

# 一种变步长 LMS 自适应滤波算法及分析

高 鹰, 谢胜利

(华南理工大学电子与通信工程系, 广东广州 510641)

**摘 要:** 本文对变步长自适应滤波算法进行了讨论, 建立了步长因子  $\mu$  与误差信号  $e(n)$  之间另一种新的非线性函数关系. 该函数比已有的 Sigmoid 函数简单, 且在误差  $e(n)$  接近零处具有缓慢变化的特性, 克服了 Sigmoid 函数在自适应稳态阶段步长调整过程中的不足. 由此函数本文得出了另一种新的变步长自适应滤波算法, 并且分析了参数的取值原则及对算法收敛性能的影响. 该算法有较好的收敛性能且计算量少. 计算机仿真结果与理论分析相一致, 证实了该算法的收敛性能优于已有的算法.

**关键词:** 自适应滤波; 变步长自适应滤波算法; LMS 算法

**中图分类号:** TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 08-1094-04

## A Variable Step Size LMS Adaptive Filtering Algorithm and Its Analysis

GAO Ying, XIE Sheng-li

(Dept. of Electronic and Communication Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510641, China)

**Abstract:** This paper discusses about some algorithms of variable step size LMS adaptive filtering and establishes another new non-linear functional relationship between  $\mu$  and  $e(n)$ . The functional relationship is not only simpler than Sigmoid functional relationship, but also has the property of slight change  $e(n)$  near to zero. Therefore it is superior to Sigmoid functional relationship in the process of step size change of adaptive steady state. On the basis of the functional relationship, The author presents the new algorithm of variable step size LMS adaptive filtering and analyses the algorithm with various  $\mu$  and  $e(n)$ . the algorithm has less computational complexity than the former algorithms, besides good convergence properties. Computer simulation results confirms the theoretical analysis and shows the algorithm performance is better than that of former algorithms.

**Key words:** adaptive filtering; variable step size adaptive filtering algorithm; LMS algorithm

### 1 引言

自适应技术广泛地应用于自适应控制、雷达、系统辨识和信号处理等领域. 由 Widrow 和 Hoff 提出的最小均方误差 (LMS) 算法, 因其具有计算量小、易于实现等优点而被广泛采用. 图 1 为自适应滤波器原理框图.

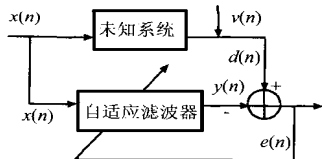


图 1 为自适应滤波器原理框图

基于最速下降法的最小均方误差 (LMS) 算法的迭代公式如下:

$$e(n) = d(n) - X^T(n) W(n);$$

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n) X(n)$$

其中:  $W(n)$  为自适应滤波器在时刻  $n$  的权矢量,  $X(n)$  为时刻  $n$  的输入信号矢量,  $d(n)$  为期望输出值,  $v(n)$  为干扰信号,  $e(n)$  是误差信号,  $L$  是自适应滤波器的长度,  $\mu$  是步长因

子. LMS 算法收敛的条件为:  $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$ ,  $\lambda_{\max}$  是输入信号自相关矩阵的最大特征值.

初始收敛速度、时变系统跟踪能力及稳态失调是衡量自适应滤波算法优劣的三个最重要的技术指标. 文献 [1][6] 分析了最小均方误差 (LMS) 算法的收敛性能. 由于主输入端不可避免地存在干扰噪声, LMS 算法将产生参数失调噪声. 干扰噪声  $v(n)$  越大, 则引起的失调噪声就越大. 减少步长因子  $\mu$  可减少自适应滤波算法的稳态失调噪声, 提高算法的收敛精度. 然而步长因子  $\mu$  的减少将降低算法的收敛速度和跟踪速度. 因此, 固定步长的自适应滤波算法在收敛速度、时变系统跟踪速度与收敛精度方面对算法调整步长因子  $\mu$  的要求是相互矛盾的. 为了克服这一矛盾, 人们提出了许多变步长自适应滤波算法. R. D. Gitlin<sup>[2]</sup> 曾提出了一种变步长自适应滤波算法, 其步长因子  $\mu(n)$  随迭代次数  $n$  的增加而逐渐减小. 文 [3] 提出了使步长因子  $\mu$  正比于误差信号  $e(n)$  的大小. 而文

收稿日期: 2000-04-12; 修回日期: 2000-08-22

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 69972016)、广东省自然科学基金 (No. 990892)、广东省优秀人才基金 (教研 [2000] 69 号)

[4]提出了一种时间平均估值梯度的自适应滤波算法.文[5]提出了另一种变步长自适应滤波算法,步长因子  $\mu$  与  $e(n)$  和  $x(n)$  的互相关函数的估值成正比.

在分析了上述变步长自适应滤波算法之后,文[6]提出了变步长自适应滤波算法的步长调整原则:即在初始收敛阶段或未知系统参数发生变化时,步长应比较大,以便有较快的收敛速度和对时变系统的跟踪速度;而在算法收敛后,不管主输入端干扰信号  $v(n)$  有多大,都应保持很小的调整步长以达到很小的稳态失调噪声.根据这一步长调整原则,该文给出了 Sigmoid 函数变步长 LMS 算法(SVSLMS):

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - X^T(n)W(n); \\ \mu(n) &= (1/(1+\exp(-|e(n)|)) - 0.5); \\ W(n+1) &= W(n) + 2\mu(n)e(n)X(n). \end{aligned}$$

其变步长  $\mu$  是  $e(n)$  的 Sigmoid 函数:

$$\mu(n) = (1/(1+\exp(-|e(n)|)) - 0.5)$$

该算法能同时获得较快的收敛速度、跟踪速度和较小的稳态误差.然而,该 Sigmoid 函数过于复杂,且在误差  $e(n)$  接近零处变化太大,不具有缓慢变化的特性,使得 SVSLMS 算法在自适应稳态阶段仍有较大的步长变化,这是该算法的不足.本文给出另一满足步长调整原则的函数:即变步长  $\mu$  是  $e(n)$  的如下函数: $\mu(n) = (1 - \exp(-|e(n)|^2))$ ,其中,参数  $\alpha > 0$  控制函数的形状,参数  $\beta > 0$  控制函数的取值范围; $\mu(n)$  和  $e(n)$  的函数曲线如图 2,图 3 所示.该函数比 Sigmoid 函数简单,且在误差  $e(n)$  接近零处具有缓慢变化的特性,克服了 Sigmoid 函数在自适应稳态阶段步长调整过程中的不足.同时,本文还分析了参数  $\alpha$ ,  $\beta$  取值原则及对算法收敛性能的影响.

## 2 新的变步长 LMS 自适应滤波算法及分析

根据文[6]提出的变步长自适应滤波算法的步长调整原则,本文提出的变步长自适应滤波算法如下:

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - X^T(n)W(n); \\ \mu(n) &= (1 - \exp(-\alpha|e(n)|^2)); \\ W(n+1) &= W(n) + 2\mu(n)e(n)X(n) \end{aligned}$$

由  $\mu(n)$  和  $e(n)$  的函数关系曲线图 2,图 3 可知:初始收敛阶段  $|e(n)|$  较大,对应  $\mu(n)$  较大,算法收敛速度较快.当算法进入稳态时,  $|e(n)|$  达到最小,此时  $\mu(n)$  也达到最小,由此得到最佳 Wiener 解.

我们知道,LMS 自适应滤波算法的收敛条件是:  $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$ ,  $\lambda_{\max}$  是输入信号自相关矩阵的最大特征值.因此  $\mu(n)$  应满足:  $0 < \mu(n) < 1/\lambda_{\max}$ ,由此可得  $\alpha < 1/\lambda_{\max}$ .在此条件下,算法一定收敛.但并不是满足  $\alpha < 1/\lambda_{\max}$  条件的任意  $\alpha$ 、 $\beta$  都能使算法在初始收敛阶段  $\mu(n)$  较大而在算法收敛后  $\mu(n)$  较

小.例如:假设初始收敛阶段  $|e(n)|$  的值为 0.5 左右,若选择  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.2$ (见图 2)或  $\alpha = 8$ ,  $\beta = 0.02$ (见图 3),则  $|e(n)|$  对应的  $\mu(n)$  小,此时算法起不到在初始收敛阶段步长应比较大加速收敛的作用;而选择  $\alpha = 7$ ,  $\beta = 0.2$ (见图 2)或  $\alpha = 8$ ,  $\beta = 0.1$ (见图 3),则  $|e(n)|$  对应的  $\mu(n)$  大,此时  $\mu(n)$  满足变步长自适应滤波算法在初始收敛阶段应有较大的步长这一要求,起到加速收敛的作用.因此,  $\alpha$ 、 $\beta$  值的选取应遵循以下原则:根据初始误差  $|e(n)|$  值的大小来选择  $\alpha$ 、 $\beta$  的值使得初始误差  $|e(n)|$  所对应的  $\mu(n)$  的值尽可能大些(当然是在满足算法收敛的前提下).

由图 2 还可知:对于相同的初始误差,固定  $\beta$  ( $\beta < 1/\lambda_{\max}$ ),此时算法收敛,选择较大的  $\alpha$  值算法的收敛速度比选择较小的  $\alpha$  值快.如果选取的  $\alpha$  值过大,算法的收敛速度提高了,但是算法收敛后的误差  $|e(n)|$  所对应的  $\mu(n)$  可能还较大,此时算法的稳态误差较大.如果对收敛速度有较高要求的话,应选择大的  $\alpha$  值;如果对稳态误差有较高要求的话,选择的  $\alpha$  值不能过大.在具体的实际应用中,可通过实验来确定的最优值.

由图 3 可知:对于相同的初始误差,固定  $\alpha$ ,选择较大的  $\beta$  值算法的收敛速度比选择较小的  $\beta$  值快( $\beta < 1/\lambda_{\max}$ ).

下面的计算机模拟仿真结果证实了以上分析.

## 3 计算机模拟仿真结果及分析

下面通过计算机模拟来检验和分析我们给出的变步长 LMS 自适应滤波算法的收敛性能以及  $\alpha$ 、 $\beta$  值对算法收敛性能的影响.仍然采用文[6]中的计算机模拟条件:(1)自适应滤波器阶数  $L = 2$ ;(2)未知系统的 FIR 系数为  $W^* = [0.8, 0.5]^T$ ,在第 500 个采样点时刻未知系统发生突变,系数矢量变为  $W^* = [0.4, 0.2]^T$ ;(3)参考输入信号  $x(n)$  是零均值,方差为 1 的高斯白噪声;(4)  $v(n)$  为与  $x(n)$  不相关的高斯白噪声,其均值是零,方差为  $\sigma_v^2 = 0.04$ .分别做 200 次独立的仿真,采样点数为 1000,然后求其统计平均,得出学习曲线.

图 4 是  $\alpha = 0.1$  固定,不同  $\beta$  值的算法收敛曲线,从图 4 中可以看到,随着  $\beta$  值的增大,算法的收敛速度逐渐提高.

图 5 是  $\beta = 0.1$  固定,不同  $\alpha$  值的算法收敛曲线,从图 5 中可以看到,随着  $\alpha$  值的增大,算法的收敛速度逐渐提高.

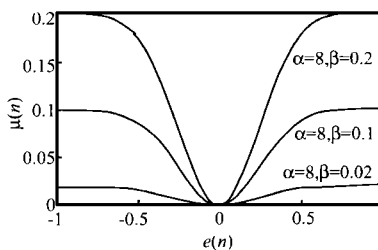


图 3  $\mu(n)$  与  $e(n)$  的关系曲线( $\alpha$  相同,  $\beta$  不同)

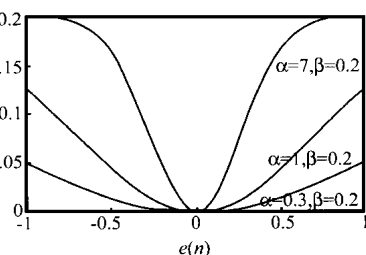


图 2  $\mu(n)$  与  $e(n)$  的关系曲线( $\beta$  相同,  $\alpha$  不同)

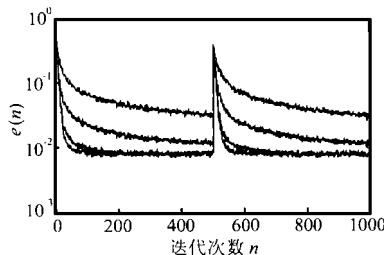
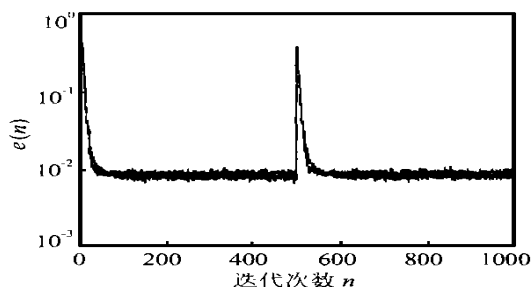


图 4 固定  $\alpha$ , 不同  $\beta$  值的算法收敛曲线

图5 固定,  $\mu = 300, 20000$  的算法收敛曲线

虽然  $\mu = 0.1$  固定, 随着  $\mu$  的增大, 算法的收敛速度逐渐提高, 但过大的  $\mu$  值增加了算法的稳态误差. 在实际应用中, 为了获得较快的收敛速度, 应选择较大的  $\mu$  值; 为了使收敛精度较高, 则选择的  $\mu$  值不能过大. 在本文的实验条件下, 最优值约为 300.

图6是  $\mu = 300$  固定, 不同值  $\mu$  的算法收敛曲线, 从上到下的四条曲线对应的值依次为: 0.01, 0.02, 0.05, 0.2, 随着  $\mu$  的增大 ( $\mu < 1/\mu_{\max}$ ), 算法的收敛速度逐渐提高. 在本文的实验条件下, 若选择的  $\mu$  值大于 0.3, 算法发散; 若选择的  $\mu$  值在 (0.2, 0.3) 之间, 算法有时候会出现不收敛的情况, 最优  $\mu$  值约为 0.2.

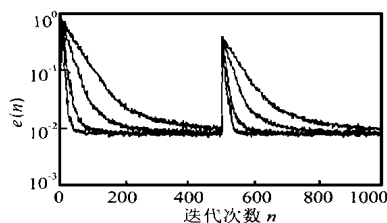
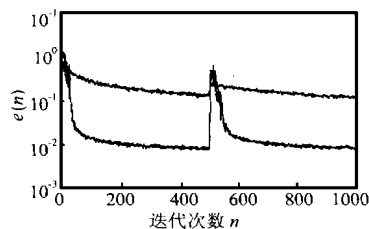
图6 固定, 不同值  $\mu$  的算法收敛曲线

图7是两组不同的  $\mu$  值的算法收敛曲线, 上面一条曲线对应的  $\mu = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ , 由于选取的  $\mu$  使得初始误差  $|e(n)|$  所对应的  $\mu(n)$  的值太小, 故算法收敛缓慢. 下面一条曲线对应的  $\mu = 9$ ,  $\mu = 0.3$ , 此时选取的

图7 两组不同的  $\mu$  值的算法收敛曲线

、 $\mu$  值使得初始误差  $|e(n)|$  所对应的  $\mu(n)$  的值较大, 满足变步长自适应滤波算法的步长调整原则. 故算法有较好的收敛性能. 这也与上面的分析相一致.

#### 4 和其它变步长算法的收敛曲线比较

文[6]提出了变步长自适应滤波算法的步长调整原则, 根据这一步长调整原则, 该文给出了 Sigmoid 函数变步长 LMS 算法 (SVSLMS), 但该文没有分析  $\mu$ 、如何取值. 图8是本文算法和 SVSLMS 算法收敛曲线比较 (该文实验条件下), 上面一条曲线是  $\mu = 1.0$ ,  $\mu = 1.5$  (该文算法最佳值) 时的 SVSLMS 算法收敛曲线, 下面一条曲线是  $\mu = 20$ ,  $\mu = 0.2$  时的本文算法收敛曲线. 由此图知本文算法优于 SVSLMS 算法.

文[5]提出的变步长自适应滤波算法 (VS-NLMS), 其步长因子  $\mu$  与  $e(n)$  和  $x(n)$  的互相关函数的估值成正比. 该算法须用指数加权递推公式更新计算平均互相关, 计算量较大. 图9是本文算法

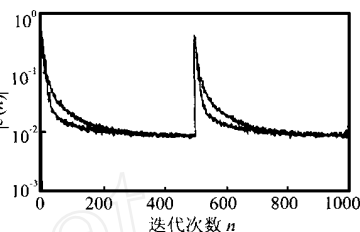


图8 本文算法和 SVSLMS 算法收敛曲线比较

和 VS-NLMS 算法收敛曲线的比较 (采样点数为 3000, 50 次独立仿真的统计平均结果). 模拟条件采用该文中的条件: (1) 自适应滤波器阶数  $L = 10$ ; (2) 未知系统的 FIR 系数为  $W^* = [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2]^T$ , (3) 参考输入信号  $x(n)$  是零均值, 方差为 1 的高斯白噪声; (4)  $v(n)$  为与  $x(n)$  不相关的高斯白噪声; (5)  $\mu = 1$ ,  $\mu = 0.997$ . 本文算法取  $\mu = 40$ ,  $\mu = 0.06$ . 从图中看出本文算法的收敛速度明显快于 VS-NLMS 算法的收敛速度.

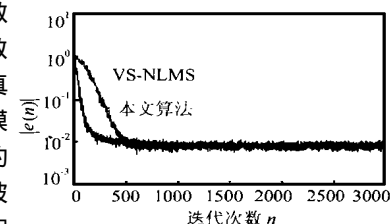


图9 本文算法的 VS-NLMS 算法收敛曲线比较

文[7]通过对误差信号的非线性处理, 得到了 L-E-LMS 算法. 该算法亦较为复杂. 图10是本文算法和 L-E-LMS 算法收敛曲线的比较 (采样点数为 600, 100 次独立仿真的统计平均结果). 模拟条件采用文[7]中的条件: 自适应滤波器阶数  $L = 5$ ; 未知系统的 FIR 系数为  $W^* = [0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33]^T$ ,  $\mu_{\max} = 0.1$ ,  $\mu_{\min} = 0.01$ ; 参考输入信号  $x(n)$  是零均值, 方差为 1 的高斯白噪声;  $v(n)$  是与  $x(n)$  不相关的高斯白噪声,  $\sigma_v^2 = 0.01$ . 本文算法取  $\mu = 200$ ,  $\mu = 0.1$ . 从图中看出本文算法的收敛速度亦快于 L-E-LMS 算法的收敛速度.

文[7]通过对误差信号的非线性处理, 得到了 L-E-LMS 算法. 该算法亦较为复杂. 图10是本文算法和 L-E-LMS 算法收敛曲线的比较 (采样点数为 600, 100 次独立仿真的统计平均结果). 模拟条件采用文[7]中的条件: 自适应滤波器阶数  $L = 5$ ; 未知系统的 FIR 系数为  $W^* = [0.33, 0.67, 1, 0.67, 0.33]^T$ ,  $\mu_{\max} = 0.1$ ,  $\mu_{\min} = 0.01$ ; 参考输入信号  $x(n)$  是零均值, 方差为 1 的高斯白噪声;  $v(n)$  是与  $x(n)$  不相关的高斯白噪声,  $\sigma_v^2 = 0.01$ . 本文算法取  $\mu = 200$ ,  $\mu = 0.1$ . 从图中看出本文算法的收敛速度亦快于 L-E-LMS 算法的收敛速度.

#### 5 结束语

通过建立步长因子  $\mu$  与误差信号  $e(n)$  之间的另一非线性函数关系  $\mu(n) = (1 - \exp(-|e(n)|^2))$ , 本文提出了一种新的变步长自适应滤波算法, 同时分析了参数  $\mu$  的取值原则及对算法收敛性能的影响. 该算法有较好的收敛性能, 克服了 SVSLMS 算法在自适应稳态阶段步长调整过程中的不足, 计算量比 SVSLMS 算法、VS-NLMS 算法和 L-E-LMS 算法少. 计算机仿真结果表明该算法的收敛性能良好, 与理论分析相一致且收敛速度快于 SVSLMS 算法、VS-

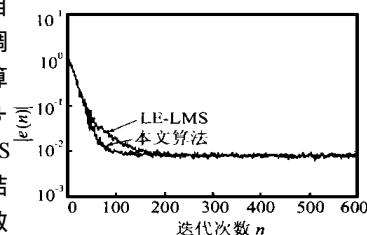


图10 本文算法的 L-E-LMS 算法收敛曲线比较

NLMS 算法和 L. E-LMS 算法。

#### 参考文献:

- [1] S. Haykin, et. al. Adaptive Filtering Theory [M]. 1985.
- [2] Gitlin R. D, Weinstein S. D. On the design of gradient algorithms for digitally implemented adaptive filters [J]. IEEE Trans on CT, 1973, (2): 125 - 136.
- [3] Yasukawa H, Shimada S, Furukawa I, et al. Acoustic echo canceller with high speech quality [A]. ICASSP '87: 2125 - 2128.
- [4] Gitlin R. D, Weinstein S. D. The effects of large interference on the tracking capability of digitally implemented echo cancellers [J]. IEEE Trans on COM, 1978, (6): 833 - 839.
- [5] 叶华, 吴伯修. 变步长自适应滤波算法的研究 [J]. 电子学报, 1990, 18(4): 63 - 69.
- [6] 覃景繁, 欧阳景正. 一种新的变步长自适应滤波算法 [J]. 数据采集与处理, 1997, 12(3): 171 - 194.
- [7] 吴光弼, 祝琳瑜. 一种变步长 LMS 自适应滤波算法 [J]. 电子学报, 1994, 22(1): 55 - 60.

#### 作者简介:



高 鹰 男. 1963 年 6 月生于湖北丹江口. 广州师范学院计算机系副教授, 1987 年毕业于华中师大数学系, 1998 年毕业于北京航空航天大学机电工程系, 获硕士学位. 现在华南理工大学电子与通信工程系攻读博士学位(在职). 主要研究方向: 计算机辅助几何设计、三维数据场可视化、自适应信号处理等研究. 已发表论文十余篇.



谢胜利 男. 1956 年生于湖北荆州. 华南理工大学无线电与自动控制研究所教授, 博士生导师. 主要研究领域: 滞后分布参数系统、滞后 2D 离散系统的稳定与变结构控制、非线性系统学习控制、机器人系统、自适应回波消除等. 出版专著一部, 发表论文 60 多篇, 获省部级二等奖 2 次.

## 《GPS 动态滤波的理论、方法及其应用》出版

由博士生导师万德钧教授和房建成、王庆两位副教授合著的《GPS 动态滤波理论、方法及其应用》一书, 倾注了作者及其有关专家、学者多年的心血, 潜心研究, 解决了一个又一个技术难题所取得的最新成果, 独创性很强, 是一本难得的好书。该书得到了江苏省金陵科技著作出版基金的支持, 并由江苏科学技术出版社出版发行。

本书共约 23 万字, 分 8 章。首先用了一章的篇幅简要扼要地介绍了第二代全球卫星导航系统 GPS 导航定位原理及其系统的基本情况, 接着用了两章的笔墨分析阐述 GPS 动态滤波理论、方法, 突出解决 GPS 动态定位的最优滤波问题, 为此, 建立机动载体运动的更合理、更准确的数学模型和采用一些更先进的自适应算法这两大难点, 并提出了一种带有速度观测量的 GPS 滤波法, 为提高 GPS 动态滤波精度开辟了一条新途径, 甚为可喜。

自第 4 章开始一直到末尾, 整整用了全书的多半章节来

着重阐述 GPS 应用量最大, 而且是当前最受人们关注的, 并在应用中还存在不少具体技术难点的车辆组合导航。作者从 GPS 与 DR 组合原理、方法开始, 具体地就这种组合的非线性自适应卡尔曼滤波模型的建立与仿真, 车辆应用的综合校正, 到适于普通车辆用的低成本 GPS/DR 组合系统的设计及试验, 给出了试验结果与分析。同时还专门用了—个章节对车载 GPS/DR/MM 组合系统的卡尔曼滤波进行了分析论述, 包括地图导航数据库、匹配方法、车辆各种动态模型与各种道路情况的降价卡尔曼滤波。内容非常丰富、翔实。

该书是一部专著, 相当系统全面与具体, 无论是理论性还是实用性都很强, 颇有深度, 对于在 GPS 动态滤波及车辆应用方面很有参考价值。文字简洁流畅, 理论分析正确, 逻辑性很强, 图文并茂, 是我所读到的在该领域内出自中国专家之手的第一部专著, 获益匪浅。

(谢世富)