# 正则蕴涵算子所对应的逻辑伪度量空间

李璧镜[1,2],王国俊[1,3]
(1.陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西西安 710062;2.宝鸡文理学院数学系,陕西宝鸡 721007;
3.华东师范大学上海高可信计算重点实验室,上海 200062)

**摘　要:** 本文对所有正则蕴涵算子对应的逻辑系统类 MTL 进行语义研究,指出在 MTL 中可以建立连续赋值格时的公式积分真度理论,但却不能在这一类逻辑系统的全体公式集上建立由公式间的积分相似度决定的伪度量空间.但凡可以建立如此伪度量空间的逻辑系统,都有个共同的性质,即系统中所有的逻辑运算都是连续的,从而就为在此类逻辑系统中建立统一形式的近似推理提供了可行的框架.

**关键词:** 正则蕴含算子;可测的;积分真度;逻辑伪度量空间;算子的连续性

**中图分类号:** O142　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 0372-2112 (2010) 03-0497-06

# Logic Pseudo-Metric Spaces of Regular Implication Operators

LI Bi-jing[1,2], WANG Guo-jun[1,3]
(1. *College of Mathematics and Information Science*, *Shaanxi Normal University*, *Xi'an*, *Shaanxi* 710062, *China*;
2. *Department of Mathematics*, *Baoji College of Arts and Science*, *Baoji*, *Shaanxi* 721007, *China*;
3. *Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing*, *Eastchina Normal University*, *Shanghai* 200062, *China*)

**Abstract:** The semantic properties of logic systems MTL induced by regular implication operators were disscussed, the integral truth degree theory of formulas on $[0,1]$ can be founded in MTL. However, the logic pseudo-metric space defined by the integral similarity degree between formulas cannot always be constructed. Moreover, those logic systems which could construct such pseudo-metric spaces have the same properties, i.e. all the logic operators are continuous in terms of pseudo-metric, then a possible framework about approximate reasoning is formed in those logic systems.

**Key words:** regular implication operator; measurable; integral truth degree; logic pseudo-metric space; continuity of operator

## 1 引言

模糊推理是模糊控制的理论基础,而各种各样的蕴涵算子则是模糊推理的数学工具,有众多的学者从不同的应用背景出发提出了各种不同的正则蕴涵算子,一些专著也都用了相当多的篇幅讨论这些蕴涵算子的性质[1~7].值得一提的是,以上关于蕴涵算子的讨论重点大都放在了他们在模糊推理中的应用方面[8~14].众所周知,在建立多值逻辑语义时,其中一类算子比较重要,即可与$[0,1]$上的左连续三角模构成伴随对的蕴涵算子类——正则蕴涵算子类.有很多文章都研究了左连续三角模的构造及其性质[15~18],相应逻辑系统 MTL 在语构方面的性质及系统的完备性等[19~21].关于语义方面的性质,近些年来已经有了大量的工作,特别地,文献[22]曾对常见的六种系统 Luk[23], Gödel, Goguen, Kleene, Zadeh 和 $L^*$ 利用在赋值空间上引入 Lebesgue 测度,证明了这六种系统所对应的公式具有可测性,由其具体的证明过程可以看出,系统中公式可测性的结论依赖于其相应系统中蕴涵算子的具体表现形式(或称为表达式).而实际上,正则蕴涵算子的形式多种多样,我们现在所熟知的仅是其中的很少一部分,本文的研究抛开了蕴涵算子的具体表现形式,利用这一类算子的共同的性质,得到了一个普遍的结论——在左连续三角模对应的逻辑系统 MTL 中,逻辑公式均是可测的.有了这一结论作保证,使得体现程度化思想的积分语义学的理论可以运用于所有正则蕴涵算子所对应的逻辑系统.在此基础上,我们进一步对于所有正则逻辑系统,通过积分的形式定义公式间的相似度、伪距离等概念,在所有公式集上形成伪度量空间,得到了在逻辑伪度量空间上各种逻辑运算均连续的良好性质,从而统一地研究左连续三角模所对应的系统 MTL 在语义方面的性质.

收稿日期:2009-03-21;修回日期:2009-08-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.10771129)

## 2 基础知识

**定义 1**[24] 设$\otimes$:$[0,1]^2\to[0,1]$是二元函数,如果当 $a,b,c\in[0,1]$时,有

(ⅰ) $a\otimes b=b\otimes a$;

(ⅱ) $(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$;

(ⅲ) $a\otimes 1=a$;

(ⅳ) 若 $b\leqslant c$,则 $a\otimes b\leqslant a\otimes c$.

则称$\otimes$为$[0,1]$上的三角模,简称 $t$-模.

**定义 2**[24] 三角模$\otimes$叫左连续的,如果对于每个$a\in[0,1]$,有 $f_a(\bigvee_{i\in I}b_i)=\bigvee_{i\in I}f_a(b_i)$.这里 $f_a(x)=a\otimes x$.

**命题 1**[24] 设$\otimes$是$[0,1]$上的左连续的三角模,在$[0,1]$上定义二元运算$\to$如下:

$$b\to c=\bigvee\{x\mid x\otimes b\leqslant c\},x,b,c\in[0,1].$$

则

(ⅰ) $a\otimes b\leqslant c$ 当且仅当 $a\leqslant b\to c$,即$\to$与$\otimes$互为伴随对;

(ⅱ) $b\to c=1$ 当且仅当 $b\leqslant c$;

(ⅲ) $a\leqslant b\to c$ 当且仅当 $b\leqslant a\to c$;

(ⅳ) $a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$;

(ⅴ) $1\to c=c$;

(ⅵ) $b\to\bigwedge_{i\in I}c_i=\bigwedge_{i\in I}(b\to c_i)$,$(\bigvee_{i\in I}b_i)\to c=\bigwedge_{i\in I}(b_i\to c)$;

(ⅶ) $b\to c$ 关于 $c$ 单调递增,关于 $b$ 单调递减.

**定义 3**[24] 设$\to$是$[0,1]$上的二元运算,如果$\to$满足上述命题中的性质(ⅱ)—(ⅶ),则称为$[0,1]$上的正则蕴涵算子.

**定义 4**[3] 由原子公式集 $S$ 和真值常元$\bar{0}$生成的$(\otimes,\to,\wedge)$型自由代数为全体公式集,记为 $F(S)$.其中$(\otimes,\to)$为伴随对.

**注 1**[3] 有了$\otimes$,$\to$,$\wedge$这三个基本的逻辑运算,我们就可以定义另外两个常见的逻辑运算

$$\neg A=A\to\bar{0};$$

$$A\vee B=((A\to B)\to B)\wedge((B\to A)\to A).$$

由此处的$\neg$定义也可知,"非运算"不再限于常见的标准形式$\neg a=1-a$.

**注 2** 本文只研究赋值格为$[0,1]$时所有正则蕴涵算子所对应的逻辑系统,显然各种逻辑运算$\otimes$,$\to$,和$\wedge$在$[0,1]$中也都是封闭的.从而此处对于公式集的定义相对于本文中逻辑语义方面的研究是合理的.

**注 3** 若伴随对$(\otimes,\to)$中的$\otimes$是连续的三角模,则在 Hájek 的著作[1]中已经证明了 $A\wedge B=A\otimes(A\to B)$,$\forall A,B\in F(S)$成立,又由于 BL 系统完备性的成立,其相应的语义形式为$\forall a,b\in[0,1]$,有 $a\wedge b=a\otimes(a\to b)$成立.

但是如果$\otimes$仅为左连续的三角模,那么情形就变成了$\forall a,b\in[0,1]$有 $a\wedge b\geqslant a\otimes(a\to b)$.特别地,我们可以在 $R_0$ 算子所对应的系统 $L^*$ 中找出上式中$>$成立的情形:取 $a=7/10$,$b=2/10$.那么左边 $7/10\wedge 2/10=2/10$,而右边却是 $7/10\otimes(7/10\to 2/10)=7/10\otimes 3/10=0$.综上知,在正则蕴含算子所对应的逻辑系统 MTL 中,$\wedge$不能由$\otimes$与$\to$表示.

**注 4** 在一些特殊的逻辑系统中$\otimes$可由$\to$与$\bar{0}$来表示.比如我们熟知的系统 $L^*$ 和 Luk,其具体的关系为 $A\otimes B=\neg(A\to\neg B)$.然而在 Gödel 系统中情况就有所不同,比如,我们可以令 $a=\frac{3}{4}$,$b=\frac{1}{4}$,则可知$\frac{3}{4}\otimes\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\wedge\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$,而$\neg(\frac{3}{4}\to\neg\frac{1}{4})=\neg(\frac{3}{4}\to\neg 0)=\neg 0=1$.此时有 $a\otimes b<\neg(a\to\neg b)$.故$\otimes$不能用$\to$及$\bar{0}$来表示.

**定义 5** $(\otimes,\to,\wedge)$型同态映射 $v$:$F(S)\to[0,1]$满足 $v(\bar{0})=0$ 时被称为 $F(S)$到单位闭区间$[0,1]$中的赋值.设 $A\in F(S)$,那么 $v(A)$为 $A$ 的$[0,1]$赋值,$F(S)$的$[0,1]$赋值的全体记为 $\Omega(\to)$.

**注 5** 由赋值的定义可知,对于任意的公式 $A,B$ 有如下的式子成立:

$$v(A\otimes B)=v(A)\otimes v(B)$$

$$v(A\to B)=v(A)\to v(B)$$

$$v(A\wedge B)=v(A)\wedge v(B)$$

$$v(A\vee B)=((v(A)\to v(B))\to v(B))\wedge((v(B)\to v(A))\to v(A))=v(A)\vee v(B)$$

$$v(\neg A)=v(A)\to 0.$$

因为 $F(S)$是由 $S$ 生成的自由代数,所以赋值 $v$:$F(S)\to[0,1]$可以由它在 $S$ 上的限制$v|S$ 唯一决定,即在每个正则逻辑系统中,每个赋值映射 $v_0$:$S\to[0,1]$都可唯一地扩张成为一个赋值 $v$.

## 3 逻辑公式的可测性

**定义 6**[22,23] 设 $\Omega=\prod_{n=1}^{\infty}X_n(\forall n\in N,X_n=[0,1])$,以 $\mu_n$ 记 $X_n$ 上全有限 Lebesgue 测度,那么 $\mu_n(X_n)=1$;以 $A_n$ 记 $X_n$ 上全体 $\mu_n$ 可测集之族,则 $\prod_{n=1}^{\infty}A_n$ 在 $\Omega$ 上生成一个 $\sigma$-代数 $A$.这时 $\Omega$ 上存在唯一的全可加测度 $\mu$,满足条件:对于 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 中的任一可测集 $E$,知 $E\times\prod_{n=m+1}^{\infty}X_n$ 可测.且有

$$\mu(E\times\prod_{n=m+1}^{\infty}X_n)=\mu_1\times\mu_2\times\cdots\times\mu_m(E),m=1,2,\cdots.$$

称 $\mu$ 为 $\Omega$ 上的乘积测度,测度空间$(\Omega,A,\mu)$常简记为 $\Omega$.

设 $A$ 是 $F(S)$ 中的任一逻辑公式,则 $A$ 是由有限多个原子公式 $p_{i_1},\cdots,p_{i_n}$ 及 $\bar{0}$ 及通过逻辑连接词 $\otimes,\rightarrow,\wedge$ 连接而成.在任给定的逻辑系统中,对公式 $A$ 赋值后,$A$ 就对应一个 $n$ 元函数 $\overline{A}(x_1,\cdots,x_n,0):[0,1]^n\rightarrow[0,1]$.这里 $\overline{A}$ 通过 $\otimes,\rightarrow,\wedge$ 作用于 $x_1,\cdots,x_n,0$ 的方式恰如 $A$ 在 $F(S)$ 中通过 $\otimes,\rightarrow,\wedge$ 作用于 $p_{i_1},\cdots,p_{i_n}$ 及 $\bar{0}$ 的方式.

由于此处只讨论公式在 $\Omega$ 上的可测性,将上述的说明用一种更自然的方法理解,即公式 $A$ 对应测度空间 $\Omega$ 上的单变元函数 $\bar{A}$.

**定义 7**[25]　设 $A\in F(S)$,对于给定的正则蕴涵算子,则 $A$ 唯一地确定一个 $\Omega$ 上的单变元函数,仍记为 $\bar{A}:\Omega\rightarrow[0,1]$,其定义为 $\bar{A}(v)=v(A)$,$\forall v\in\Omega$.

以下我们就来证明公式的可测性,在需要时,我们用记号 $t,a$ 分别表示在 $\Omega$ 上取值恒为 $t,a$ 的常值函数,其中 $t,a\in[0,1]$.

**命题 2**　若 $p,q$ 表示原子公式,则函数 $\bar{p}$,$\overline{p\vee q}$,$\overline{p\wedge q}$ 均为 $\Omega$ 上的可测函数.

具体证明过程可参看文献[22](定理 2).

**定理 1**　若 $\bar{A},\bar{B}$ 为 $\Omega$ 上的可测函数,则形如 $\overline{A\rightarrow B}$,$\overline{A\otimes B}$ 和 $\overline{A\wedge B}$ 的函数也是 $\Omega$ 上的可测函数.

**证明**

(1)$\overline{A\rightarrow B}$ 的可测性.

$\forall t\in[0,1]$,令 $E_t=\{v\in\Omega\mid\overline{(A\rightarrow B)}(v)\geqslant t\}$,下面证明 $E_t$ 为一可测集.由 $v$ 为同态映射及伴随对的性质可知下式成立.

$\overline{(A\rightarrow B)}(v)\geqslant t\Leftrightarrow\bar{A}(v)\rightarrow\bar{B}(v)\geqslant t\Leftrightarrow\bar{A}(v)\geqslant\bar{B}(v)\otimes t$.

那么 $E_t=\{v\in\Omega\mid\bar{A}(v)\geqslant\bar{B}(v)\otimes t\}$.由于 $\bar{B}(v)$ 是从 $\Omega$ 到 $[0,1]$ 的函数,且 $t\in[0,1]$,故 $\bar{B}(v)\otimes t$ 也是从 $\Omega$ 到 $[0,1]$ 的函数.下证其可测,$\forall s\in[0,1]$,令 $E_s=\{v\in\Omega\mid\bar{B}(v)\otimes t\leqslant s\}=\{v\in\Omega\mid\bar{B}(v)\leqslant t\rightarrow s\}$.由于 $\bar{B}(v)$ 是 $\Omega$ 上的可测函数,当 $t,s$ 和 $\rightarrow$ 确定后,$t\rightarrow s$ 就是确定的,从而 $E_s$ 是可测集,故 $\bar{B}(v)\otimes t$ 是可测函数,那么 $E_t$ 就是可测集,最后可得 $\overline{A\rightarrow B}$ 是 $\Omega$ 上的可测函数.

(2)$\overline{A\otimes B}$ 的可测性.

$\forall t\in[0,1]$,令 $E_t=\{v\in\Omega\mid\overline{(A\otimes B)}(v)\leqslant t\}$,下面证明 $E_t$ 为一可测集.由 $v$ 为同态映射及伴随对的性质可知下式成立.

$\overline{(A\otimes B)}(v)\leqslant t\Leftrightarrow\bar{A}(v)\otimes\bar{B}(v)\leqslant t\Leftrightarrow\bar{A}(v)\leqslant\bar{B}(v)\rightarrow t$.

那么 $E_t=\{v\in\Omega\mid\bar{A}(v)\leqslant\bar{B}(v)\rightarrow t\}$.由于 $\bar{B}(v)$ 是从 $\Omega$ 到 $[0,1]$ 的函数,且 $t\in[0,1]$,故 $\bar{B}(v)\rightarrow t$ 也是从 $\Omega$ 到 $[0,1]$ 的函数.下证其可测,$\forall s\in[0,1]$,令 $E_s=\{v\in\Omega\mid\bar{B}(v)\rightarrow t\geqslant s\}=\{v\in\Omega\mid\bar{B}(v)\geqslant t\otimes s\}$.由于 $\bar{B}(v)$ 是 $\Omega$ 上的可测函数,当 $t,s$ 和 $\otimes$ 确定后,$t\otimes s$ 就是确定的,从而 $E_s$ 是可测集,故 $\bar{B}(v)\rightarrow t$ 是可测函数,那么 $E_t$ 就是可测集,最后可得 $\overline{A\otimes B}$ 是 $\Omega$ 上的可测函数.

(3)$\overline{A\wedge B}$ 的可测性显然.

**定理 2**(可测性定理)　在系统 MTL 中,任一逻辑公式 $A$ 所诱导的函数 $\bar{A}$ 都是 $\Omega$ 上的可测函数.

**证明**　因为 $\bar{0}$ 对应 $\Omega$ 上恒取 0 的函数,所以是可测的,又由命题 2 知原子公式是 $\Omega$ 上的可测函数,且定理 1 已证明可测函数之间作用 $\otimes,\rightarrow,\wedge$ 等逻辑运算后仍是 $\Omega$ 上的可测函数,所以由原子公式及真值常元 $\bar{0}$ 经过有限步地作用 $\otimes,\rightarrow,\wedge$ 等逻辑连接词后所得的公式 $A$,它所对应的函数 $\bar{A}$ 一定是 $\Omega$ 上的可测函数.

## 4　逻辑公式集上的逻辑伪度量空间

### 4.1　逻辑伪度量空间

我们知道对于可测集上的有界函数,它的可测性与可积性等价.有了上一节中公式所对应的函数可测性的保证,那么公式所对应的函数也就是 $\Omega$ 上的 Lebesgue 可积函数,从而就可以在所有正则逻辑系统中给公式所对应的函数加以积分运算,从而建立公式的积分真度,如下:

**定义 8**[25]　设 $A\in F(S)$,则称 $\tau_R(A)=(R)\int_{\Omega}\bar{A}\mathrm{d}\omega$ 为 $A$ 的 $R-$真度.(此时 $R$ 为任一正则蕴涵算子$\rightarrow$).

**定义 9**[25]　设 $A,B\in F(S)$,则称 $\xi_R(A,B)=(R)\int_{\Omega}R(\bar{A},\bar{B})\wedge R(\bar{B},\bar{A})\mathrm{d}\omega$ 为 $A$ 与 $B$ 之间的 $(R)$ 积分相似度.

**定义 10**[25]　设 $A,B\in F(S)$,规定 $\rho_R(A,B)=1-\xi_R(A,B)$.

**说明**　逻辑公式间的伪距离 $\rho$ 的概念首次在文献[26]中提出,但其性质只是针对一个 Luk 系统进行研究的.如,证明了伪距离空间中 $(F(S),\rho_L)$ 没有孤立点及相应的逻辑运算的连续性,空间中的这些性质为近似推理提供了可行的框架.文献[27]将同样的思想运用于系统 $L^*$ 中,虽然此系统中蕴涵算子本身不是连续的,但是仍然得到了与文献[24]中类似的结论.受到这一结论的启发,我们不禁要问,什么样的性质或条件可以决定逻辑度量空间具有这些良好的性质,进一步,我们也想弄清楚在什么形式的逻辑系统中可以建立类似的近似推理理论.接下来的内容就尝试回答这一个问题.

下面来判断由以上积分形式所定义的 $\rho$ 是否可以成为所有正则逻辑系统的公式集 $F(S)$ 上的伪距离.

(ⅰ)设 $A,B\in F(S)$,若 $A=B$,则可知 $\xi(A,B)=1$,从而 $\rho(A,B)=0$.但反过来,由 $\rho(A,B)=0$ 却不能推出 $A=B$ 这一结论.

(ⅱ)(对称性)设 $A,B\in F(S)$,由 $\xi$ 的定义可知 $\xi(A,B)=\xi(B,A)$,从而 $\rho(A,B)=\rho(B,A)$.

(ⅲ)(三角不等式)设 $A,B,C\in F(S)$,则有 $\rho(A,

$C)+\rho(B,C)\geqslant\rho(A,B)$.

对于性质(ⅲ),不是所有的正则逻辑系统都能满足,在此我们可以举出一反例进行说明.

**例 1** 由文献[16]可知,只要$(\otimes,\rightarrow)$为一伴随对,且 $n(x)$是$[0,1]$上的弱否定函数,那么我们就可以得到一对新的伴随对$(\otimes_n,\rightarrow_n)$,定义如下:

$$x\otimes_n y=\begin{cases}x\otimes y, & x>n(y)\\ 0, & x\leqslant n(y)\end{cases}$$

$$x\rightarrow_n y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ n(x)\vee(x\rightarrow y), & x>y\end{cases}$$

关于$(\otimes_n,\rightarrow_n)$为伴随对的证明可参见文献[16],此处不再证明.

特别地,我们取$(\otimes,\rightarrow)$为 Lukasiewicz 系统所对应的$(\otimes_L,\rightarrow_L)$,$n(x)=\dfrac{1-x}{1-\frac{1}{2}x}$,这时我们可以验证 $n(x)$不仅是一个弱否定函数,而且还满足 $nn(x)=x$ 的性质,即它是对合对应.

下面我们就验证在取上述情形时,伴随对$(\otimes_n,\rightarrow_n)$所对应的正则逻辑系统不满足三角不等式性质.

取 $A$ 为重言式 $p\rightarrow_n p$, $B$ 为矛盾式 $\neg_n(q\rightarrow_n q)$, $C$ 为 $p\vee q$,那么此时有

$$\begin{aligned}&\rho(A,C)+\rho(B,C)\\&=1-\xi(A,C)+1-\xi(B,C)\\&=2-\{\tau[(A\rightarrow_n C)\wedge(C\rightarrow_n A)]\\&\quad+\tau[(B\rightarrow_n C)\wedge(C\rightarrow_n B)]\}\\&=2-[\tau(C)+\tau(\neg_n C)]\end{aligned}$$

而 $\rho(A,B)=1-\xi(A,B)=1-\tau[(A\rightarrow_n B)\wedge(B\rightarrow_n A)]=1-0=1$.

因为在此特定正则逻辑系统中,$\forall x\in[0,1]$都有 $\neg_n x=n(x)$,由 $n(x)$的定义可知,当 $x\in(0,1)$时,总有 $x+\neg_n x>1$,那么就很容易得到 $\tau(C)+\tau(\neg_n C)>1$ 成立,所以对于这个特定的正则逻辑系统和以上三个所给定的公式 $A,B,C$,它们的关系为 $\rho(A,C)+\rho(B,C)<\rho(A,B)$,即三角不等式性质已不再成立.

下面要研究的系统均满足三角不等式性质,即能构成逻辑度量空间$(F(S),\rho)$的这类正则逻辑系统.

**定义 11** 我们把满足伪距离的三条性质的正则逻辑系统所构成的公式集上伪距离空间$(F(S),\rho)$称为逻辑伪度量空间.

### 4.2 算子的连续性

**定理 3**(算子$\wedge$的连续性) 在逻辑伪度量空间$(F(S),\rho)$中,算子$\wedge$连续,即若 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=A$, $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=B$,则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n\wedge B_n)=A\wedge B$.

**证明** 在剩余格$(L,\otimes,\rightarrow,\wedge,\vee,0,1)$中,$\forall a_1,b_1,a_2,b_2\in L$,有 $a_1\rightarrow b_1\leqslant a_1\wedge a_2\rightarrow b_1$ 且 $a_2\rightarrow b_2\leqslant a_1\wedge a_2\rightarrow b_2$ 成立,所以有

$$\begin{aligned}&(a_1\rightarrow b_1)\wedge(a_2\rightarrow b_2)\\&\leqslant(a_1\wedge a_2\rightarrow b_1)\wedge(a_1\wedge a_2\rightarrow b_2)\\&=a_1\wedge a_2\rightarrow b_1\wedge b_2.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=A$,那么$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, s.t. 当 $n>N_1$ 时有 $\rho(A_n,A)<\dfrac{\varepsilon}{2}$.又因为

$$\begin{aligned}&\rho(A_n\wedge B,A\wedge B)\\&=1-\int_\Omega\overline{(A_n\wedge B\rightarrow A\wedge B)\wedge(A\wedge B\rightarrow A_n\wedge B)}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

由刚在剩余格中得到的结论可知

$$\overline{(A_n\wedge B\rightarrow A\wedge B)}\geqslant\overline{(A_n\rightarrow A)\wedge(B\rightarrow B)}=\overline{(A_n\rightarrow A)};$$

$$\overline{(A\wedge B\rightarrow A_n\wedge B)}\geqslant\overline{(A\rightarrow A_n)\wedge(B\rightarrow B)}=\overline{(A\rightarrow A_n)}.$$

故

$$\begin{aligned}\rho(A_n\wedge B,A\wedge B)&\leqslant1-\int_\Omega\overline{(A_n\rightarrow A)\wedge(A\rightarrow A_n)}\mathrm{d}\omega\\&=\rho(A_n,A)<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

同理,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=B$,则$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_2$, s.t. 当 $n>N_2$ 时有 $\rho(B_n,B)<\dfrac{\varepsilon}{2}$,故可得 $\rho(A_n\wedge B_n,A_n\wedge B)<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

综上可知,若 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=A$, $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=B$,那么$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\max\{N_1,N_2\}$, s.t. 当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}&\rho(A_n\wedge B_n,A\wedge B)\leqslant\rho(A_n\wedge B_n,A_n\wedge B)\\&\quad+\rho(A_n\wedge B,A\wedge B)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n\wedge B_n)=A\wedge B$.结论得证.

**定理 4**(算子$\rightarrow$的连续性) 在逻辑伪度量空间$(F(S),\rho)$中,算子$\rightarrow$连续,即若 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=A$, $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=B$,则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n\rightarrow B_n)=A\rightarrow B$.

**证明** 在剩余格$(L,\otimes,\rightarrow,\wedge,\vee,0,1)$中,恒有下列两式成立:$\forall a,b,c\in L$,

(1) $a\rightarrow b\leqslant(b\rightarrow c)\rightarrow(a\rightarrow c)$;

(2) $b\rightarrow c\leqslant(a\rightarrow b)\rightarrow(a\rightarrow c)$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=A$,可知$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, s.t. 当 $n>N_1$ 时有 $\rho(A_n,A)<\dfrac{\varepsilon}{2}$.又由上面的式(1)知

$$\begin{aligned}&\xi(A_n\rightarrow B,A\rightarrow B)\\&=\int_\Omega\overline{((A_n\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow B))\wedge((A\rightarrow B)\rightarrow(A_n\rightarrow B))}\mathrm{d}\omega\\&\geqslant\int_\Omega\overline{(A_n\rightarrow A)\wedge(A\rightarrow A_n)}\mathrm{d}\omega\\&=\xi(A,A_n)>1-\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

所以,$\rho(A_n\rightarrow B,A\rightarrow B)<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

同理由 $\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=B$,可知$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_2$, s.t. 当 $n>N_2$ 时有 $\rho(B_n,B)<\dfrac{\varepsilon}{2}$.可得 $\rho(A_n\rightarrow B_n,A_n\rightarrow B)<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

综上两点可知:那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = \max\{N_1, N_2\}$, s.t.当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}&\rho(A_n \to B_n, A \to B)\\ &\leqslant \rho(A_n \to B_n, A_n \to B) + \rho(A_n \to B, A \to B)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

故运算→连续,结论得证.

**定理 5**(算子$\otimes$的连续性) 在逻辑伪度量空间$(F(S), \rho)$中,算子$\otimes$连续,即若 $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$, $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = B$,则有 $\lim\limits_{n \to +\infty} (A_n \otimes B_n) = A \otimes B$.

**证明** 在剩余格$(L, \otimes, \to, \wedge, \vee, 0, 1)$中,$\forall a, b, c \in L$,有 $a \to b \leqslant a \otimes c \to b \otimes c$ 成立.

由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$,那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$, s.t.当 $n > N_1$ 时有 $\rho(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$.从而

$$\begin{aligned}&\xi(A_n \otimes B, A \otimes B)\\ &= \int_\Omega \overline{(A_n \otimes B \to A \otimes B) \wedge (A \otimes B \to A_n \otimes B)} \mathrm{d}\omega\\ &\geqslant \int_\Omega \overline{(A_n \to A) \wedge (A \to A_n)} \mathrm{d}\omega = \xi(A, A_n) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

所以 $\rho(A_n \otimes B, A \otimes B) < \frac{\varepsilon}{2}$.同理可知若 $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = B$,那么 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2$, s.t.当 $n > N_2$ 时有 $\rho(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$.从而有 $\rho(A_n \otimes B_n, A_n \otimes B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

综上两点知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = \max\{N_1, N_2\}$, s.t.当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}&\rho(A_n \otimes B_n, A \otimes B)\\ &\leqslant \rho(A_n \otimes B_n, A_n \otimes B) + \rho(A_n \otimes B, A \otimes B)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

故运算$\otimes$连续,结论得证.

**注 6** 由以上的证明过程可以看到逻辑运算的连续性不再依赖于各个系统中逻辑运算的具体表达形式,而仅仅与公式间相似度的定义形式以及构成伪距离空间时的三角不等式性质有关(对于三角不等式性质对于结论成立所起的作用已在以上定理的证明中体现).换句话说,只要一个系统能够建立如此的伪距离空间,那么这个空间本身就已经决定了逻辑算子在这个伪距离意义下的连续性.最后,在近似推理中肯定会用到很多的推理规则,那么我们就在所有这样的逻辑伪度量空间中,证明积分推理规则普遍成立.

**定理 6** 在所有逻辑伪度量空间中,积分推理规则成立.即:对于 $A, B, C \in F(S)$,有

(1)(积分 MP 规则)若 $\tau(A) \geqslant \alpha$, $\tau(A \to B) \geqslant \beta$,那么 $\tau(B) \geqslant \alpha + \beta - 1$;

(2)(积分 HS 规则)若 $\tau(A \to B) \geqslant \alpha$, $\tau(B \to C) \geqslant \beta$,那么 $\tau(A \to C) \geqslant \alpha + \beta - 1$.

**证明** 易知积分 MP 规则是将积分 HS 规则中的公式 $A$ 取为重言式的一种殊情形,故只需证明积分 HS 规则成立,即证明下式成立:

$$\tau(A \to C) + 1 \geqslant \tau(A \to B) + \tau(B \to C).$$

分别以 $a, b, c$ ($a, b, c \in [0,1]$)代表逻辑公式 $A, B, C$ 赋值后的数值,则可以分为六种情形讨论.

(1)当 $a \geqslant b \geqslant c$ 时,有 $1 + a \to c \geqslant a \to b + b \to c$ 成立.

(2)当 $a \geqslant c \geqslant b$ 时,有 $1 + a \to c \geqslant a \to b + 1$ 成立.

(3)当 $b \geqslant a \geqslant c$ 时,有 $a \to c + 1 \geqslant 1 + b \to c$ 成立.

(4)当 $b \geqslant c \geqslant a$ 时,有 $1 + 1 \geqslant 1 + b \to c$ 成立.

(5)当 $c \geqslant b \geqslant a$ 时,有 $1 + 1 \geqslant 1 + 1$ 成立.

(6)当 $c \geqslant a \geqslant b$ 时,有 $1 + 1 \geqslant a \to b + 1$ 成立.

综合以上的六种情况知:

$$1 + \int_\Omega a \to c \geqslant \int_\Omega a \to b + \int_\Omega b \to c$$

即 $\quad \tau(A \to C) + 1 \geqslant \tau(A \to B) + \tau(B \to C)$

定理得证.

## 5 结论

本文主要运用代数的方法,借助于左连续的三角模,对所有正则蕴涵算子对应的逻辑系统进行统一地研究,指出了并不是所有这样的系统都可以建立形式一致的伪距离空间$(F(S), \rho)$,但是凡可以建立如此空间的正则逻辑系统都有个共同的性质,即,在 $\rho$ 的意义下系统中对应的所有的逻辑运算都是连续的,从而就为在此类逻辑系统中建立统一形式的近似推理提供了可行的框架.

**参考文献:**


[1] HAJEK P. Metamathematics of Fuzzy Logic[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[2] HAJEK P. Basic fuzzy logic and BL – algebras[J]. Soft Computing, 1998, 2(3): 124 – 128.

[3] ESTEVA F, GODO L. Monoidal t-norm based logic: towords a logic for left continuous t-norm[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(3): 271 – 288.

[4] GOTTWALD S A. A Treatise on Many-Valued Logic[M]. Baldock: Research Studies Press LTD, 2001.

[5] PAVELKA J. On fuzzy logic I[J]. Z Mathematik Logic Rundlagend Mathematic, 1979, 25(2): 45 – 52.

[6] PAVELKA J. On fuzzy logic II[J]. Z Mathematik Logic Rundlagend Mathematic, 1979, 25(2): 119 – 134.

[7] PAVELKA J. On fuzzy logic III[J]. Z Mathematik Logic Rundlagend Mathematic, 1979, 25(2): 447 – 464.

[8] WANG G J. Formalized theory of general fuzzy reasoning[J]. Information Science, 2004, 160(3): 251 – 266.

[9] YING M S. Reasonableness of the compositional rule of inference[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 36(2): 305 – 310.

[10] FAGIN R, HALPERN J Y, MOSES Y, VARDI M Y. Reasoning about Knowledge[M]. London: MIT Press, 1996.

[11] YING M S. A logic for approximate reasoning[J]. Journal of Symbolic Logic, 1994, 59(3): 830 – 837.

[12] 王国俊,刘华文,等.三 I 方法综述——它的提出,发展,应用和逻辑版本[J].模糊系统与数学,2006,20(6):1 – 14.
WANG G J, LIU H W. A survey of Triple I method—its origin, development, application and logical versions[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(6): 1 – 14. (in Chinese)

[13] SONG S J, FENG C B, LEE E S. Triple I method of fuzzy reasoning[J]. Computer Mathematics with Applications 2002, 44(12): 1567 – 1579.

[14] SONG SJ, FENG C B, WU C. Theory of restriction degree of Triple I method with total inference rules of fuzzy reasoning [J]. Progress in Natual Science, 2001, 11(1): 230 – 246.

[15] JENEI S. How to construct left-continuous triangular norms-state of the art[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 143(1): 27 – 45.

[16] CIGNOLI R, ESTEVA F. On a class of left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 131(3): 283 – 296.

[17] JENEI S, MONTAGNA F. A general method for constructing left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136 (3): 263 – 282.

[18] HAJEK P. Observations on the monoidal t-norm logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 132(1): 107 – 112.

[19] 王国俊.MV-代数,BL-代数,$R_0$-代数与多值逻辑[J].模糊系统与数学,2002,16(2):1 – 15.
WANG Guo-jun. MV-Algebra, BL-Algebra, $R_0$-Algebra and multiple-valued logic[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2002, 16(2): 1 – 15. (in Chinese)

[20] 裴道武.多值逻辑系统中的子代数与广义重言式[J].陕西师范大学学报,2000,28(2):18 – 22.
PEI Dao-wu. Subalgebras and generalized tautologies of many-valued logic systems[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2000, 28(2): 18 – 22. (in Chinese)

[21] C C Chang. Algebraic analysis of many-valued logic[J]. Transaction of American Mathematical Society, 1958, 88(2): 467 – 490.

[22] 王国俊.适用于多种蕴含算子的赋值空间上的测度与积分理论[J].中国科学(E 辑),2001,31(1):42 – 49.
WANG Guo-jun. A universal theory of measure and integral on valuation spaces with respect to diverse implication operations[J]. Science in China (Series E), 2000, 43(6): 586 – 594. (in Chinese)

[23] 王国俊,李璧镜.Lukasiewicz n 值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理[J].中国科学(E 辑),2005,35(6):561 – 569.
LI Bi-jing, WANG Guo-jun. Theory of truth degrees of formulas in Lukasiewicz n-valued propositional logic and a limit theorem[J]. Science in China (Series F), 2005(48): 727 – 736. (in Chinese)

[24] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理[M].北京:科学出版社,2003.
WANG. Guo-jun. Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)

[25] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京:科学出版社,2000.

[26] 王国俊,王伟.逻辑度量空间[J].数学学报,2001,44(1):159 – 168.
WANG Guo-jun, WANG Wei. Logic metric spaces. Acta Mathematics Sinica, 2001, 44(1): 159 – 168. (in Chinese)

[27] 王伟,王国俊.伪度量 $L^*$-Lindenbaum 代数中的基本运算的连续性[J].陕西师范大学学报,2005,33(2):1 – 4.
WANG Wei, WANG Guo-jun. Continuity of basic operations on pseudo-metric $L^*$-Lindenbaum algebra[J]. Jouranl of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2005, 33(2): 1 – 4. (in Chinese)

**作者简介:**

**李璧镜** 女,1981 年 10 月出生于陕西宝鸡,宝鸡文理学院讲师,陕西师范大学数学与信息科学学院博士研究生,主要从事不确定性推理、非经典逻辑方面的研究.
E-mail: lbj2007@163.com

**王国俊** 男,1935 年出生于陕西渭南,陕西师范大学数学与信息科学学院教授,博士生导师,研究方向为非经典数理逻辑、不确定性推理.
E-mail: gjwang@snnu.edu.cn