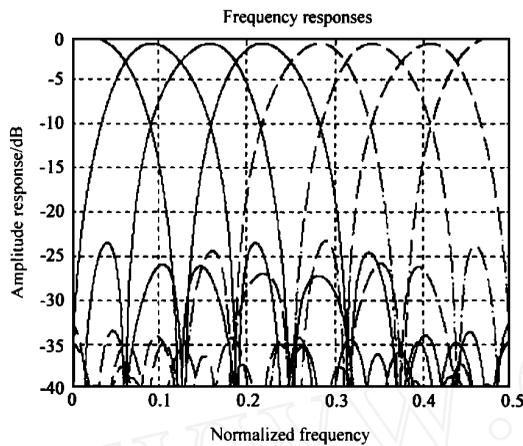


图 2 8-信道 PMI 滤波器幅频响应

参考文献:

[1] H. S. Malvar and D. H. Staelin. The LOT: Transform coding without blocking effects [J]. Apr. 1989 ,37(4) :553 - 559.

[2] P. P. Vaidyanathan. Multirate systems and filter banks [Z]. Englewood Cliffs ,NJ :Prentice-Hall ,1993 :1 - 276.

[3] R. H. Bamberger ,S.L. Eddins, and V. Nuri. Generalized symmetric extension for size-limited multirate filter banks [J]. IEEE Trans. Image Processing ,Jan. 1994 ,3(1) :82 - 86.

[4] K. Soman ,P. P. Vaidyanathan and T. Q. Nguyen. Linear phase paraunitary filter banks: Theory ,factorizations and applications [J]. IEEE Trans. on Signal Processing ,Dec. 1993 ,41(12) :3480 - 3496.

[5] T. Q. Nguyen and P. P. Vaidyanathan. Maximally decimated perfect-reconstruction FIR filter banks with pairwise mirror-image analysis (and synthesis) frequency responses [J]. IEEE Trans. on ASSP ,May 1988 ,36(5) :693 - 706.

附录 令 P 为满足 $P^2 = I$ 的正交矩阵,由正交性质 $P^T P = I$ 得出 P 为对称矩阵 $P^T = P$,因此可用实数特征值分解为 $P = T \Lambda T^{-1}$. 由性质 $P^2 = I$,可以得出 $\Lambda = T^{-1} P^2 T = T^{-1} T^{-1} \Lambda T T = \Lambda^2$,从而, $\Lambda^2 = I$,因此 Λ 的对角线元素是 1 或者 -1.

表 1 3-信道 PMI 频率响应滤波器冲激响应系数

n	$h_0(n)$	$h_1(n)$	$h_2(n)$
0	0.0000874	0.0001236	0.0000874
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	-0.0009562	0.0000000	0.0009562
4	-0.0012709	-0.0017973	-0.0012709
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0072185	0.0176080	0.0072185
7	0.0139082	0.0000000	-0.0139082
8	-0.0092426	-0.0130710	-0.0092426
9	-0.0520156	0.0000000	0.0520156
10	-0.0327943	-0.1540040	-0.0327943
11	0.1011473	0.0000000	-0.1011473
12	0.2865636	0.3774457	0.2865636
13	0.3747068	0.0000000	-0.3747068

表 2 8-信道 PMI 频率响应滤波器冲激响应系数(前 4 个滤波器)

n	$h_0(n)$	$h_1(n)$	$h_2(n)$	$h_3(n)$
0	-0.0326309	0.0340455	0.0045703	0.0233371
1	-0.0030282	0.0371053	0.0686327	-0.0364563
2	0.0136320	0.0034461	0.0517137	-0.0927165
3	0.0486246	-0.0573412	-0.0331000	0.0091814
4	0.0780716	-0.1214076	-0.1321813	0.1317606
5	0.1117794	-0.1521363	-0.1164279	0.0428496
6	0.1325321	-0.1275715	0.0139287	-0.1450560
7	0.1507359	-0.0500447	0.1509218	-0.1082010

作者简介:



陈 力 1966 年出生,博士,现为广东省汕头大学电子工程系副教授.主要研究方向为:滤波器设计、图像数据压缩、运动图像跟踪补偿、模/数转换、优化算法、模式识别.