

# 分数导数与数字微分器设计

袁 晓<sup>1,2,3</sup>, 张红雨<sup>2</sup>, 虞厥邦<sup>2</sup>

(1. 四川大学电子信息学院, 四川成都 610064; 2. 电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054;  
3. 空军工程大学航空电子工程系, 陕西西安 710038)

**摘 要:** 从信号处理角度来考察分数阶导数和微分问题. 首先论述分数阶微积分的基本概念, 评论分数阶导数的几种典型定义, 并重点探讨分数阶导数的频域定义及其基本性质. 紧接着详细研究分数阶微分的实现: 理想分数阶数字微分滤波器和 FIR 分数阶数字微分滤波的基本性质和设计问题, 并提出分数阶微分滤波器设计中遇到的新问题以及奇对称微分滤波器、偶对称微分滤波器等新概念. 最后给出一些值得进一步探讨的有趣问题.

**关键词:** 分数微积分; 算子; 数字滤波器; 零频归零问题; 对称微分器; FIR

**中图分类号:** TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 10-1658-08

## Fractional-Order Derivative and Design of Fractional Digital Differentiators

YUAN Xiao<sup>1,2,3</sup>, ZHANG Hong-yu<sup>2</sup>, YU Jue-bang<sup>2</sup>

(1. College of Electronic Information, Sichuan Univ., Chengdu, Sichuan 610064, China;  
2. College of Electronic Eng., UESTC, Chengdu, Sichuan 610054, China;  
3. Dept. of Aeronautical Electronic Eng., Air Force Eng. Univ., Xi'an, Shanxi 710038, China)

**Abstract:** The topics of fractional (order) derivative and its digital implementations are studied from the view point of signal processing in this paper. A brief survey on fractional differentiation and integration is given, some basic concepts of the fractional calculus and some typical definitions of the fractional derivative are reviewed. Next the digital implementation approaches of fractional differentiators are discussed in detail. Some new problems, which would be encountered in the design of the fractional differentiators, and some new concepts, such as the odd symmetric differentiators and even symmetric differentiators are proposed. Finally, future works are reviewed in the concluding remarks.

**Key words:** fractional calculus; operator; digital filters; return zero problem around zero frequency; symmetric differentiator; FIR

## 1 引言

当前, 信息科学正面临着深刻的变革与迅猛的发展, 信号分析与处理的变革与发展就是其中典型代表. 许多新思路、新方法和新技术不断涌现. 同时人们也在想方设法不断拓展传统研究领域的概念、方法和技术. 近年来, 分数阶算子和测定在许多工程应用和科学技术领域逐渐引起了广泛关注和逐步深入细致的研究. 分数阶运算包括分数阶导数和分数阶积分, 分数阶富里叶变换以及各种各样的分数阶变换, 分数维(分形)测量、分数阶样条等等. 分数阶运算也即非整数阶运算, 它们是分析和处理许多“非”问题和现象(比如非线性、非因果、非最小相位、非高斯、非平稳、分数布朗运动、混沌等等)的有用工具.

微分运算是一种基本的数学运算, 在信号分析与处理等领域得到广泛应用, 特别在信号的奇异性检测和提取方面具

有特殊的作用. 我们常用的微分运算, 微分方程等使用的都是整数阶, 例如一阶导数、二阶导数 ..., 一阶微分方程、二阶微分方程 ..., 然而许多事物、自然现象以及社会现象, 例如诸多“非”问题和现象是难以用整数阶微分方程来描述和刻画的.

从信号分析与处理角度来看, 微分运算, 即对函数或信号  $f(t)$  求导:

$$Df(t) = \frac{df(t)}{dt} \quad (1)$$

是一种线性变换. 在数学上, 线性变换常常视为一个算子, 在许多情况下, 我们很自然地重复使用该算子所产生的作用感兴趣. 从数学的观点来看, 一个算子的重复作用可以作为该算子的整数幂形式, 例如一阶微分算子  $D$  重复使用  $k$  次就得到  $k$  阶导数

$$D^k f(t) = D^k f(t) = d^k f(t) / dt^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

式中  $D^k = D^k (k \in N)$  称为  $k$  阶微分算子, 对整数幂的概念加

以推广, 就会很自然地想到这样一个问题: 微分算子的分数幂  $D_v = D^v$ ,  $v \in \mathbf{R}^+$  作用于—函数或信号  $f(t)$ , 究竟意味着什么? 这是一个既古老而又新鲜的课题. 说其古老, 是因为分数阶导数(fractional order derivative)和分数阶积分(fractional order integration)概念, 总称为分数(阶)微积分或分数计算(fractional calculus), 几乎与普通的整数阶微分和积分概念一样久远, 该问题曾被许多大数学家, 比如 Leibniz(1695)、Euler(1738)、Liouville(1850)、Hardy 和 Littlewood(1925) 等涉及和探究过, 但难度很大. 近三百年以来, 它一直是数学家的“珍玩”, 几乎没有引起工程技术界人们的关注. 直到 Mandelbrot 发现分形, 将 Riemann-Liouville 分数阶微积分应用于分析和研究分形媒介中的布朗运动, 并猜测分形几何与分数阶微积分之间存在某种关联, 分数微积分才引起人们关注和逐步得到一些应用<sup>[1-4]</sup>. 说其新鲜在于随着现代科学技术的发展, 特别是计算技术和信息技术的高度发展, 使得人们有能力研究和探索许多“非”问题和现象, 人们重新认识到分数运算的重要性, 特别是分数阶微积分运算, 已开始逐步渗透到各种应用问题中, 并在诸如噪声检测与估计<sup>[3, 4]</sup>、流体场理论<sup>[5, 6]</sup>、电磁理论<sup>[7]</sup>、子波(或尺度函数)与样条构造<sup>[8-12]</sup>、非线性动力学<sup>[13-16]</sup>、自动控制<sup>[17-19]</sup>、生物医学工程和材料力学(特别是聚合材料)等许多科学和工程领域得到一定应用. 因而开始引起信号处理领域的研究人员的注意和重视.

本文目的就是要从数字信号分析与处理角度来理解和实现分数阶微分(也即分数导数)概念和计算问题.

众所周知, 整数阶数字微分器用于确定和估计给定信号的(一般是关于时间)导数是十分有用的工具. 例如, 在雷达和声纳应用中, 速度和加速度是用微分器从位置测量数据计算出来的. 在生物医学工程中, 通常需要获得生物医学数据中, 特别是在低频区间的高阶导数. 对于整数阶, 也即普通微分滤波器的设计理论已很成熟并得到广泛应用<sup>[20-24]</sup>, 然而关于分数阶微分器的数字实现和应用的研究, 以及普及程度则差得很远.

本文安排如下: 第二节简单评述分数阶导数, 并重点讨论分数导数的频域定义及其意义; 第三节基于分数导数的频域定义, 研究理想分数阶数字微分滤波器设计问题; 第四节探讨 FIR 分数阶微分滤波器设计及其遇到的难题; 最后一节进行简单讨论, 从信号处理角度提出一些值得进一步研究的有关课题, 并对分数计算的应用进行简单评述与展望.

## 2 分数(阶)导数

函数或信号  $f(t)$  的一阶导数:

$$Df(t) = f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (3)$$

这种在时域中的极限定义具有明确的几何与物理意义, 并且在数学上是容易计算的. 重复上述运算或操作就得到高阶导数.

在数学分析学中, 由于微分和积分密切相关, 并且可以互相转换, 因此往往将它们统一定义在一起.

定义 1 微分积分算子  $D_{a+}^n$ : 用算子  $D_{a+}^n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  作用在

函数  $f(t)$  的  $t$  点, 定义

$$D_{a+}^n f(t) = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} f(t), & n > 0 \\ f(t), & n = 0 \\ \int_a^t f(x) (dx)^{-n}, & n < 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中  $n \in \mathbf{N}$  次积分定义如下

$$\int_a^t f(x) (dx)^{-n} = \int_a^t \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} t_n \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{n+1}} dx. \quad (6)$$

式中  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数<sup>[25]</sup>.

将通常意义下的整数阶导数拓展到非整数阶——分数阶导数情形, 直接仿照整数阶导数在时域中极限定义形式(3)是很困难. 显然, 在定义分数阶导数的一般方案中, 应当包含普通的整数阶导数, 并且分数阶是整数阶之间的连续内插. 即对于一个  $m \in \mathbf{Z}^+$  阶可微(特别是能量型的)实函数或信号  $f$ :

$$|Df(t)| = |f^{(k)}(t)| < \infty, k = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbf{Z}^+ \quad (7)$$

存在正实数  $v \in (\mathbf{R}^+)$  有算子  $D_v$  使得条件:

①有界性

$$|Df(t)| = |f^{(v)}(t)| < \infty, v \in (0, m) \quad (8)$$

②连续性

$$\lim_{v_1 \rightarrow v_2} D_{v_1} f(t) = D_{v_2} f(t), v_1, v_2 \in (0, m] \quad (9)$$

③实值性

$$Df(t) \in \mathbf{R}, v \in (0, m] \quad (10)$$

成立.

当  $v$  为正整数, 即  $v = k, k = 1, 2, \dots, m$  时, 就得到通常意义下的整数阶导数  $f^{(k)}(t)$  及其算子  $D_k$ . 有界条件①和连续条件②是将通常意义下的整数阶导数  $f^{(k)}(t)$ ,  $k \in \mathbf{Z}^+$  拓展到分数阶导数  $f^{(v)}(t)$ ,  $v \in \mathbf{R}^+$  必须满足的条件; 实值条件③要求算子  $D_v$  为实算子, 当然我们也可取消该限制, 但是当  $v$  为正整数, 即  $v = k, k = 1, 2, \dots, m$  时, 必须保证  $f^{(k)}(t)$  及其算子  $D_k$  是实的.

我们可以从几个不同的方向来考虑或引进分数阶导数概念, 只要它能兼容普通的整数阶导数即可. 关于分数阶导数, 遗憾的是至今没有一个统一的定义, 其数学与物理意义至今也不明确. 从不同的角度来考虑或引进分数阶导数概念就得到不同的定义. 在分析学中, 由于微分和积分密切相关, 并且可以互相转换, 因此在许多情形, 分数阶导数和分数阶积分也是可以象普通的整数阶微积分那样统一定义在一起, 统称为分数微积分或分数计算, 当然也可分别来考虑和研究分数阶导数或微分与分数阶积分, 比较常用和容易理解的定义有: (Riemann-Liouville) R-L 分数微积分定义、柯西(Cauchy)积分式定义、频域(亦称富氏变换域)定义、样条域定义、子波域定义等等.

定义 2 (R-L 分数微积分) 解析拓展式(6)得到 R-L 分数积分

$$D_{a+}^v f(t) = \frac{d^v}{dt^v} f(t) = \int_a^t f(x) (dx)^v = \frac{1}{\Gamma(-v)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{v+1}} dx \quad (11)$$

$$v < 0, a \in \mathbf{R}^+$$

按常义, 对式(11)进行微分就得到 R L 分数微分

$$D_{il}^v f(t) = D_{il}^m (D_{il}^{-(m-v)} f(t)), v > 0, m \in \mathbf{Z}^+ \quad (12)$$

式中  $m > v + 1, v > 0$ .

这种从多次重复积分(5)概念出发, 利用柯西积分公式和普通导数概念来定义分数微积分, 涉及到奇异积分, 在工程计算上存在许多限制.

定义 3 (柯西积分式分数微积分) 对于复平面内的解析函数  $f(z)$ , 有柯西积分公式

$$Df(z) = f^{(n)}(z) = \frac{\Gamma(1+n)}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, n \in \mathbf{Z}^+ \quad (13)$$

将柯西积分公式直接从整数阶  $n \in \mathbf{Z}^+$  解析拓展到实数  $v \in \mathbf{R}^+$  得到

$$Df(z) = f^{(v)}(z) = \frac{\Gamma(1+v)}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{v+1}} dw, v \in \mathbf{R}^+ \quad (14)$$

这种解析拓展是非平凡的, 由于  $(z-z_0)^{-(v+1)}$  的多值性, 其结果依赖于对复平面的分支分割和积分路线  $C$  的选取.

以上两种定义可以说是纯数学定义, 在理论上具有重要意义, 但难于计算, 相应地工程中也不容易实现.

为了易于计算和工程实现, 人们提出了分数阶导数的样条域定义和子波变换域定义. 分数阶导数的样条域定义的基本出发点是将函数或信号用样条函数逼近后, 分数阶微分转化为简单的差分运算. 子波域定义则是从微分分析与子波变换分析的共同点出发, 运用微分运算与子波变换之间的内在联系来加以定义的. 这两种定义都借助了频域分析概念来考察微分运算.

下面我们重点论述分数阶导数(微分)的频域定义及其性质.

分数导数(微分)的频域定义 对于任意一能量型函数或信号  $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ , 设其付氏变换为:  $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$ . 根据付氏变换性质, 一阶导数式(3)在频域的等价形式为

$$Df(t) \Leftrightarrow (Df)(\omega) = (i\omega) \cdot f(\omega) = d(\omega) \cdot f(\omega) \quad (15)$$

由此在频域定义分数阶导数(微分)为

$$\begin{cases} Df(t) = \frac{d^v f(t)}{dt^v}, v \in \mathbf{R}^+ \\ \Leftrightarrow \\ (Df)(\omega) = (i\omega)^v \cdot f(\omega) = d_v(\omega) \cdot f(\omega), v \in \mathbf{R}^+ \end{cases} \quad (16)$$

式中算子  $D_v = D^v$  是符号为  $d_v(\omega) = (i\omega)^v$  的乘性算子, 由复数的指数表示法, 它可写成

$$\begin{cases} d_v(\omega) = (i\omega)^v = \hat{a}_v(\omega) \cdot \exp(i\theta_v(\omega)) = \hat{a}_v(\omega) \cdot \hat{p}_v(\omega) \\ \hat{a}_v(\omega) = |\omega|^v, \theta_v(\omega) = \frac{v\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \end{cases} \quad (17)$$

对应的时域形式为

$$d_v(t) = a_v(t) * p_v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^v \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (18)$$

$$a_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}_v(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\omega|^v \cdot \cos(\omega t) d\omega \quad (19)$$

$$p_v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_v(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \cos \frac{v\pi}{2} \cdot \delta(t) - \sin \frac{v\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi t} \quad (20)$$

因而对于函数  $f$  的分数阶导数的计算有如下卷积形式

$$Df(t) = d_v(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d_v(t-x) f(x) dx \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Df(t) &= d_v(t) * f(t) = p_v(t) * a_v(t) * f(t) \\ &= \left[ \cos \frac{v\pi}{2} \cdot \delta(t) - \sin \frac{v\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi t} \right] * \int_{-\infty}^{\infty} a_v(t-x) f(x) dx \end{aligned} \quad (22)$$

从以上分析得知, 只要求得积分核  $d_v(t)$  或  $a_v(t)$ , 通过积分运算就能得到函数的分数导数.

积分核  $d_v(t)$  和  $a_v(t)$  必须满足如下基本条件, 即波动性:

$$\begin{cases} d_v(0) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d_v(t) dt = 0 \\ \hat{a}_v(0) = 0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} a_v(t) dt = 0 \end{cases} \quad (23)$$

该性质表明, 对于任意  $v > 0$ , 微分算子  $D_v$  对信号或函数  $f$  中的直流成分不起任何作用. 波动性是对微分算子  $D_v$  继式(8)~(10)的有界性、连续性和实值性后的又一约束条件.

在数学上, 求解积分核  $d_v(t)$  和  $a_v(t)$  的解析表达式是很困难的, 即使对于普通的整数阶, 微分运算也是一个广义(奇异的)柯西积分, 因此分数阶导数或微分在计算上是不容易的. 在工程技术方面, 除整数阶以外, 无论用(模拟的)无源器件还是有源器件实现分数微分系统也是很困难的, 问题的解决很可能有待于新型的分数阶储能元器件<sup>[26]</sup>的发现或发明.

我们以分数导数的频域定义为基础, 来讨论分数微分的数字实现.

### 3 理想分数阶数字微分滤波器

从信号处理角度来看, (整数阶或分数阶, 阶数为  $v \in \mathbf{R}$ ) 微积分运算完全可以看成是对信号的滤波<sup>[23, 24]</sup>, 滤波函数即是  $d_v(\omega) = (i\omega)^v = |\omega|^v \cdot \exp(i\theta_v(\omega))$ , 有如下三种情况:

(1)  $v > 0$ , 对应于微分函数,  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |d_v(\omega)| \rightarrow \infty$ ,  $d_v(\omega)$  是奇异高通滤波;

(2)  $v = 0$ , 对应于全通函数,  $d_v(\omega) = 1 \Leftrightarrow d_v(t) = \delta(t)$ ;

(3)  $v < 0$ , 对应于积分函数,  $\lim_{|\omega| \rightarrow 0} |d_v(\omega)| \rightarrow \infty$ ,  $d_v(\omega)$  是奇异低通滤波.

本文仅讨论第一种微分情况的数字滤波器设计问题.

根据数字信号处理理论, 我们将理想的数字分数阶微分滤波函数  $H_v(\omega)$  定义为

$$H_v(\omega) = d_v(\omega) \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right), -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (24)$$

$H_v(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_v(k) \cdot e^{-ik\omega}$  关于  $\omega$  是  $2\pi$  周期的, 相对应的滤波器  $h_v(0 < v < \infty)$  的系数:

$$\begin{aligned} h_v(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_v(\omega) \cdot e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{a}_v(\omega) e^{i\theta_v(\omega)} \cdot e^{ik\omega} d\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega_v \cos \left( k\omega + \frac{v\pi}{2} \right) d\omega, v > 0, k \in \mathbb{Z} \quad (25)$$

显然, 这样得到的理想数字分数微分滤波器  $h_v$  ( $0 < v < \infty$ ) 是非紧支的, 满足如下基本性质:

①有界性

$$|h_v(k)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega_v d\omega = \frac{\pi^v}{v+1} < \infty, k \in \mathbb{Z} \quad (26)$$

②波动性

$$H_v(0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_v(k) = 0 \quad (27)$$

③实值性

$$h_v(k) \in \mathbb{R}, 0 < v < \infty \quad (28)$$

④连续性

$$\lim_{v_1 \rightarrow v_2} h_{v_1} = h_{v_2}, 0 < v_1, v_2 < \infty \quad (29)$$

⑤能量有限性

$$E_v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_v(k)|^2 < \infty, 0 < v < \infty \quad (30)$$

根据 Parseval 定理, 滤波器  $h_v$  的能量是容易求得的:

$$E_v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_v(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_v(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega^{2v} d\omega = \frac{\pi^{2v}}{2v+1} < \infty, 0 < v < \infty \quad (31)$$

这表明序列  $h_v$  是平方收敛的. 其波动性(27)表明  $h_v$  是收敛的, 至于  $h_v$  是否绝对收敛, 则与微分阶数  $v$  密切相关.

对于任意给定的一微分阶数  $v$ , 从理论上均可由公式(25)算出理想的数字分数微分滤波器  $h_v$  的每一个系数值  $h_v(k)$ . 除整数阶  $v = n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 的  $h_n(k)$  和  $h_v(0)$  具有简明的解析形式:

$$\begin{cases} h_0(k) = \delta(k), \\ h_1(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{\cos(k\pi)}{k} & k \neq 0 \end{cases} \\ h_2(k) = \begin{cases} -\pi^2/3 & k = 0 \\ -\frac{2\cos(k\pi)}{k^2} & k \neq 0 \end{cases} \\ \vdots \end{cases} \quad (32)$$

$$h_v(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega^v \cos \left( \frac{v\pi}{2} \right) d\omega = \frac{\pi^v}{v+1} \cos \left( \frac{v\pi}{2} \right), (0 < v < \infty) \quad (33)$$

以外, 其余  $h_v(k)$  的值是很难用一个简明解析形式表达, 但可由公式(25)以任意精度数值解出<sup>[32, 33]</sup>.

根据微分算子的乘幂性质, 对于任意阶  $v$  有

$$D_v = D_n \cdot D_\alpha \Leftrightarrow h_v = h_n * h_\alpha \quad (34)$$

式中  $v = n + \alpha$ ,  $n$  为  $v$  的整数部分:  $n = \lfloor v \rfloor$ ,  $\alpha$  为  $v$  的小数部分:  $0 \leq \alpha = v - \lfloor v \rfloor < 1$ . 整数阶微分滤波器  $h_n$  的设计已很成熟<sup>[20~24]</sup>, 因此本文着重研究小数阶微分滤波器  $h_\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 的设计.

图1给出了阶数  $v = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  时  $h_v(k)$  的时域波形图. 从该图看出, 随着阶数  $v$  增加, 微分滤波器  $h_v$  的时间局域化特征越来越差, 而其能量  $E_v$  (见式(31))却是越来越大. 对于高阶(比如  $v > 2$ )情形, 当  $|k|$  较小时,  $h_v(k)$  的数值很大, 不便于应用. 为此可以对微分滤波器  $h_v$  的能量进行归一化处

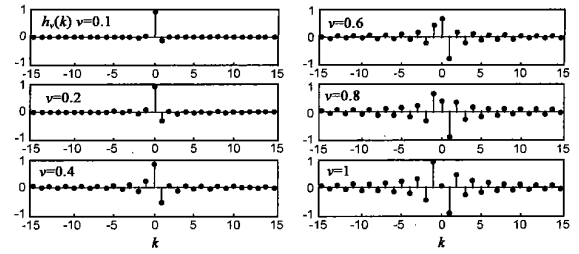


图1 理想分数微分器  $h_v$  时域图:  $h_v(k)$ ,  $-15 \leq k \leq 15$

理, 得到能量归一化的理想数字分数微分器:

$$\bar{h}_v: \bar{h}_v(k) = \frac{h_v(k)}{\sqrt{E_v}}, 0 < v < \infty, k \in \mathbb{Z} \quad (35)$$

从而使得有

$$\|\bar{h}_v\| = 1 \Rightarrow |\bar{h}_v(k)| < 1, 0 < v < \infty, k \in \mathbb{Z} \quad (36)$$

理想的数字分数微分器  $h_v$  或  $\bar{h}_v$  是非紧支撑的, 即它们均为无限冲击响应(IIR)滤波器, 并且还是双边序列.

$h_v$  和  $\bar{h}_v$  对应的传输函数  $H_v(z)$  和  $\bar{H}_v(z)$  关系为

$$H_v(z) = \sqrt{E_v} \bar{H}_v(z) = \frac{\pi^v}{\sqrt{2v+1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{h}_v(k) z^{-k} \quad (37)$$

滤波函数  $H_v(\omega)$  与传输函数  $H_v(z)$  具有关系:  $H_v(\omega) = H_v(z)|_{z=e^{j\omega}}$ , 由  $z = e^{j\omega}$  有  $(j\omega) = \ln z$ , 则

$$H_v(z) = \sqrt{E_v} \bar{H}_v(z) = (\ln z)^v = (\ln z)^{n+\alpha} \quad (38)$$

传输函数  $H_v(z)$  和  $\bar{H}_v(z)$  均有一个零点:  $z_0 = 1$ , 两个多重极点:  $p_1 = 0$  和  $p_2 = \infty$ , 因此  $H_v(z)$  和  $\bar{H}_v(z)$  是亚纯函数, 其收敛域(ROC)为:  $0 < |z| < \infty, 0 < v < \infty$ .

从以上分析得知: 理想的数字分数微分器  $h_v$  和  $\bar{h}_v$  ( $0 < v < \infty$ ) 虽然是非紧支的, 但却是收敛的, 其收敛速度与阶数  $v$  密切相关. 当  $v$  靠近偶数时,  $h_v$  和  $\bar{h}_v$  衰减较快, 几乎是绝对收敛; 而当  $v$  靠近奇数时,  $h_v$  和  $\bar{h}_v$  衰减较慢, 收敛但不绝对收敛. 例如, 当  $v = 0$  和  $2$  时,  $h_0$  和  $h_2$  绝对收敛, 而当  $v = 1$  时,  $h_1$  收敛但不绝对收敛. 关于  $h_v$  的收敛性以及时频局域化特征我们将另文报道.

## 4 FIR 数字分数微分器设计

理想的数字分数微分器  $h_v$  或  $\bar{h}_v$  是非因果无限冲击响应(IIR)滤波器, 另外对于大多数的  $v$  ( $> 0$ ) 值来说,  $h_v$  或  $\bar{h}_v$  不绝对收敛, 这使得其滤波实现变得困难. 现在来考察有限冲击响应(FIR)数字分数微分滤波器设计问题.

FIR 数字滤波器设计方法以直接逼近所需离散时间系统的频率响应为基础, 常用的方法有窗函数法、频率采样法、CAD 法等.

### 4.1 窗函数法与零频归零问题

窗函数设计法是设计 FIR 数字滤波器最简单的方法, 最简单的窗函数是矩形窗  $w_R$ .

窗函数设计法就是直接用有限宽度的窗口  $w$  截短理想的分数微分器  $h_v$ :

$$h_{vw} = h_v * w:$$

$$h_{vW}(k) = \begin{cases} h_v(k) \cdot w(k), & -K \leq k \leq K \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (39)$$

式中  $K \in \mathbf{Z}^+$ ,  $w$  是中心在原点, 宽度为  $L = 2K + 1$  的窗口序列. 常用的窗口有矩形窗、Hamming 窗、Hanning 窗、Blackman 窗等等.

取  $v = 0.2$ ,  $K = 15$  对应矩形窗的 FIR 微分器  $h_{vW}$  及其频率响应  $H_{vW}(\omega)$  曲线如图 2 所示.

通过数值分析得知, 除零频  $\omega = 0$  和低频  $\omega = \pi$  附近以外,  $H_{vW}(\omega)$  都能够很好地逼近  $H_v(\omega)$ , 其逼近的绝对误差函数

$$\varepsilon_{vW}(\omega) = |H_v(\omega) - H_{vW}(\omega)|, \quad 0 < v < \infty \quad (40)$$

的性质与阶数  $v$  密切相关: 对于甚低阶 ( $v \rightarrow 0$ ) 误差主要集中在零频  $\omega = 0$  附近; 其它情形 (即除甚低阶以外) 则正好相反, 误差主要集中在高频  $\omega = \pi$  附近.

逼近精度可以用极大绝对误差

$$\varepsilon_{\max} = \max_{\omega \in [-\pi, \pi]} [\varepsilon_v(\omega)] \quad (41)$$

来衡量, 而其逼近程度的总体性能可以用平均误差

$$S_{1v} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_v(\omega) d\omega \quad (42)$$

和误差能量 (即均方误差)

$$S_{2v} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_v^2(\omega) d\omega = \|h_v - h_{vW}\|^2 \\ = \sum_{k=-K}^K |h_v(k) - h_{vW}(k)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{-K-1} h_v^2(k) + \sum_{k=K+1}^{\infty} h_v^2(k) \quad (43)$$

来评价. 对于矩形窗口, 误差能量  $S_{2v}$  只有后两项, 为最小均方误差逼近. 采用其它非矩形窗口, 误差能量  $S_{2v}$  有所增加, 但极大绝对误差  $\varepsilon_{\max}$  和平均误差  $S_{1v}$  却得到改善.

**零频归零问题** 对于甚低阶  $v \rightarrow 0$  时的情形, 最大误差值在零频  $\omega = 0$ . 对于  $h_{vW} \rightarrow h_v$  的零频误差

$$\varepsilon_{vW}(0) = |H_v(0) - H_{vW}(0)| = \left| \sum_{k=-K}^K h_{vW}(k) \right|, \quad 0 < v < \infty \quad (44)$$

随着阶数  $v$  的逐渐增大而逐渐减小. 图 3 绘出了矩形窗口时, 不同窗口宽度  $L = 2K + 1$  条件下,  $\varepsilon_{vW}(0)$  随阶数  $v$  变化的曲线. 从该图看出, 当  $v \rightarrow 0$  时, 零频误差  $\varepsilon_{vW}(0)$  很大, 这意味着甚

低阶矩形窗 FIR 滤波器不满足微分器的波动性条件,  $h_{vW}$  不能作为严格意义上的微分滤波器使用. 采用其它的窗口函数, 比如 Hanning 窗、Hamming 窗、Blackman 窗、Kaiser 窗等等, 虽然

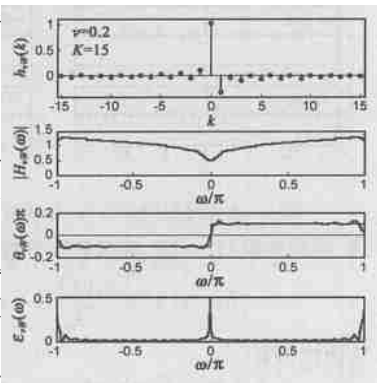


图 2 (矩形) 窗函数法设计 FIR 微分滤波器  $h_{vW}$ :  $v = 0.2$ ,  $K = 15$

能够减弱 Gibbs 现象, 但丝毫不能减小零频误差  $\varepsilon_{vW}(0)$ , 反而使  $\varepsilon_{vW}(0)$  有所增加. 因此, 对于甚低阶, 如何使  $\varepsilon_{vW}(0) \rightarrow 0$  是十分必要的, 我们称之为 FIR 微分器窗口设计法中的零频归零问题.

甚低阶零频不归零是由于甚低阶的  $h_v$  具有一个急速变化的高耸“正峰头”, 然后拖着一个缓慢衰减的细长“负尾巴”而引起的<sup>[10]</sup>. 在窗函数设计法中解决该问题, 从理论上来说有如下办法:

\* 增加窗口宽度 由于  $h_v$  的缓慢衰减的细长“负尾巴”的每一个  $h_v(k)$  ( $k > 0$ ) 的值很小很小, 因此增加窗口宽度  $L = 2K + 1$  不能明显减小  $\varepsilon_{vW}(0)$ . 图 3 给出的零频误差  $\varepsilon_{vW}(0)$  曲线随窗口宽度  $L$  的变化趋势正好说明了这一点, 并且增加窗口宽度同时也增加了滤波实现难度.

\* 右移窗口 在不增加窗口宽度  $L = 2K + 1$ , 适当右移窗口, 即  $L = K_2 - K_1 + 1 = 2K + 1$  ( $K_2 > K$ ,  $K_1 > -K$ ), 可以使零频误差  $\varepsilon_v(0)$  略有降低.

以上两方法不是解决甚低阶零频归零问题的有效办法.

#### 4.2 频率采样法与逼近精度问题

窗函数设计法是从时域出发去逼近理想滤波器的:  $h_{vW} \rightarrow h_v$ , 该方法是无法解决甚低阶零频归零问题. 频率采样法则是从频域出发去逼近理想滤波函数.

对理想数字分数阶微分滤波  $H_v(\omega)$  进行等间距采样, 用如下的逼近求和代替式 (25) 中的积分就得到频率采样法设计出的 FIR 数字分数阶微分滤波器  $h_{vS}$ :

$$h_{vS}(k) = \begin{cases} \frac{1}{L} \sum_{n=-K}^K \left( i \frac{2\pi}{L} n \right)^v \exp \left( i \frac{2\pi}{L} nk \right), & -K \leq k \leq K \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (45)$$

式中  $K \in \mathbf{Z}^+$ ,  $L = 2K + 1$  是  $h_{vS}$  的长度.

取  $v = 0.2$ ,  $K = 15$ , 用频率采样法设计, 即按式 (45) 得出的  $h_{vS}$  结果如图 4 所示. 从该图看出, 在零频有  $H_{vS}(0) = H_v(0) = 0$ .

在理论上我们能够严格地证明  $h_{vS} \rightarrow h_v$  的零频误差

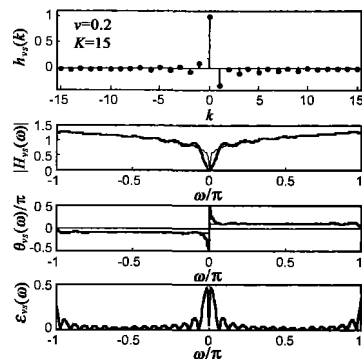


图 4 频率采样法设计微分滤波器:  $v = 0.2$ ,  $K = 15$

$$\varepsilon_{vS}(0) = \sum_{k=-K}^K h_{vS}(k) = 0, \quad 0 < v < \infty \quad (46)$$

这就完全解决了窗函数法中难以克服的甚低阶零频归零问题. 然而这又出现新问题: 对甚低阶 ( $v \rightarrow 0$ ) 情形, 在甚低频 ( $\omega \rightarrow 0$ ) 附近逼近误差很大, 即此时逼近性能很差. 我们称之为甚低阶甚低频的逼近精度问题.

加窗函数  $w$  作用于  $h_{vS}$  得到的  $w \cdot h_{vS}$  可以改善甚低阶甚低频的逼近精度, 但又使得零频不归零.

零频归零问题和零频附近(甚低频)的逼近精度问题构成了甚低阶 FIR 数字微分滤波器设计中的一对矛盾. 这一矛盾我们可以称为 FIR 数字微分滤波器设计中的甚低阶甚低频问题.

数值分析结果表明, 在相同长度  $L$  的情况下, 窗函数法设计结果明显优于频率采样法设计结果.

### 4.3 CAD 法

尽管受到许多限制, 但一般都直接用窗函数法设计 FIR 滤波器. 然而我们往往希望设计一个滤波器是给定长度时所能得到的滤波器中“最好的”. 在窗函数设计法情况下由付氏级数理论可以得出, 对给定的  $L$  值, 矩形窗能得出最好的均方逼近(见式(43)), 但这种逼近准则在所需频率响应  $H_v(\omega)$  的间断点( $\omega = 0$  和  $\omega = \pi$ )处特性不好, 即存在 Gibbs 现象. 虽然使用升余弦类窗可以改善间断点的 Gibbs 振荡, 但这是以牺牲解决甚低阶甚低频问题为代价的.

现在我们来考察用 CAD 法<sup>[23, 24]</sup>设计 FIR 分数微分器的情况.

方程(25)可以改写成

$$\begin{cases} h_v(k) = \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) h_{Ev}(k) - \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) h_{Ov}(k), \\ h_{Ev}(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \omega^v \cos(k\omega) d\omega, \\ h_{Ov}(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \omega^v \sin(k\omega) d\omega, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (47)$$

式中  $h_{Ev}: h_{Ev}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  是关于  $k = 0$  的偶对称实序列, 且有  $h_{Ev}(0) = \pi^v / (v + 1)$ , 我们称之为偶对称(分数)微分器; 式中  $h_{Ov}: h_{Ov}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  是关于  $k = 0$  的奇对称实序列, 且有  $h_{Ov}(0) = 0$ , 我们称为奇对称(分数)微分器. 因此式(45)又可写成

$$h_v = \cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) h_{Ev} - \sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) h_{Ov}, \quad 0 < v < \infty \quad (48)$$

定理 1 对于  $h_{Ev}$  和  $h_{Ov}$  有

$$\begin{cases} h_{Ev} \Leftrightarrow H_{Ev}(\omega) = |\omega|^v, \\ h_{Ov} \Leftrightarrow H_{Ov}(\omega) = i \cdot \text{sign}(\omega) |\omega|^v, \end{cases} \quad \omega \in [-\pi, \pi] \quad (49)$$

理想的偶对称(分数)微分器  $h_{Ev}$  是和奇对称(分数)微分器  $h_{Ov}$  均为线性相位 IIR 滤波器. 根据以上分析, 为了保证微分特征, 用于逼近  $h_{Ev}$  和  $h_{Ov}$  的优化 FIR 滤波器  $h_{EvC}$  和  $h_{OvC}$  必须满足条件:

① 对称性:

$$h_{Ev}(k) = h_{Ev}(-k), \quad h_{Ov}(k) = -h_{Ov}(-k) \quad (50)$$

② 奇数长度:

$$L = 2M + 1, \quad M \geq 1 \quad (51)$$

应用 Parks M dMellian 算法<sup>[23, 24]</sup>, 我们很容易求得偶对称微分器  $h_{Ev}$  在 Chebyshev 最优准则, 即最小最大准则下的最优逼近滤波器  $h_{EvC}$ . 然而对于奇对称微分器  $h_{Ov}$  在 Chebyshev 最优准则下的最优逼近滤波器  $h_{OvC}$  则不宜直接应用 Parks M dMellian 算法解出, 这是由于滤波函数  $H_{Ov}(\omega)$  是一个纯虚奇函数, 因此必须先将其转换成一个可积的纯实偶滤波函数  $B_v(\omega)$ , 设计出相对应的偶对称滤波器  $b_v$  的最优逼近  $b_{vC}$ , 然后将  $b_{vC}$  转换成  $h_{OvC}$ .

定理 2  $b_{vC}$  与  $h_{OvC}$  的关系:

(1) 对于奇对称微分器

$$h_{Ov} \Leftrightarrow H_{Ov}(\omega), \quad 0 < v < \infty$$

存在一个相关的实偶对称滤波器

$$b_v \Leftrightarrow B_v(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_v(k) e^{-ik\omega} = |\sin(\omega)|^v, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (52)$$

(2)  $b_v$  的最优逼近  $b_{vC}$ :  $b_{vC}(k)$ ,  $-K-1 \leq k \leq K+1$  也是偶对称的. 如果  $h_{Ov}$  的实奇对称逼近为

$$h_{OvC}: h_{OvC}(k), \quad -K \leq k \leq K$$

则有

$$\begin{cases} h_{OvC}(1) = b_{vC}(0); \\ h_{OvC}(2) = 2b_{vC}(0); \\ h_{OvC}(k) = 2b_{vC}(k-1) + h_{OvC}(k-2), \quad 3 \leq k \leq K-3; \\ h_{OvC}(K-1) = -2b_{vC}(K); \\ h_{OvC}(K) = -2b_{vC}(K+1) \end{cases} \quad (53)$$

证明 (略).

取  $v = 0.2$ ,  $K = 15$ , 在 Chebyshev 最优准则下, 用 CAD 法设计出的  $h_{EvC}$ 、 $h_{OvC}$  和  $h_{vC} = \cos(v\pi/2) h_{EvC} - \sin(v\pi/2) h_{OvC}$  结果

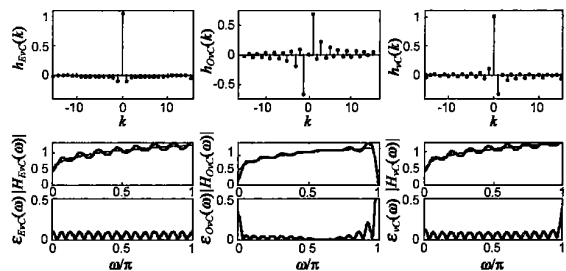


图 5 CAD 法设计 FIR 微分滤波器:  $v = 0.2$ ,  $K = 15$

如图 5 所示. 从该图看出, 滤波器  $h_{vC}$  的零频不归零是由偶对称微分滤波器  $h_{EvC}$  的零频不归零引起的. 奇对称微分滤波器  $h_{OvC}$  的零频是严格归零的. 结合式(48)我们就能很容易明白为什么甚低阶零频不归零了. 式(48)表明: 当阶数  $v$  趋近偶数时,  $h_{vC}$  中偶对称的  $h_{EvC}$  成分占优, 而当阶数  $v$  趋近奇数时,  $h_{vC}$  中奇对称的  $h_{OvC}$  成分占优.

数值对比分析表明, 对于甚低阶, 在零频附近的逼近性能以 CAD 法设计结果最好. 这可从图 2、图 4 和图 5 中可以直观看出.

## 5 结束语: 讨论与问题

分数阶导数和微分(当然也包括分数阶积分)存在并可实现. 但将通常意义下的整数阶导数拓展到非整数阶——分数阶情形, 直接仿照整数阶导数在时域的极限定义形式是困难的. 我们可从不同角度来定义和考察该问题. 在定义分数阶导数的一般方案中, 应当包含普通的整数阶导数, 并且分数阶是整数阶之间的连续内插, 因此分数导数必定受到一定的限制, 比如有界性、连续性、实值性和波动性等条件约束.

本文从微分运算的频域形式入手, 反推出分数阶微分的时域特性: 将分数阶微分运算转换成奇异的卷积运算形式, 并得到分数阶微分算子必须具备的基本条件. 从数字信号处理

角度来看,应用分数阶微分的频域定义就很自然地将分数阶微分算子转换成(简单的)数字滤波器.无论对于 IIR 还是对于 FIR 分数阶微分滤波器,都应当满足式(26)~(30)所限定的条件,即有界性、波动性、实值性、连续性以及能量有限性.

对于 FIR 数字分数微分滤波器的设计来说,本文所用的三种设计方法各有千秋:窗函数法能够得到最小均方误差的微分滤波器,但存在甚低频阶归零问题;频率采样法能够解决零频归零问题,但又存在甚低频的逼近精度问题;CAD 法设计结果,对于甚低阶,在零频附近的逼近性能好于前两种设计法所得结果,但逼近的总体性能却变差了.甚低阶甚低频问题是 FIR 数字微分滤波器设计中的一个特殊难题.通过数值分析可以得知,适当地降低对零频归零的要求,能够极大地改善 FIR 数字微分滤波的整体逼近性能,这对于无直流或无甚低频成分的数字信号的微分运算来说是十分有利的.

从本文关于分数阶导数和微分的初步研究中,我们可以得到如下一些有益的启示并引出如下一些有趣的问题.

⑧ 由式(32)可知,对于整数阶的微分滤波器有

$$h_n(k) = D_n \text{Sinc}(t)|_{t=k} = \text{Sinc}^{(n)}(k), k \in \mathbf{Z}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (54)$$

(式中  $\text{Sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$ )由此我们能否得出

$$h_v(k) = D_v \text{Sinc}(t)|_{t=k} = \text{Sinc}^{(v)}(k), 0 \leq v < \infty? \quad (55)$$

式中  $h_v(k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  由式(25)确定.

⑨ 在式(55)中引入平移因子<sup>[26-29]</sup>  $\tau(\in \mathbf{R})$ ,得到的新滤波器

$$h_{v,\tau}: h_{v,\tau}(k) = \text{Sinc}^{(v)}(k - \tau), k \in \mathbf{Z}, 0 \leq v < \infty? \quad (56)$$

具有什么样的特性和功能呢? 平移因子  $\tau$  与分数延迟数字滤波器有内在联系吗?

⑩ 综合式(37)、(38)和式(55)得出的展开式

$$(\ln z)^v = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_v(k) z^{-k} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \text{Sinc}^{(v)}(k) z^{-k}, 0 \leq v < \infty? \quad (57)$$

在数学上严格地存在吗? 对数函数  $\ln(z)$  与分数微分算子  $D_v$  以及 Sinc 函数具有怎样的内在关联呢?

⑪ 对于甚低阶的微分滤波函数  $H_v(\omega)|_{v \rightarrow 0}$  能否用陷波频率为零的陷波滤波器来逼近?

⑫ 微分阶数反映了函数或信号的光滑特征.对于滤波器  $h_v$ 、 $h_{Ev}$  和  $h_{Ov}$  来说,阶数  $v$  完全确定了它们的时频局域化特征.能否用微分阶数  $v$  来刻画函数或信号的奇异特征? 如何用分数微分滤波来表征和度量函数或数字信号的局部或多尺度情形下的正则性或光滑程度呢? 这对于检测子波的正则性是大有裨益的.

⑬ 微分运算的相位特征与广义 Hilbert 变换器的关系问题<sup>[27-30]</sup>.

⑭ 广义 Hilbert 变换及其数字实现问题,进一步很自然地引出广义解析信号,这将拓展实信号的复分析范围和解析信号的应用空间.关于该问题我们将另文探讨.

⑮ 多尺度微分算子问题<sup>[10]</sup>.

⑯ 分数微分器  $h_v$ 、 $h_{Ev}$  和  $h_{Ov}$  的收敛性与时<sup>3/</sup>频局域化特征,我们将另文报道.

⑰ 由式(25)知,  $h_v(k)$  的计算看似简单,但计算起来却并不容易.对于非整数阶  $v \neq n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , 由式(25)所确定的  $h_v(k)$  不可能存在解析解.这就引出如何求解  $h_v(k)$  的快速计算问题<sup>[32,33]</sup>.

⑱ FIR 分数微分滤波器  $h_v$ 、 $h_{Ev}$  和  $h_{Ov}$  的优化设计.

从本文 CAD 设计结果来看,这不是一个简单问题,特别是奇对称数字微分器的优化设计更是如此,传统的优化设计法很难得到满意的结果.因此我们必须寻求其它的优化设计方法,比如神经网络、遗传算法、蚁群算法等等智能计算来解决 FIR 分数微分滤波器的优化设计问题.

⑲ 在式(47)中,引进了奇、偶对称微分器新概念,再联系到广义 Hilbert 变换器与分数延迟数字滤波器,我们能否将它们统一成广义的数字分数阶微分器?

在这里我们仅仅列举了与分数阶微分相关的部分问题,关于相关问题的研究我们将陆续报道.

本文只是从信号处理角度讨论分数阶微分器的设计与实现问题,其实近年来受到分数阶微积分影响的,不仅是信号处理领域,在电路与系统学科内,最近几年也掀起一股研究分数阶动力学和控制理论的热潮,明显的一个突破就是分数阶蔡氏混沌系统的提出,在文[15]中采用了频域波特图近似法来表示近似分数阶导数,进而求解了描述蔡氏系统的分数阶常微分方程组,通过数值仿真证实了分数阶动力学系统也能产生混沌现象,由此激发了这类系统的混沌产生、同步、控制与反控制的研究<sup>[13-19]</sup>.总的来看,基于分数阶分析的非线性分数阶电路与系统和信号处理(Fractional order Circuits and Systems, Signal Processing)已成为相关领域中的一个前沿研究方向.可以预期,在 21 世纪的自然科学(数学、物理学、化学等),特别是信息科学中,会在这一研究方向上出现良好的前景和丰硕的成果.

关于分数微分、分数积分,这一古老而又新奇的课题,它包含着丰富多彩的内容,暗藏着奥妙深邃的机理,在这一领域存在广袤的土地有待开垦,蕴藏着许多珍宝有待发掘.

## 参考文献:

- [1] Jenr Sen Leu, A Papamarcou. On estimating the spectral exponent of fractional Brownian motion[J]. IEEE Trans IT, 1995, 41(1): 233-244.
- [2] Szur Chu Liu, Shyang Chang. Dimension Estimation of discrete time fractional Brownian Motion with applications to image texture classification[J]. IEEE Trans. On Image Processing, 1997, 6(8): 1176-1184.
- [3] B Ninness. Estimation of 1/f noise[J]. IEEE Trans IT, 1998, 44(1): 32-46.
- [4] Jenr Chang Liu, Werr Liang Hwang, Ming syan Chen. Estimation of 2-D noisy fractional Brownian motion and its applications using wavelets[J]. IEEE Trans IP, 2000, 9(8): 1407-1419.
- [5] B Mbodje, G Montseny. Boundary fractional derivative control of the wave equation[J]. IEEE Trans. Automat. Control, 1995, 40(2): 378-382.
- [6] On P Agrawal. Solution for a fractional diffusion wave equation defined

- in a bounded domain[J]. Nonlinear dynamics, 2002, 29: 145– 155.
- [ 7 ] N Engheta. On the role of fractional calculus in electromagnetic theory [J]. IEEE Antennas Propagation Mag. 1997, 39(4): 35– 46.
- [ 8 ] M Unser, T Blu. Fractional splines and wavelets[J]. SIAM Review, 2000, 42(1): 43– 47.
- [ 9 ] M Unser. Splines, a perfect fit for signal and image processing. IEEE SP Mag, Nov. 1999: 22– 38.
- [ 10 ] 袁晓, 陈向东, 李齐良等. 微分算子与子波构造[J]. 电子学报, 2002, 30(5): 769– 773.
- [ 11 ] 袁晓. 一类新的复解析子波构造及其性质研究[J]. 电子学报, 2000, 28(4): 123– 126.
- [ 12 ] 陈向东, 袁晓, 李齐良等. 高斯函数、子波及其局域化特征[J]. 信号处理, 2001, 17(增): 66– 69.
- [ 13 ] T T Hartley, C F Lorenz, H K Qammat. Chaos in a fractional order Chua's system[J]. IEEE Trans CAS I, 1995, 42(8): 485– 490.
- [ 14 ] W M Ahmad, J C Sprott. Chaos in fractional order autonomous nonlinear systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals. 16(2003): 339– 351.
- [ 15 ] C G Li, X F Liao, J B Yu. Synchronization of fractional order chaotic systems[J]. Physical Review E 2003, 68, 067203.
- [ 16 ] F B M Duarte, J A T Machado. Chaotic phenomena and fractional order dynamics in the trajectory control of redundant manipulators[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29: 315– 342.
- [ 17 ] Shunji Manabe. A suggestion of fractional order controller for flexible spacecraft attitude control[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29: 251– 268.
- [ 18 ] B M Vinagre, I Petráš, I Podlubny, Y Q Chen. Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model reference adaptive control[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29: 269– 279.
- [ 19 ] X Moreau, C Ramus-Sement, A Oustaloup. Fractional differentiation in passive vibration control[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29: 343– 362.
- [ 20 ] S C Pei, J J Shyu. Design of FIR Hilbert transformers and differentiators by eigenfilters[J]. IEEE Trans Circuits Systems, 1988, 35: 1457– 1461.
- [ 21 ] S C Pei, J J Shyu. Eigenfilter design of higher order digital differentiators[J]. IEEE Trans. ASSP, 1989, 37: 505– 511.
- [ 22 ] S Sunder, V Ramachandra. Design Of equiripple nonrecursive digital differentiators and Hilbert transformers using a weighted least squares technique[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(9): 2504– 2509.
- [ 23 ] [美] A Y 奥本海姆, R W 谢弗, J R 巴克编著, 刘树棠, 黄建国译. 离散时间信号处理(2版)[M]. 西安交通大学出版社, 2001: 400– 402.
- [ 24 ] S K Mitra. Digital Signal Processing A Computer Based Approach(Second Edition)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 423– 472.
- [ 25 ] 谭琳著.  $\Gamma$  函数札记[M]. 浙江杭州: 浙江大学出版社, 1997: 1– 21.
- [ 26 ] H Samavati, A Hajimiri, A R Shahani, et al. Fractal capacitors[J]. IEEE Journal of Solid State Circuits, 1998, 33(12): 2035– 2041.
- [ 27 ] Yuan Xiao, Zhao yuanying, Chen xiangdong, et al. The generalized Battle-Lemarie wavelets. Proc. of 2002 ICCAS, vol. II: 1083– 1086.
- [ 28 ] 袁晓, 陶青川, 何小海. 广义 Battle-Lemarie 子波. 电子学报, 2003, 31(2): 271– 275.
- [ 29 ] 袁晓, 陈向东, 李齐良等. 广义 Haar 子波[J]. 电子科技大学学报, 2002, 31(1): 19– 23.
- [ 30 ] 袁晓, 陈向东, 王俊波. 经典规范正交子波的一种简单广义化方法及其应用[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(12): 1870– 1878.
- [ 31 ] 赵元英, 袁晓, 滕旭东等. 常用周期信号的分数阶微分运算[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2004, 36(2): 94– 97.
- [ 32 ] 王晟达, 袁晓, 滕旭东. 数字微分器系数函数的快速获取算法[J]. 信号处理, 2003, 19(增): 402– 405.
- [ 33 ] 滕旭东, 袁晓, 赵元英等. 数字分数微分器系数和快速算法[J]. 电子科技大学学报, 2004, 33(4): 457– 460.

#### 作者简介:



袁 晓 男, 1964 年生于四川中江, 博士, 1998 年毕业于电子科技大学电路与系统专业, 感兴趣的领域有电路与系统、神经网络、数字通信等, 目前主要从事现代(数字)信号分析与处理理论和应用研究, 特别是子波理论及其应用, 分数计算理论及其应用等等, 已公开发表学术论文六十余篇。

张红雨 男, 1968 年 4 月出生于湖南宜昌, 博士, 电子科技大学副教授, 主要从事通信与信息安全方面的研究, 已公开发表学术论文十余篇。



虞厥邦 男, 1932 年生, 电子科技大学教授, 电路与系统学科博士生导师, 主要从事非线性电路与系统、计算智能和 VLSI 电路 CAD 的研究。