

# 基于 Riesz 基的含噪声密度估计

赵 平<sup>1</sup>, 刘贵忠<sup>1</sup>, 赵 春<sup>2</sup>

(11 西安交通大学电子与信息工程学院, 陕西西安 710049; 21 西安交通大学理学院, 陕西西安 710049)

**摘 要:** 本文研究了含噪声密度估计问题, 在 Besov 空间上, 构造了基于 Riesz 基的线性小波估计, 并利用此结果给出了含噪声截断线性小波估计, 该结果改善了现有的估计, 减少了运算量。

**关键词:** 小波; 密度估计; Besov 类; Lemarie-Meyer 小波

**中图分类号:** TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 10-1666-05

## Density Estimation in the Presence of Noise Based on Riesz Basis

ZHAO Ping, LIU Guizhong, ZHAO Chun

(11 School of Electronic & Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

21 School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** The problem of estimating a density in the presence of noise is considered. Linear wavelet estimators based on Riesz basis are constructed if function belongs to Besov space. Then we use this result, density estimation in the presence of noise by truncated wavelet expansion is studied. The proposed wavelet estimator is an improvement on previous estimators. The density estimation has low computational cost.

**Key words:** wavelets; density estimation; Besov class; Lemarie-Meyer wavelet

## 1 引言

小波方法对曲线进行估计的主要优点是它能适应信号的不规则起伏。利用小波展开对概率密度进行估计, 许多研究者做了大量的工作。Kerkycharian 和 Picard<sup>[6, 7]</sup>, Kato<sup>[8]</sup>对线性小波估计的性质进行了研究, Donoho<sup>[1]</sup>和 Hall<sup>[5]</sup>等人利用阈值技术讨论了非线性小波估计。本文主要讨论含噪声的线性小波密度估计问题, 假定有  $Y$  的  $n$  个独立同分布观察值  $Y_1, \dots, Y_n$ 。用来估计随机变量  $X$  的未知密度  $f$ , 这里

$$Y = X + E$$

$E$  是一个噪声且分布已知, 其密度为  $k(x)$ , 而且假定随机变量  $X$  和  $E$  是相互独立的,  $X$  和  $Y$  的概率密度分别为  $f$  和  $g$ , 有

$$\text{关系} \quad g(y) = (f * k)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) k(x) dx \quad (1)$$

通过  $Y$  的观察值来估计未知密度  $f$ , 这就是含噪声的密度估计问题。Fan<sup>[2, 3]</sup>, Pensky<sup>[9, 10]</sup>和 Walter<sup>[12, 13]</sup>等人进行了这方面的研究, Walter<sup>[12]</sup>构造出下面的线性估计量

$$f_j(x) = \sum_{k=-j}^{+j} a_{j,k} U_{j,k}(x) \quad (2)$$

这里  $a_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{j,k}^{(n)}(Y_i)$ , 其中  $\phi_{j,k}^{(n)} = R(2^j X) \cdot U_{j,k}(X)$

前人所做的工作都没有利用 Riesz 基研究密度估计问题。要给出含噪声的线性小波密度估计, 我们发现利用正交基构成的重构核是不能有效地得到含噪声的密度估计量, 而利用 Riesz 基构成的重构核可以得到比较满意的密度估计量。从式 (2) 可以看出, 对系数  $a_{j,k}$  的计算随  $k(x)$  的变化而变化, 会引起大的计算量。本文从 Riesz 基出发, 给出了估计量

$$f_{j(n)}(x) = \sum_{k=-j}^{+j} a_{j(n),k} \phi_{j(n),k}^{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{(n)}(x, Y_j) \quad (3)$$

这里  $a_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_{j,k}(Y_i)$ ,  $\phi_{j(n),k}^{(n)} = R(X) \cdot U_{j(n),k}(X)$ 。

从式 (3) 可以看出, 这里的系数不随  $k(x)$  变化, 可以减少不必要的计算, 从实验结果可以看出, 利用式 (3) 得到的密度估计图形没有偏移。为了得到式 (3) 估计量, 我们首先给出利用 Riesz 基得到的一般密度估计量, 然后利用得到的结果, 给出了含噪声的线性小波密度估计。因为无限项的和在实际中不能计算, 因此本文给出了含噪声截断线性小波估计。

下面给出本文所涉及的一些概念: 满足下列条件的  $\{7_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  为  $L^2$  的 Riesz 基:

$$(\tilde{N}) \{7_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\} = L^2;$$

$$(\tilde{0}) \text{ 存在二常数 } A, B, 0 < A \leq B < \infty \text{ 使得}$$

$$A + \{C_{j,k}\} + \frac{2}{j} F + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} 7_{j,k} + \frac{2}{j} B + \{C_{j,k}\} + \frac{2}{j}$$

收稿日期: 2002-07-29; 修回日期: 2004-05-12

基金项目: 国家自然科学基金(No160272072), 国家教育部/跨世纪优秀人才0培养计划(2000年度)和教育部/十五/2110工程西安交通大学重点科研项目部分资助

对一切  $\{C_{j,k}\} \in L^2(Z^2)$  成立.

在  $L^2$  意义下, 尺度函数为  $U \in L^2(R)$ , 小波函数为  $\psi \in L^2(R)$ , 并且序列  $\{V_j\}, j \in \mathbb{Z}$  形成  $L^2$  上的多分辨分析

$$\begin{aligned} V_m &= \bigvee_{l=j_0}^{m-1} V_{m-2-l} \vee V_{j_0} \\ g_{m-1} &= g_{m-2} \oplus g_{j_0} \\ L^2 &= \bigoplus_{l=j_0}^{\infty} W_l \end{aligned}$$

对于每个  $j_0 \in \mathbb{Z}$ , 函数族  $\{U_{j,k}, \psi_{j,k} | j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$  形成了  $L^2(R)$  的 Riesz 基, 这里  $U_{j,k}(x) = 2^{j/2} U(2^j x - k)$  且  $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ .

对于固定的  $j_0$ , 任意  $f \in L^2(R)$  可以分解为:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j_0,k} U_{j_0,k}(x) + \sum_{l=j_0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{l,k} \psi_{l,k}(x) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{l,k} \psi_{l,k}(x) \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $a_{j,k} = (f, U_{j,k})_{L^2}$ ,  $B_{j,k} = (f, \psi_{j,k})_{L^2}$ ,  $U(x)$  是  $U(x)$  对偶函数,  $\psi(x)$  是  $\psi(x)$  对偶函数,  $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  表示  $L^2(R)$  空间上的内积.

定义 Besov 空间  $B_{s,p,q}$ : 对于  $0 < p, q < \infty$ ,  $s > 0$ , 一个函数  $f(x) \in B_{s,p,q}$ , 如果它的 Besov 泛数是有限的:

$$\|f\|_{B_{s,p,q}} < \infty$$

这里, 对于  $0 < s \leq 1$

$$\|f\|_{B_{s,p,q}} = \|f\|_{L^p} + \left\| \left[ \int_0^1 \left| Q_h^{-1} \left( \frac{1}{h^s} + f(\cdot+h) - f(\cdot) \right)^q dh \right|^{\frac{1}{q}}, \quad q < \infty \right] \right\|$$

$$+ \left\| \sup_{h>0} \frac{f(\cdot+h) - f(\cdot)}{h^s} \right\|_q, \quad q = \infty \quad (5)$$

对于  $s > 1$ ,  $s = s^* + t$ ,  $0 < t \leq 1$ , 这里  $s^*$  是小于  $s$  的最大整数,

$$\|f\|_{B_{s,p,q}} = \sum_{m=0}^{s^*} \|f^{(m)}\|_{B_{t,p,q}} + \|f\|_{L^p}$$

若  $f \in B_{s,p,q}$ , 则  $f$  有  $s$  阶可导, 且  $f \in L_p$ .

本文中采用的估计误差测量准则是期望平方误差 (MISE):

$$E_f[\|f - \hat{f}\|_2^2] = E_f \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \hat{f}(x)|^2 dx \right] \quad (6)$$

这里  $E_f[\cdot]$  表示关于  $f$  的数学期望.

本文是这样组织的: 第 2 部分给出了基于 Riesz 基的密度估计, 这里的重构核是由 Riesz 基构成的, 期望平方误差 (MISE) 得到了计算, 第 3 部分给出了含噪声截断线性小波估计, 第 4 部分利用 Lemarié-Meyer 小波进行了数值计算.

## 2 基于 Riesz 基的密度估计

为了得到本文的结果, 我们首先给尺度函数  $U(u)$  一些限制条件. 若存在一个非增函数  $\phi$  使得  $\int_0^\infty \phi(|u|) du < \infty$  且  $|U(u)| \leq \phi(|u|)$ , 则称  $U(u)$  满足条件 S. 若条件 S 成立  $\int_0^\infty \phi(|u|) |u|^N du < \infty$ , 则称  $U(u)$  满足条件 S(N). 若函数  $H(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |U(x-k)|$  使得  $\text{ess sup}_x H(x) < \infty$ , 则称  $U(u)$  满足条件 (H).

**引理 1** 由条件 S 可以推出条件 (H).

引理 1 的证明参见 [4] 引理 815.

**引理 2** 若  $U$  满足条件 (H),  $a_k = \int_{-\infty}^{\infty} U(2x-k) dx$ , 则  $\sum_k |a_k| < \infty$

证明:  $\sum_k |a_k| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |U(x) + U(2x-k)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |U(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |U(2x-k)| dx < \infty$

**引理 3** 假如  $U(x)$  和  $U(x)$  都满足条件 S, 也就是存在非增函数  $\phi_1, \phi_2$  使得  $|U(u)| \leq \phi_1(|u|)$ ,  $|U(u)| \leq \phi_2(|u|)$ , 则存在非增函数  $\phi$ , 使得核函数

$$K(x, y) = \sum_k U(x-k) U(y-k)$$

满足

$$|K(x, y)| \leq \phi(|x-y|)$$

证明略.

为了证明下面的结论, 我们对核函数  $K(x, y)$  给出一些限制条件. 若存在可积函数  $F(x)$ , 使得  $|K(x, y)| \leq F(x-y)$ ,  $P x, y \in R$ , 则称  $K(x, y)$  满足条件 H. 若条件 H 成立并且  $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^N F(x) dx < \infty$ , 则称  $K(x, y)$  满足条件 H(N). 若  $K(x+1, y+1) = K(x, y)$ ,  $P x, y \in R$ , 则称  $K(x, y)$  满足条件 P. 若条件 H(N) 是满足的, 并且  $\int_{-\infty}^{\infty} Q K(x, y) (y-x)^k dy = D_{0k}$ ,  $P k = 0, \dots, N$ ,  $P x \in R$ , 则称  $K(x, y)$  满足条件 M(N).

为下面证明方便, 我们引入一些概念:  $V_m$  的重构核  $K_m(x, y)$  定义为:

$$K_m(x, y) = 2^m K(2^m x, 2^m y)$$

这里  $V_0$  的重构核  $K(x, y)$  为:

$$K(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U(x-n) U(y-n)$$

在以下讨论中从  $L^2(R)$  到  $V_{j(n)}$  的投影表示为:

$$f_{j(n)}(x) = (P_{j(n)} f)(x) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} K_{j(n)}(x, y) f(y) dy$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j(n),k} U_{j(n),k}(x)$$

线性小波估计:

$$f_{j(n)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j(n),k} U_{j(n),k}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{j(n)}(x, X_j)$$

这里当  $n y \rightarrow \infty$  时,  $j(n) y \rightarrow \infty$  且  $\frac{2^{j(n)}}{n} y \rightarrow 0$ ,  $a_{j,k} =$

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n U_{j,k}(X_l).$$

可以证明  $E f_{j(n)} = f_{j(n)}(x)$ , 因此是无偏估计量.

截断线性小波估计:

$$f_{j(n),k(n)}(x) = \sum_{|k| \leq F_k(n)} a_{j(n),k} U_{j(n),k}(x) \quad \text{这里当 } n y \rightarrow \infty \text{ 时, } k(n) y \rightarrow \infty.$$

为了计算 MISE,  $f_{j(n),k(n)}(x)$  的 MISE 可以分成如下两项:

$$\begin{aligned} E_f[\|f_{j(n),k(n)} - f\|_2^2] &= \sum_{j=1}^n E_f(f_{j(n),k(n)} - f)^2 dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^n E_f(|f_{j(n),k(n)} - E_f(f_{j(n),k(n)})|^2) dx \end{aligned}$$

以下假定  $f(x)$ ,  $U(x)$  和  $\psi(x)$  满足:

(A<sub>1</sub>) 对于某些  $s > 0$  且  $q \in [1, +\infty]$ ,  $f \in B_{s,2,q}$ ;

(A<sub>2</sub>)  $U(x)$  和  $\psi(x)$  都满足条件  $S(N+1)$ ,  $U(x)$  的导函数  $U^{(m)}(x)$  ( $m \in \mathbb{N}+1$ ) 是连续的.

**引理 4** 设(A<sub>1</sub>)和(A<sub>2</sub>)成立, 则对于每个  $n \in \mathbb{N}+1$  有充分大的  $B > 0$ , 对于所有  $\{k(n)\}$  满足  $k(n) \in B$ , 存在常数  $M_1, M_2 > 0$  及一个整数  $n_0 \in \mathbb{N}+1$ , 使得对于所有  $n \in \mathbb{N}+1$

$$M_4 \frac{2^{j(n)}}{n} F \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f_{j(n),k(n)} - E_f(f_{j(n),k(n)})|^2 dx \leq M_3 \frac{2^{j(n)}}{n} \quad (7)$$

$M_3$  和  $M_4$  仅依赖于尺度函数  $U(x)$ .

证明略.

有了上面引理得到的结果, 可以得到本节的主要结果.

**定理 1** 若(A<sub>1</sub>)和(A<sub>2</sub>)是满足的,  $0 < s \leq N+1$ , 则存在常数  $M_1, M_2 > 0$  和一个整数  $n_0 \in \mathbb{N}+1$ , 使得对于所有  $n \in \mathbb{N}+1$

$$M_2 n^{-2s/(2s+1)} F E_f[|f_{j(n),k(n)} - f|^2] \leq M_1 n^{-2s/(2s+1)}$$

这里  $2^{j(n)} U(2sn)^{1/(1+2s)}$ .

证明略.

从上面的讨论中可以看出, 我们给出的含噪声截断线性小波估计的 MISE 的收敛速度和含噪声线性小波估计的 MISE 的收敛速度是一样的.

### 3 含噪声的密度估计

Lemarié-Meyer 尺度函数  $U$  和小波函数  $\psi$  满足下列条件<sup>[3]</sup>:

(B<sub>1</sub>)  $U$  是一个正交的尺度函数,  $\psi$  是它相应的小波函数

(B<sub>2</sub>) 函数  $\psi$  和函数  $\psi$  的支撑集分别是  $\{x \mid |x| \leq 4P/3\}$  和  $\{x \mid 2P/3 \leq |x| \leq 8P/3\}$

(B<sub>3</sub>) 对于每一个整数  $N \in \mathbb{N}+1$  和  $0 < q < r$  存在一个正常数  $d_N$ , 使得

$$|U^{(q)}(x)| \leq d_N (1+|x|)^{-N} \quad \text{且} \quad |\psi^{(q)}(x)| \leq d_N (1+|x|)^{-N}$$

我们对式(1)两边进行 Fourier 变换得

$$f(X) = \frac{\hat{f}(X)}{\hat{K}(X)}$$

$$\hat{c}_{m,n} = \hat{K}(X) \hat{U}_{m,n}(X) \quad (8)$$

$$\hat{c}^{m,n} = \hat{K}(X)^{-1} \hat{U}_{m,n}(X) \quad (9)$$

特别  $m=0$ ,  $\hat{c}_0 = \hat{K}(X) \hat{U}(X) = \hat{c}(X)$ .

$\hat{K}(X)$  将 MRA 中的每个  $V_m$  映射到  $U_m$ ,  $U_m$  是由  $\{\hat{c}_{m,n}(t)\}$  扩张的闭子空间, 同样,  $\hat{K}(X)^{-1}$  将 MRA 中的每个  $V_m$  映射到  $U^m$ ,  $U^m$  是由  $\{\hat{c}^{m,n}(t)\}$  扩张的闭子空间,

对应关系见右表:

以下定理表明式(8), (9)定义的尺度函数分别构成了多分辨率分析, 并且构成嵌入空间的 Riesz 基.

**定理 2** 对于任意  $m$ ,  $\{\hat{c}_{m,n}(t)\} = \{\hat{c}_{m,n}(t-2^{-m}n)\}$  是  $U_m$  的一个 Riesz 基,  $\{\hat{c}^{m,n}(t)\} = \{\hat{c}^{m,n}(t-2^{-m}n)\}$  是  $U^m$  的一个 Riesz 基, 且  $\{\hat{c}_{m,n}(t), \hat{c}^{m,n}(t)\}$  是一个双正交序列.

证明见附录.

对于小波函数定义映射为:

$$\hat{C}_{m,n} = \hat{K}(X) \hat{\psi}_{m,n}(X)$$

$$\hat{C}^{m,n} = \hat{K}(X)^{-1} \hat{\psi}_{m,n}(X)$$

类似可以证明下面结果

**定理 3** 对于任意  $m$ ,  $\{\hat{C}_{m,n}(t)\} = \{\hat{C}_{m,n}(t-2^{-m}n)\}$  是  $M_m$  的一个 Riesz 基,  $\{\hat{C}^{m,n}(t)\} = \{\hat{C}^{m,n}(t-2^{-m}n)\}$  是  $M^m$  的一个 Riesz 基, 且  $\{\hat{C}_{m,n}(t), \hat{C}^{m,n}(t)\}$  是一个双正交序列.

**定理 4**  $\{\hat{U}_m\}$  形成  $L^2(\mathbb{R})$  的一个多分辨率分析, 且  $V_m < U_m < V_{m+1}$ , 对于  $\{U^m\}$  有类似的结果.

证明见附录.

由上面的证明结果知, 对于固定的  $j_0$ ,  $\{\hat{c}_{j_0,k}^{j,k} \mid j \in j_0, j, k \in \mathbb{Z}\}$  形成了  $L^2(\mathbb{R})$  的 Riesz 基, 密度函数  $f \in L^2(\mathbb{R})$  可以分解为:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j_0,k} \hat{c}_{j_0,k}^{j,k}(x) + \sum_{l=j_0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{l,k} \hat{C}_{l,k}^{j,k}(x) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{l,k} \hat{C}_{l,k}^{j,k}(x) \end{aligned}$$

这里  $a_{j,k} = (f, \hat{c}_{j,k})_{L^2}$ ,  $B_{j,k} = (f, \hat{C}_{j,k})_{L^2}$ .

$U^m$  的重构核  $q_m(x, y)$  定义为:

$$q_m(x, y) = 2^m q(2^m x, 2^m y)$$

这里  $U^0$  的重构核  $q(x, y)$  为  $q(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_0(x-n) \hat{c}_0(y-n)$

从  $L^2(\mathbb{R})$  到  $U^{(n)}$  的投影表示为:

$$\begin{aligned} f_{j(n)}(x) &= (P_{j(n)} f)(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{q}_{j(n)}(x, y) f(y) dy \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j(n),k} \hat{c}_{j(n),k}^{j(n),k}(x) \end{aligned}$$

对上式利用 Parseval 等式得:

$$\begin{aligned} f_{j(n)}(x) &= (P_{j(n)} f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f, \hat{c}_{j(n),k}^{j(n),k}) \hat{c}_{j(n),k}^{j(n),k}(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \left( \hat{g}, \frac{\hat{c}_{j(n),k}^{j(n),k}}{\hat{K}} \right) \hat{c}_{j(n),k}^{j(n),k}(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (g, \hat{U}_{j(n),k}) \hat{c}_{j(n),k}^{j(n),k}(x) \end{aligned}$$

因此含噪声线性小波估计为:

$$f_{j(n)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{j(n),k} \hat{c}_{j(n),k}^{j(n),k}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_{j(n)}(x, Y_j)$$

这里  $a_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \hat{U}_{j(n),k}(Y_l)$ .

因为

$$E f_{j(n)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{q}_{j(n)}(x, t) g(t) dt = f_{j(n)}(x)$$

因此  $f_{j(n)}(x)$  是一个无偏估计量.

含噪声截断线性小波估计:

$$f_{j(n),k(n)}(x) = \sum_{l \in \mathbb{N} \setminus \{k(n)\}} a_{j(n),l} \hat{c}_{j(n),l}^{j(n),k(n)}(x) \quad (10)$$

这里  $a_{j,k} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \hat{U}_{j(n),k}(Y_l)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $k(n) \rightarrow \infty$ .

## 4 例子数值计算

设噪声密度函数  $k(x) = \begin{cases} Ke^{-Kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$   $K=1$ , 是指分布, 此密度函数是不对称的, 则  $k(X) = \frac{1}{1+jX}$ . 我们考查对正

态分布  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{-\frac{x^2}{2R^2}}$ ,  $R=5$  的估计,  $U(x)$  是 Lemarié-Mey2

尺度函数, 容易计算

$$\phi_0(x) = U(x) + U(x)$$

( $x$ ), 因此  $U(x)$  和  $\phi_0$

( $x$ ) 都满足  $S(N+1)$ ,

可以利用期望平方误差

进行误差估计. 在模拟

实验中, 产生  $n=500$

个样本值, 实验对比

结果如下图所示, 下

面图 1 是用式 (2) 的截

断线性小波估计得到

逼近结果, 图 2 是利用

式 (10) 给出的估计

$$f_{j(n), k(n)}(x) = \sum_{k \in F_{k(n)}} a_{j(n), k} \phi_{j(n), k}(x)$$

的逼近结果. 从图中可

以看出, 用式 (2) 截断

线性小波估计给出的

逼近结果有显著的偏

移, 而用本文中的式 (10)

给出的逼近结果没有偏

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

移.

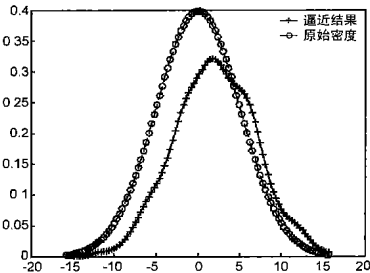


图 1

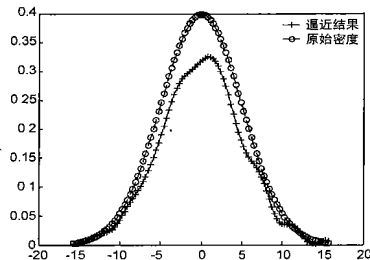


图 2

## 5 结论

本文利用 Riesz 基研究了含噪声密度估计问题, 由于 Riesz 基具有完美的重构性, 因此本文的方法从理论上保证了它的严密性. 另外, 本文的线性小波估计方法, 在计算估计量 (10) 中的每一项时, 都比利用式 (2) 计算估计量中的每一项少算  $n-1$  次加法运算, 共少算  $(n-1)(2k(n)+1)$  次加法运算, 有效的改善了现有的估计, 减少了运算量.

**附录** 定理 2 的证明: 不失一般性, 这里仅证明  $m=0$  的情况, 设  $\{c_n\}$  是任意  $l^2$  中的序列, 由 Parseval 等式和  $\{U(t-n)\}$  的正交性,

$$\begin{aligned} & + \sum_n c_n \phi_0(t-n) +^2 = \frac{1}{2P} Q |\phi_0(X)|^2 \sum_n |c_n e^{-jXn}|^2 dX \\ & F \frac{1}{2P} \left( \sup_{X \in [-4P/3, 4P/3]} |k(X)|^2 \right) \sum_{-4P/3}^{4P/3} |U(X)|^2 \\ & \quad \# \sum_n |c_n e^{-jXn}|^2 dX \\ & = \left( \sup_{X \in [-4P/3, 4P/3]} |k(X)|^2 \right) \sum_n |c_n|^2 \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned} & + \sum_n c_n \phi_0(t-n) +^2 = \frac{1}{2P} \sum_{-4P/3}^{4P/3} |U(X)|^2 \\ & \quad \# |k(X)|^2 \sum_n |c_n e^{-jXn}|^2 dX \\ & E \left( \inf_{X \in [-4P/3, 4P/3]} |k(X)|^2 \right) \sum_n |c_n|^2 \\ & \text{因此证明了 } \{\phi_0(t-n)\} \text{ 形成了 } U_0 \text{ 的 Riesz 基.} \\ & \text{以下证明 } \{\phi_m(t-n), \phi_m^n(t)\} \text{ 是一个双正交序列} \\ & Q \phi_0(t-n) \phi_0^*(t-k) dt = \frac{1}{2P} Q k(X) \overline{U(X)} k^{-1}(X) U(X) \\ & \quad \# e^{-jX(n-k)} dX \\ & = \sum_n U(t-n) U(t-k) dt = \delta_{n-k} \end{aligned}$$

定理 4 的证明: 要说明  $\{U_m\}$  形成  $L^2(R)$  的一个多分辨分析, 只要说明  $\{U_m\}$  是嵌套的, 且

$$H U_m = \{0\} \quad (11)$$

$$\text{clos} \{G U_m\} = L^2(R) \quad (12)$$

对于任意  $x(t) \in U_m$ , 由式 (8) 存在唯一  $y(t) \in V_m$  与它对应, 但是  $y(t) \in V_{m+1}$ , 因此,  $x(t) \in U_{m+1}$ , 即  $\{U_m\}$  是嵌套的. 下面说明式 (11) 成立, 由反证法, 假定存在一个  $x(t) \in U_m$ , 使得  $x(t) \in H U_m$ , 则由式 (8) 存在  $y(t) \in V_m$  且  $y(t) \in H V_m$ , 这与  $\{V_m\}$  形成  $L^2(R)$  的一个多分辨分析矛盾. 为证明式 (12), 只要说明

$$V_m \subset U_{m+1} \quad (13)$$

任意一个  $x(t) \in V_0$ , 则  $x(t) \in U_1$  的充分必要条件是

$$\hat{x}(X) = B(X) \phi_1(X) \quad (14)$$

这里  $B(X)$  是一个周期为  $4P$  的周期函数. 以下给出证明

$$\begin{aligned} \hat{x}(X) &= A(X) U(X) = A(X) m_0(X/2) U(X/2) \\ &= A(X) \left[ \overline{[k^{-1}(X)]_{[-4P/3, 4P/3]}} \right]_{4P} @ m_0(X/2) \\ & \quad \# \left[ [k(X)]_{[-4P/3, 4P/3]} \right]_{4P} U(X/2) \end{aligned} \quad (15)$$

这里  $\left[ \overline{[k^{-1}(X)]_{[-4P/3, 4P/3]}} \right]_{4P}$  是  $k^{-1}(X)$  限制在  $[-4P/3, 4P/3]$  上的以  $4P$  为周期的周期延拓. 由于  $U(X) = m_0(X/2) U(X/2)$ , 因此  $m_0(X/2)$  在区间  $[-8P/3, -4P/3]$  和区间  $[4P/3, 8P/3]$  上为零, 又因为  $U(X/2)$  在区间  $[-8P/3, 8P/3]$  外为零, 因此上式的后三项可写为

$$\begin{aligned} & m_0(X/2) \left[ \overline{[k(X)]_{[-4P/3, 4P/3]}} \right]_{4P} U(X/2) \\ &= m_0(X/2) \overline{k(X)} U(X/2) \\ &= m_0(X/2) \phi_1(X) \end{aligned}$$

因此式 (15) 变为

$$\hat{x}(X) = A(X) \left[ \overline{[k(X)]_{[-4P/3, 4P/3]}} \right]_{4P} m_0(X/2) \phi_1(X)$$

这里乘积的前三项是以  $4P$  为周期的周期函数, 因此  $V_0 \subset U_1$ , 类似可以证明  $V_m \subset U_{m+1}$ , 类似可以证明  $\{U_m\}$  上的结果

## 参考文献:

- [1] D L Donoho, I M Johnstone, G kerkyacharian, D Picard. Density estimation by wavelet thresholding[J]. Ann. Statist., 1996, 24: 508- 539.
- [2] J Fan. On the rate of convergence for nonparametric deconvolution

problem[J]. Ann. Statist, 1991, 19: 1257- 1272.

- [ 3 ] J Fan, JY Koo. Wavelet deconvolution[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2002, 48(3): 734- 747.
- [ 4 ] W Hardle, G Kerkyacharian, D Picard. Wavelets, Approximation and Statistical Applications[M]. New York: Springer, 1998.
- [ 5 ] P Hall, G Kerkyacharian, D Picard. Block threshold rules for curve estimation using kernel and wavelet methods[J]. Ann. Statist. 1998, 26: 922- 942.
- [ 6 ] G Kerkyacharian, D Picard. Density estimation in Besov spaces[J]. Statist. Probab. Lett. , 1992, 13: 15- 24.
- [ 7 ] G Kerkyacharian, D Picard. Density estimation by kernel and wavelets methods: Optimality of Besov spaces[J]. Statist. Probab. Lett. , 1993, 18: 327- 336.
- [ 8 ] T Kato. Density estimation by truncated wavelet expansion[J]. Statist. Probab. Lett. , 1999, 43: 159- 168.
- [ 9 ] M Pensky, B Vidakovic. Adaptive wavelet estimator for nonparametric density deconvolution[J]. Ann. Statist. 1999, 27: 2033- 2053.
- [ 10 ] M Pensky. Density deconvolution based on wavelets with bounded supports[J]. Statist. Probab. Lett. 2002, 56: 261- 269.
- [ 11 ] G G Walter, X Shen. Wavelets and other orthogonal systems[M]. CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
- [ 12 ] G G Walter. Density estimation in the presence of noise[J]. Statist. Probab. Lett. 1999, 41: 237- 246.
- [ 12 ] G G Walter, X Shen. Continuous nonnegative wavelets and their use in density estimation[J]. Communication in Statistics, 1999, 28: 1- 18.

## 作者简介:



**赵 平** 男, 1965 年出生, 副教授, 现为西安交通大学电子与信息工程学院通信与信息系统专业博士生, 主要从事小波分析、信号处理和识别、软论等方面的理论与应用研究工作. Email: zhaoping@mails.xjtu.edu.cn



**刘贵忠** 男, 1962 年出生于陕西省延安市, 现为西安交通大学电子与信息工程学院教授, 主要从事非平稳信号的分析、处理和识别等方面的理论与应用研究.



**赵 春** 男, 1963 年出生, 副教授, 现为西安交通大学理学院博士生, 主要从事生物数学模型最优控制、复方程边值问题、小波分析、信号处理等方面的理论与应用研究工作.