

从多帧低分辨率图像序列中获取 高分辨率图像的算法研究

邵 凌¹, 丁佩律², 张立明², 胡 波²

(1. IBM 中国研究中心, 北京 100085; 2. 复旦大学电子工程系智能与图像实验室, 上海 200433)

摘 要: 从多帧略有位移的低分辨率图像中产生一帧具有精细结构的高分辨率图像是原来基于单帧插值算法无法解决的问题. 本文提出了一种基于多帧的递归迭代算法, 在得到与传统多帧算法相近效果的同时, 大大节省了计算所需的存储空间. 论文证明了该算法的收敛性, 并得出当使用循环递归迭代时, 可以得到理想的结果. 计算机模拟给出了与理论分析一致的结果.

关键词: 分辨率; 图像插值; 图像超分辨率; 递归速降迭代法 (RSD)

中图分类号: TN919.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 01-0058-04

Algorithm on Extracting High-Resolution Image from Low-Resolution Image Sequence

SHAO Ling¹, DING Pei-lu², ZHANG Li-ming², HU Bo²

(1. IBM China Research Laboratory, Beijing 100085, China;

2. Dept. of Electronic Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: Extracting a high-resolution image from a low-resolution image sequence with displacement solves the image super-resolution problem which is ill-posed to one-frame based interpolation. However it is indispensable to store all low-resolution images for traditional multi-frame based algorithm which can not be implemented in real-time. In this paper, we propose a multi-frame based recursive iteration algorithm which can achieve super-resolution result as good as traditional method but with less memory consumption. The proof of convergence and efficiency of this algorithm is also addressed. Computer simulation gives the result matching with theoretical analysis.

Key words: resolution; image interpolation; image super resolution; recursive steep-descend iteration

1 引言

图像超分辨率 (Image Superresolution), 又称图像插值 (Image Interpolation) 近年来受到了广泛的重视和应用. 最早的方法是在一帧图像上进行线性插值或样条函数插值, 这些方法都隐含图像局部平滑的假设, 插值后图像的高频细节被丢失, 且无唯一解. 1981年 Tsay^[1] 第一次提出了从多帧互有位移的图像序列中插值产生一帧高分辨率图像的概念, 才从本质上解决了图像超分辨率无唯一解的问题. Kim^[2] 将 Tsay 和 Huang 建立在频域上的算法模型扩展到包含噪声的情况. M. Irani^[3] 提出了迭代背向投影算法 (Iterative back-projection) IBP 算法. 这种算法运算量小, 收敛速度较快, 是目前为止最有实用意义的方法之一. Stark^[4] 从集投影理论发展出凸集投影算法 POCS, 加快了求解的速度, 但是一些非线性约束条件的加入会影响算法的收敛性. Tekalp^[5] 发展了 POCS 方法, 使之适用于更广泛的超分辨率模型. Schultz^[6] 提出了基于 Bayesian 估计

的多帧图像超分辨率算法, 提高了超分辨率图像的质量, 缺点是模型复杂, 计算量大. 但是无论何种算法, 在计算时都要求存储所有的低分辨率图像和相应的观察矩阵, 以下我们统称为批处理方法. 考虑到实际图像的大小和图像序列的帧数, 上述算法不太适用于硬件条件有限的应用. 本文基于节省存储空间的考虑, 提出了一种串行的迭代算法, 在达到与传统批处理方法相近效果和复杂度的同时, 节省了所需的存储空间. 论文证明了该算法的收敛性和有效性, 并给出了计算机模拟的结果.

2 多帧图像超分辨率问题的数学模型

设待恢复的高分辨率图像为 $I \in R^{N \times N}$, 将 I 从行方向堆叠 (stack) 得到的矢量记为 $X \in R^{N^2 \times 1}$. 定义第 i 帧观察得到的低分辨率图像为 $y_i \in R^{M \times M}$, $M < N$, 同样从行方向堆叠得到的矢量记为 $Y_i \in R^{M^2 \times 1}$. Y_i 和 X 的关系见图 1.

收稿日期: 2000-06-19; 修回日期: 2001-09-01

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 39870194)

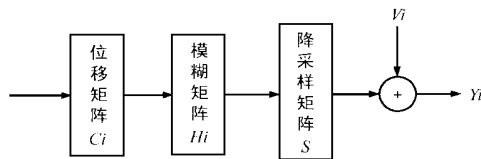


图 1 矩阵表示的采样过程

其中位移矩阵 $C_i \in R^{N^2 \times N^2}$ 表示第 i 次采样时图像 X 的位移变化, $H_i \in R^{N^2 \times N^2}$ 表示第 i 次采样时的图像模糊效应, 如果图像模糊效应平移不变, 则 H_i 矩阵是分块的 Toeplitz 阵. 降采样矩阵 $S \in R^{M^2 \times N^2}$ 表示从超分辨率图像 X 到低分辨率图像 Y_i 的降采样关系. 噪声矢量 V_i 是采样过程中各种噪声的总和, 假设为零均值的高斯白噪声. Y_i 可以写成:

$$Y_i = SH_i C_i X + V_i, i = 1, 2, \dots, L \quad (1)$$

$$L \text{ 为低分辨率图像的帧数. 如果定义 } \bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_L \end{bmatrix} \in R^{LM^2 \times 1}, \bar{H} = \begin{bmatrix} SH_1 C_1 \\ SH_2 C_2 \\ \vdots \\ SH_L C_L \end{bmatrix} \in R^{LM^2 \times N^2}, \bar{X} = X, \bar{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_L \end{bmatrix} \in R^{LM^2 \times 1} \text{ 则式 (1) 可以写成}$$

$$\bar{Y} = \bar{H}\bar{X} + \bar{V} \quad (2)$$

式(2)是考虑了各种实际情况后的通用数学模型. 这样将基于多帧超分辨率重建转化为解线性方程组. 传统的伪逆及批处理迭代法都需要存储 $\bar{Y} \in R^{LM^2 \times 1}$ 和 $\bar{H} \in R^{LM^2 \times N^2}$, 当图像尺寸较大时, 存储空间消耗过大而无法实用. 下面我们从节省存储空间的角度出发, 提出了一种递归的最速下降迭代算法, 只要存储当前帧图像 $Y_i \in R^{M^2 \times 1}$ 和相应的观察矩阵 $\bar{H}_i \in R^{M^2 \times N^2}$ 即可.

3 基于多帧图像的递归迭代算法

3.1 递归的最速下降迭代法 RSD

对于式(2), 一般的最速下降迭代法为:

$$\begin{aligned} (1) & \text{初始值 } X_0 \text{ 任意} \\ (2) & X^{k+1} = X^k + \bar{H}^T (\bar{Y} - \bar{H}X^k) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\bar{Y} \in R^{LM^2 \times 1}$, $\bar{H} \in R^{LM^2 \times N^2}$, 为步长, $LM^2 > N^2$.

而我们的 RSD 算法可以写为:

$$\begin{aligned} (1) & \text{初始值 } X_0 \text{ 任意} \\ (2) & X_i^{k+1} = X_i^k + \bar{H}_i^T (Y_i - \bar{H}_i X_i^k) \\ (3) & X_{i+1}^0 = X_i, i = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $Y_i \in R^{M^2 \times 1}$ 表示第 i 帧采样图像, L 为采样图像数, $\bar{H}_i \in R^{M^2 \times N^2}$ 表示与第 i 帧低分辨率图像相对应的观察矩阵, $\bar{H}_i = SH_i C_i$. X_i^k 表示使用第 i 帧低分辨率图像进行 k 次迭代后, 高分辨率图像的估计值. 式(4)表示对于当前输入的第帧低分辨率图像, 我们使用最速下降迭代法求解高分辨率图像的估计

值, 其中 α 是迭代系数. 式(5)表示对于下一帧输入的低分辨率图像, 我们将上一帧迭代的结果作为其迭代的初始值. 依次类推从第一帧处理到最后帧. 但是这样的迭代方式能保证其收敛性吗? 以下我们就证明这一点.

3.2 RSD 算法的收敛性和有效性

首先, 关于批处理迭代式(3)的收敛性, 我们有定理 1.

定理 1 对于迭代式(3), 如果噪声均值为零且矩阵 $\bar{H}^T \bar{H}$ 满秩, 则可以选择适当的迭代系数 α , 使它当迭代次数 k 时收敛于方程(2)的解.

证明 设 X^* 为方程(2)的正确解, X^k 是第 k 次迭代的估计值, 第 k 次迭代的误差为 $e^k = X^* - X^k$, 由(3)式得

$$\begin{aligned} e^{k+1} &= X^* - X^{k+1} = X^* - \bar{H}^T (\bar{Y} - \bar{H}X^k) \\ &= (I - \bar{H}^T \bar{H}) e^k - \bar{H}^T V \end{aligned} \quad (6)$$

考虑到 $E[V] = 0$, 平均迭代误差可以写成

$$E[e^{k+1}] = (I - \bar{H}^T \bar{H})^{k+1} E[e^0] \quad (7)$$

由于 $\bar{H}^T \bar{H}$ 满秩, 可以选择 α 使 $I - \alpha \bar{H}^T \bar{H} < I$, 从而 $\lim_k E[e^k] = 0$, 式(3)收敛于 X^* . 证毕.

对于递归迭代式(4)和(5), 我们用类似的方法表示迭代误差, 设 X^* 是(2)式的正确解, 第 i 帧采样图像的第 k 次迭代的误差为 $e_i^k = X^* - X_i^k$. 由(4)可得, 当前帧的平均迭代误差为

$$E[e_i^{k+1}] = (I - \bar{H}_i^T \bar{H}_i)^{k+1} E[e_i^0] \quad (8)$$

由于 \bar{H}_i 中包含了降采样因子, 所以 $\bar{H}_i^T \bar{H}_i$ 不满秩, 即无法找到合适的 α 使迭代误差趋向于零. 那误差到底是多少, 能否收敛? 我们有定理 2.

定理 2 对于第 i 帧输入图像按式(4)进行迭代, 若噪声均值为零但矩阵 $\bar{H}_i^T \bar{H}_i$ 不满秩时, 则可选择适当迭代系数 α , 使其收敛, 且 $\lim_k E[e_i^k] = P_i E[e_i^0]$, 其中 $E[e_i^0]$ 为第 i 帧图像迭代时的平均初始误差, P_i 为一个正交投影算子.

证明 设 \bar{H}_i 秩为 r ($r < N$), 非零奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$. 显然 $\bar{H}_i^T \bar{H}_i = V_i \begin{bmatrix} S_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V_i^T$, 其中 V_i 为单位正交阵, $S_i^2 = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2)$, 所以

$$I - \alpha \bar{H}_i^T \bar{H}_i = V_i V_i^T - \alpha \bar{H}_i^T \bar{H}_i = V_i M_i V_i^T \quad (9)$$

其中 $M_i = \begin{bmatrix} I - \alpha S_i^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. 将式(9)代入式(8), 并考虑到 $V_i M_i V_i^T V_i M_i V_i^T = V_i M_i^2 V_i^T$, 可得

$$E[e_i^{k+1}] = (V_i M_i V_i^T)^{k+1} E[e_i^0] = V_i M_i^{k+1} V_i^T E[e_i^0] \quad (10)$$

将 V_i 写成分块矩阵形式 $V_i = [V_{i1} \ V_{i2}]$, 则式(10)可进一步化为

$$\begin{aligned} E[e_i^{k+1}] &= V_i M_i^{k+1} V_i^T E[e_i^0] = [V_{i1} \ V_{i2}] \begin{bmatrix} (I - \alpha S_i^2)^{k+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i1}^T \\ V_{i2}^T \end{bmatrix} E[e_i^0] \\ &= V_{i1} (I - \alpha S_i^2)^{k+1} V_{i1}^T E[e_i^0] + V_{i2} V_{i2}^T E[e_i^0] \end{aligned} \quad (11)$$

即迭代的平均误差可以分成两项, 其中第一项只要选择适当的系数 α 就会随着 k 的增加而单调减小, 第二项是与迭代无关的常量.

所以当 α 满足 $I - \alpha S_i^2 < I$ 时, 迭代将收敛, 且

$$\lim_k E[e_i^k] = V_{i2} V_{i2}^T E[e_i^0] \quad (12)$$

观察 $V_{i2} V_{i2}^T$, 可以发现它满足

$$(a) \quad (V_{i2} V_{i2}^T)^T = V_{i2} V_{i2}^T$$

$$(b) \quad (V_{i2} V_{i2}^T)^2 = V_{i2} V_{i2}^T V_{i2} V_{i2}^T = V_{i2} I V_{i2}^T = V_{i2} V_{i2}^T$$

所以它是一个正交投影算子, 记为 P_i , 代入式 (12) 可以得到

$$\lim_k E[e_i^k] = P_i E[e_i^0] \quad (13)$$

证毕.

对于整个迭代过程, 由式 (5) 和 (13) 可得 $E[e_{i+1}^0] = E[X^* - X_{i+1}^0] = E[X^* - X_i] = P_i E[e_i^0]$, 于是对于一组图像按顺序进行递归迭代的平均残留误差为

$$\lim_k E[e_{i+1}^k] = P_{i+1} E[e_{i+1}^0] = P_{i+1} P_i E[e_i^0] = \dots = P_{i+1} P_i \dots P_1 E[e_1^0] \quad (14)$$

因此 RSD 算法的迭代过程, 可以看成是对误差空间不断进行正交投影的过程. 由于正交投影满足 $Px \leq x$, 所以在整个迭代的过程中误差矢量的范数只可能减少, 而不会导致发散, 所以 RSD 算法是收敛的.

同时我们看到递归迭代算法无法使误差趋向于 0, 但定理 3 将表明通过选择适当的迭代方式, 它也能得到令人满意的结果. 首先给出循环投影引理.

循环投影定理 设 L_1, L_2, \dots, L_k 为 C^n 的任意 k 个线性子空间, $k \geq 2$, 且设 $Q = P_k P_{k-1} \dots P_2 P_1 P_2 \dots P_{k-1} P_k$, 其中 $P_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 是从 C^n 到 L_i 的正交投影算子. 则从 C^n 到 $\bigcap_{i=1}^k L_i$ 上的正交投影算子是 $\lim_m Q^m$. 证明见附录

定理 3 对于一组 L 帧低分辨率图像, 采用无穷循环迭代方式(首先按运动图像采样的先后次序进行迭代, 然后按反向次序迭代一遍), 则它对于误差矢量的效果等效于一个正交投影算子, 且这个正交投影算子的值域等于各单帧的正交投影值域的交集.

证明 由定理 2 可得循环迭代的平均误差为

$$E[e_L] = P_1 P_2 \dots P_{L-1} P_L P_{L-1} \dots P_2 P_1 E[e_1^0] \quad (15)$$

考虑到 $P_i (i = 1, 2, \dots, L)$ 都是正交投影算子, 且次序满足循环投影引理中的条件, 所以由循环投影引理, 结论是显然的. 证毕

推论 如果一组采样图像对应于一组投影 $P_i (i = 1, 2, \dots, k)$, 它们值域的交集 $\bigcap_{i=1}^k L_i$ 是空集, 则上述循环迭代的结果是使误差趋向于零.

定理 3 及其推论说明了循环迭代的有效性, 至于一般的顺序迭代则没有该性质. 因为一般而言两个正交投影的迭加不是正交投影, 即两个正交投影迭加的值域不是它们值域的交集. 实验结果也表明, 只要 1 到 2 次循环, 循环 RSD 算法就非常接近传统批处理算法的效果, 比顺序 RSD 算法的效率要高.

4 计算机模拟实验结果

我们利用坐标变换和内插将一帧高分辨率图像旋转多个角度后, 进行低通滤波和降采样, 从而得到一组略有旋转的低分辨率图像用来检验本文算法的重建效果. 这里以 Bottle 图

像为例, 因为该图高频细节丰富, 将 256×256 的 Bottle 图像依次旋转 $0^\circ, 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ$ 后降采样得到 4 帧的低分辨率图像, 在此基础上进行重建, 一般每帧图像迭代 10 - 20 次就能达到令人满意的效果. 图 2 ~ 图 7 是各种方法插值的结果, 表 1 是各种方法 PSNR 的比较. 从中可以发现, 基于多帧的效果比传统帧内插值的效果好得多, 其中循环递归迭代的效果强于顺序递归迭代的结果, 并与 IBP 算法的结果接近. 表 2 为本次实验中 IBP 算法和递归迭代算法所需存储空间的比较. 从中可以发现, 递归迭代算法所需的存储空间是 IBP 算法的一半, 需要说明的是两者所需的计算时间基本相同. 虽然我们只和 IBP 算法进行了比较, 但是对于其他基于多帧的批处理算法也有同样的结论, 而且参与计算的低分辨率图像越多, 递归算法节省存储空间的效果越明显.



图 2 理想的高分辨率图像



图 3 双线性插值的结果



图 4 三次样条函数插值的结果



图 5 IBP 算法



图 6 循环递归迭代算法

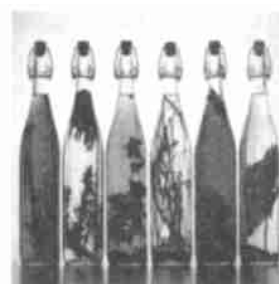


图 7 顺序递归迭代算法

表 1 各种方法恢复效果的客观评价

算法名称	PSNR (dB)
双线性插值	20.0875
三次样条插值	20.4507
IBP 迭代算法(有初值)	25.4036
循环递归迭代算法(有初值)	25.2339
顺序递归迭代算法(有初值)	24.7601

表 2 IBP 算法和 RSD 算法所需存储空间比较

	IBP 算法	递归 SD 算法
观察矩阵系数的存储空间	354,496 字节	98,804 字节
低分辨率图像的存储空间	65,536 字节	16,384 字节
等效高分辨率图像的存储空间	131,072 字节	131,072 字节
总计	551,104 字节	246,260 字节

5 结论

本文对基于多帧的图像插值方法进行了研究,从节省存储空间的角度提出了基于帧处理的 RSD 迭代算法,并证明了它的收敛性和循环迭代的有效性.计算机模拟结果表明它能够达到与传统批处理算法相近的效果,而所需的存储空间比传统批处理算法小许多,具有很高的实用意义.

附录 循环投影引理的证明

证明:(1) 设 $A = \lim_m Q^m$, 首先证 A 是一个正交投影算子.

(a) 根据 Q 的定义,显然 $Q = Q^T$, 即 Q 是对称阵,所以 $A = \lim_m Q^m$ 是对称阵

(b) 又设 Q 的特征值为 $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m \geq 0$, 因为

$$Q = P_k P_{k-1} \dots P_2 P_1 P_2 \dots P_{k-1} P_k$$

$$\leq P_k \cdot P_{k-1} \dots P_2 \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_{k-1} \cdot P_k = 1$$

所以 $|q_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m$. 因为 Q 是对称阵,所以可以将 Q 写成

$$Q = V S V^T, \text{ 其中 } S = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_m), V \text{ 是单位正交阵}$$

$$V^T V = I.$$

$$Q^m = \underbrace{V S V^T \cdot V S V^T \cdot \dots \cdot V S V^T}_m = V S^m V^T = V \text{diag}(q_1^m, q_2^m, \dots, q_m^m) V^T$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时, $q_i^m \rightarrow \begin{cases} 0, & |q_i| < 1 \\ 1, & |q_i| = 1 \end{cases}$, 即 A 的特征值非 0 即 1, 所以 A 是一个投影算子.

根据 (a), (b) 可得 A 是一个正交投影算子.

(2) 设 $R = \mathfrak{M}(A)$ 表示 A 的值域, 证明 $R = \bigcup_{i=1}^k L_i$

(a) 对于 $\forall x \in \bigcup_{i=1}^k L_i$, 因为 $P_i x = x, i = 1, 2, \dots, k$, 推出 $Qx = x$, 所以 $Ax = x$,

即 $x \in R$, 所以 $\bigcup_{i=1}^k L_i \subset R$.

(b) 对于 $\forall x \in R$, 若 $x \in \bigcup_{i=1}^k L_i$, 则 $R \subset \bigcup_{i=1}^k L_i$, 考虑到 (a), $R = \bigcup_{i=1}^k L_i$ 得证.

若 $x \notin \bigcup_{i=1}^k L_i$, 则必然存在集合 $B = \{P_i | P_i x \neq x, 1 \leq i \leq k\}$, 且 B 为不空. 设 $P_s \in B$, 且 P_s 是 B 中下标最大的元素, 即 $P_i x = x, s < i \leq k$. 由于 P_s 是正交投影, 所以 $P_s x \leq P_s \cdot x = x$, 等号当且仅当 $P_s x = x$ 时成立. 由于 $P_s x \neq x$, 所以 $P_s x < P_s \cdot x = x$. 考察 Qx

$$Qx = P_k \dots P_s \dots P_2 P_1 P_2 \dots P_s \dots P_k x = P_k \dots P_2 P_1 P_2$$

$$\dots P_s P_{s+1} \dots P_k x$$

$$= P_k \dots P_2 P_1 P_2 \dots P_s x \leq P_k \dots P_2 P_1 P_2 \dots P_{s-1} \cdot P_s x$$

$$\leq P_s x < x$$

$$\text{又 } Q \leq 1, Q^m x \leq Q^{m-1} \cdot Qx \leq Qx < x, Ax \leq Q^m x < x$$

$x \in R$, 且 A 是正交投影, $Ax = x, Ax = x$, 这和上面的推导矛盾.

所以 $\forall x \in R, x \in \bigcup_{i=1}^k L_i$, 综合 (a), (b) 可得 $R = \bigcup_{i=1}^k L_i$, 命题得证.

参考文献:

- [1] T S Huang, R Y Tsay. Multi frame image restoration and registration [A]. in Advances in Computer Vision and Image Processing [C], Greenwich, CT: JAI, 1984: 317 - 339.
- [2] S P Kim, N K Bose, H M Valenzuela. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframes [J]. IEEE Trans. on ASSP, 1990, 38(6): 1013 - 1027.
- [3] M Irani, S Peleg. Improving resolution by image registration [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1991, 53(5): 231 - 239.
- [4] H Stark, P Oskoui. High-resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections [J]. Journal of the Optical Society of America A, 1989, 6(11): 1715 - 1726.
- [5] A J Patti, M I Sezan, A M Tekalp. High-resolution image reconstruction from a low-resolution image sequence in the presence of time-varying motion blur [A]. Proc. of the IEEE International Conference on Image Processing [C], Austin, TX, 1994: F343 - 347.
- [6] R R Schultz, R L Stevenson. Extraction of high-resolution frames from video sequences [J]. IEEE Trans. on Image Processing, 1996, 5(6): 996 - 1011.
- [7] M Elad, A Feuer. Restoration of a single superresolution image from several blurred, noisy and undersampled measured images [J]. IEEE Trans. on Image Processing, 1997, 6(12): 1646 - 1657.

作者简介:



邵 凌 男. 2000 年复旦大学电子工程系硕士毕业, 现为 IBM 中国研究中心研究员. 主要研究方向为数字图像、视频处理.



丁佩律 男. 1999 年复旦大学电子工程系毕业, 现为复旦大学电子工程系在读硕士. 主要研究方向为模式识别、数字图像处理.