



限度利用误差信息,抗噪声性能好,测量方差小;

(2)由于测距应用中接收信号频率已知,误差信号只控制相位调整,一方面省去了频率锁定时间,另一方面可以用更窄带宽跟踪信号,更有效滤除噪声;

(3)环路只有一个稳定平衡点,兼具两种量化特性 DPLL 的优点,不但具有较小的稳态误差,且克服了“hangup”现象;

(4)达到稳定之后,利用已有的稳态结果,采用“稳态平均法”进一步降低跟踪误差。

本文将在第 2 节介绍该环路结构并进行无噪分析;在第 3 节应用有限状态 Markov 链理论求解 Gauss 白噪声下环路的稳态性能,分析关键部件的抗噪声性能及参数选择依据,提出进一步降低跟踪误差的稳态平均法,推导出相应表达式后加以仿真验证;第 4 节计算环路到达稳态的时间,并和 DPLL 的结果相对照,最后得出结论。

## 2 数字相位跟踪测量环结构及其无噪分析

DPTML 结构如图 3 所示。图中  $T$  是信号周期,  $N$  为整数。系统由两个子环路构成,各包括相乘鉴相器、积分器、过零比较器及直接数字频率合成器(DDS)。在每个调整周期,两路 DDS 在单片机(MCU)控制下,产生和输入信号同频、相位相差  $\Delta = \pi/M$  ( $M$  是整数)的本地信号并和输入信号进行鉴相,相差信号由积分器进行积累以减小噪声干扰,经过零比较器完成二元量化,单片机(MCU)根据两路比较器输出决定 DDS 在下一周期的相位调整量(最小调整量为  $+\Delta$ 、 $-\Delta$  或 0)。由此可见,  $\Delta$  是最小相位分辨率。测量结果  $\hat{\theta}(k)$  由 MCU 输出。环路引入 MCU 一方面可结合 DDS 完成数字移相,控制灵活,响应快;另一方面可进行实时数据处理,具有测量、控制一体功能。

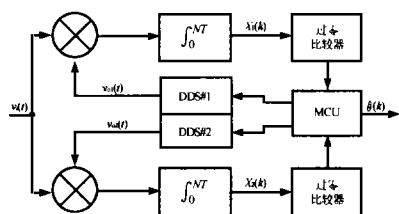


图 3 数字相位跟踪测量环

设输入信号为:

$$v_i(t) = V_i \sin(\omega t + \theta) + n(t) \quad (1)$$

其中  $\omega$  已知,  $\theta \in [-\pi, \pi]$  是待测相位,  $n(t)$  是零均值、单边噪声谱密度  $N_0$  (W/Hz) 的平稳高斯白噪声, 设前级等效噪声带宽为  $B_i$ , 则  $n(t)$  方差  $\sigma_n^2 = N_0 B_i$ 。无噪分析时  $n(t) = 0$ 。

设 DDS 在第  $k$  个校正周期内产生的两路本地信号分别为 ( $j=1$  取“+”,  $j=2$  取“-”):

$$v_{oj}(t) = V_o \cos(\omega t + \hat{\theta}(k) \pm \frac{\Delta}{2}) \quad (2)$$

$\hat{\theta}(k) \in \Phi = \{-\pi + i\Delta, i=1, 2, \dots, 2M\}, \forall k$ , 积分器输出为:

$$X_j(k) = K_d N T \sin(\theta - \hat{\theta}(k) \mp \frac{\Delta}{2}) = K_d N T \sin(\phi(k) \mp \frac{\Delta}{2}), \quad j=1 \text{ 取“-”, } j=2 \text{ 取“+”} \quad (3)$$

$K_d \triangleq \frac{1}{2} K_m V_i V_o$ ,  $K_m$  是相乘器的相乘系数,  $\phi(k) \triangleq \theta - \hat{\theta}(k) \bmod 2\pi$ 。积分器输出和  $\phi(k)$  的关系为:

$$\begin{cases} X_1(k) < 0 \text{ 且 } X_2(k) < 0, & -\pi + \frac{\Delta}{2} < \phi(k) < -\frac{\Delta}{2} \\ X_1(k) > 0 \text{ 且 } X_2(k) > 0, & \frac{\Delta}{2} < \phi(k) < \pi - \frac{\Delta}{2} \\ X_1(k) < 0 \text{ 且 } X_2(k) > 0, & -\frac{\Delta}{2} < \phi(k) < \frac{\Delta}{2} \\ X_1(k) > 0 \text{ 且 } X_2(k) < 0, & -\pi < \phi(k) < -\pi + \frac{\Delta}{2} \text{ 或 } \pi - \frac{\Delta}{2} < \phi(k) < \pi \end{cases} \quad (4)$$

如根据积分器输出, 规定本地估计相位  $\hat{\theta}(k)$  的调整规则为:

$$\hat{\theta}(k+1) = \begin{cases} \hat{\theta}(k) + \Delta, & X_1(k) > 0 \text{ 且 } X_2(k) > 0 \\ \hat{\theta}(k) - \Delta, & X_1(k) < 0 \text{ 且 } X_2(k) < 0 \\ & \text{或 } X_1(k) > 0 \text{ 且 } X_2(k) < 0 \\ \hat{\theta}(k), & X_1(k) < 0 \text{ 且 } X_2(k) > 0 \end{cases} \quad (5)$$

则易知  $\phi(k+1)$  和  $\phi(k)$  的关系为:

$$\phi(k+1) = \begin{cases} \phi(k) - \Delta, & -\pi + \frac{\Delta}{2} < \phi(k) < -\frac{\Delta}{2} \\ \phi(k) + \Delta, & \frac{\Delta}{2} < \phi(k) < \pi \\ & \text{或 } -\pi < \phi(k) < -\pi + \frac{\Delta}{2} \\ \phi(k), & -\frac{\Delta}{2} < \phi(k) < \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (6)$$

当  $\phi(k+1) = \phi(k)$  时, 表示输出相位不再随时间变化, 系统达到平衡, 此时平衡区域为:

$$|\phi_o| < \frac{\Delta}{2} \quad (7)$$

可见无噪情况下, 系统的最终稳态输出和输入相位仅相差  $\Delta/2$ , 只要  $M$  足够大, 该误差便可控制在精度允许范围内。

对比图 1 中采用死区量化器的 DPLL 知, 欲使 DPLL 具有和 DPTML 相同的稳定平衡区域  $\phi_o$ , 必然会产生另外两个不稳定平衡区域  $\phi'_o, \phi''_o$ :

$$\begin{cases} \pi - \frac{\Delta}{2} \leq \phi'_o \leq \pi \\ -\pi < \phi''_o \leq -\pi + \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (8)$$

当初始相位误差落在不稳定平衡区域时, 量化器输出也为 0, 由于它是单环结构, 不能识别稳定和不确定平衡点, 信噪比高时, 环路滞留于此的概率加大, 系统转向稳定的时间大大加长, 甚至长时间得不到正确结果, 此即所谓的“hangup”效应。避免该现象的前提是识别并消除不稳定平衡点。本文提出的 DPTML 可以根据两路比较器输出判断出当前的相位误差范围, 从而使环路趋于正确调整方向, 有效消除了“hangup”效应。

## 3 有噪声时环路的稳态性能分析

### 3.1 环路稳态误差

$n(t) \neq 0$  时, 相位误差序列  $\{\phi(k), k=1, 2, \dots\}$  可看作一不可约齐次 Markov 链,  $M$  足够大时, 其状态空间为集合  $\Phi =$

$\{-\pi + i\Delta, i = 1, 2, \dots, 2M\}$ . 给定相位误差状态  $\phi_i, i = 1, 2, \dots, 2M$ , 积分器在每个校正周期的输出符合高斯分布. 根据其概率密度函数  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | \phi_i)$  可求得状态转移概率矩阵  $P$  的各元素:

$$\begin{aligned} P_{i, (i-1) \bmod 2M} &= \iint_{x_1 > 0, x_2 > 0} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | \phi_i) dx_1 dx_2 \\ P_{i, (i+1) \bmod 2M} &= \iint_{x_1 < 0, x_2 < 0} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | \phi_i) dx_1 dx_2 \\ &\quad + \iint_{x_1 > 0, x_2 < 0} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | \phi_i) dx_1 dx_2 \\ P_{i, i} &= \iint_{x_1 < 0, x_2 > 0} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2 | \phi_i) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (9)$$

由于每次的相位改变量只有一个量化步长  $\Delta$ , 其余元素均为 0. Markov 链特性由初始分布  $\Pi(0)$  及  $P$  唯一决定. 求解方程组:

$$\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ \sum_{i=1}^{2M} \Pi_i = 1 \end{cases} \quad (10)$$

得到和初始分布无关的稳态概率分布  $\Pi = [\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{2M}]^T$  [5]. 当  $M$  足够大, 环路稳态输出的均方误差为:

$$\epsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{2M} \varphi_i^2 \Pi_i}, \varphi_i = -\pi + i\Delta; i = 1, 2, \dots, 2M \quad (11)$$

图 4 和图 5 分别给出  $\theta = 0$  时, 不同输入信噪比下, 输出相位误差的稳态分布和均方误差, 可以看出:

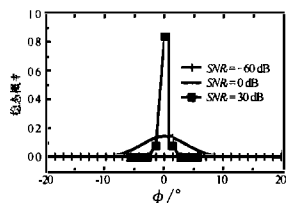


图 4 稳态输出相位误差概率  
( $N = 60, TB_i = 0.1, M = 16$ )

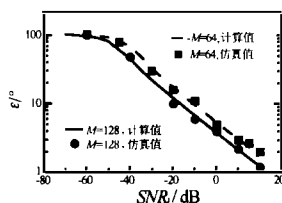


图 5 稳态输出误差 ( $N, TB_i$  同图 4,  $SNR_i = V_i/2/\sigma_i^2$ )

- (1) 信噪比极低时, 稳态输出接近均匀分布  $U(-\pi, \pi)$ ;
- (2) 稳态误差概率关于  $\phi = 0$  对称, 信噪比越高, 输出集中于  $\phi = 0$  附近的概率越大, 均方误差越小;
- (3) 调整步长越大, 稳态误差越大, 这是量化的必然结果.

### 3.2 积分器的抗噪声性能分析

下面将分析积分器的抗噪声性能, 并给出其关键参数—积分周期数  $N$  对性能的影响及选择依据.

一阶 DPLL 每周期内对输入信号采样一次作为下次调整的依据, 并没有完全利用整个周期内的误差信息, 易受噪声干扰; 如引入环路滤波器, 则增加了实现和分析复杂度 [5].

DPTML 中引入的积分器, 是系统抗噪声的关键部件. 一方面对整个周期内鉴相器输出的积累有效提高了环路信噪比, 利于减小稳态误差; 另一方面, 积分仅限于上一周期, 相位调整量仍只依赖于上次比较器输出, 环路差分方程阶数并没有增加, 便于数学分析.

定义积分器处理增益  $G$  为其输出、输入信噪比的比值, 经复杂推导可知,

$$G = \frac{(\pi NTB_i)^2}{2[-1 + \cos(\pi NTB_i) + \pi NTB_i \text{Si}(\pi NTB_i)]} \quad (12)$$

这里  $\text{Si}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\sin x}{x} dx$ , 是正弦积分函数. 可见,  $G$  和积分周期数  $N$ 、信号周期  $T$ 、输入噪声带宽  $B_i$  的乘积有关.  $G$  和  $NTB_i$  之间的关系如图 6 所示. 下面考虑两种极端情况:

(1)  $NTB_i \gg 1$ , 由  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{Si}(\alpha) = \pi/2$  知,  $G \approx NTB_i = B_i/(2B_l)$ , 其中  $B_l/2$  是进入环路的低通噪声带宽,  $B_l = 1/(2NT)$  是积分器的等效噪声带宽 [7], 这表示如果  $B_l \ll B_i$ , 相当于用窄带低通滤波器过滤宽带噪声,  $G$  近似和  $NTB_i$  成正比, 对噪声抑制较明显.

(2) 如果  $NTB_i$  较小, 亦即  $B_l \ll B_i$  的条件得不到满足, 甚至  $B_l \gg B_i$ , 此时相当于窄带噪声通过宽带系统, 由  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{Si}(\alpha) = \alpha$  知  $G \approx 1$ , 此时积分器抑制噪声的效果较差.

由上可知, 对于一定的噪声谱密度以及输入噪声带宽, 要有效提高积分器的输出信噪比, 必须满足条件  $NTB_i \gg 1$ , 这可通过增加积分周期数及降低测距频率来达到. 当然, 这是以加长校正周期、增加响应时间为代价的.

图 7 是不同输入信噪比下 DPTML 和 DPLL 的稳态误差对比, DPLL 采用二元有死区量化, 死区大小为  $\Delta$ , 等效相位调整量和 DPTML 相同. 可见, DPLL 易受噪声干扰, 稳态误差较 DPTML 大; 采用较大  $N$  的 DPTML 环路, 稳态误差较小.

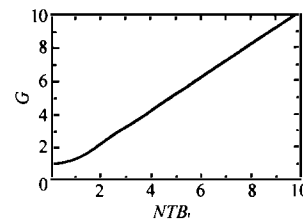


图 6 积分器处理增益  $G$  和  $NTB_i$  的关系

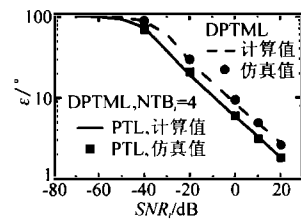


图 7 DPTML 和 DPLL 的稳态误差性能对比

### 3.3 进一步降低测量误差的方法—稳态平均法

常规跟踪环路只将稳态结果作为测量输出, 并不考虑再作处理以进一步降低误差. 由于 Markov 链输出序列之间相关性较强, 分析较复杂. 本文提出了进一步改善测量误差性能的稳态平均法, 在达到稳态之后, 通过 MCU 的控制, 将各次稳态值平均后作为测量输出. 通过推导, 其误差可表示为转移概率矩阵  $P$  的直观形式. 此方法可适用于任何具有不可约的齐次 Markov 性的跟踪环路. 下面分析该方法对误差的改善情况. 问题可推广为:

设环路在第  $k$  个跟踪周期对待测量  $\theta$  的本地估计量为  $\hat{\theta}(k)$ , 误差序列  $\{\phi(k)\} \triangleq \theta - \hat{\theta}(k) \bmod 2\pi, k = 1, 2, \dots$  构成齐次不可约 Markov 链, 设状态空间为  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s\}$ , 含  $s$  个状态, 其一步转移概率矩阵  $P_{s \times s}$ ,  $P$  为不可约随机矩阵. 已知  $k=0$  时的初始分布已达稳态, 即  $\Pi(0) = \Pi$ ,  $\Pi$  是稳态概率分布. 稳态平均法是将环路稳定后  $\hat{\theta}$  的  $n$  次部分和平均值  $\bar{\theta}(n)$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{\theta}(k)$  代替单次稳态输出作为测量结果, 则测量误差为:

$$\phi(n) = \theta - \bar{\theta}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi(k) \quad (15)$$

二阶矩  $\epsilon^2(n) \triangleq E\{\phi^2(n)\}$  表示  $n$  次稳态平均值相对待测值的均方误差, 可作为稳态平均法误差性能的衡量依据. 下面研究  $\epsilon^2(n)$  的性质并和单次(即没有平均的)稳态输出  $\phi(1)$  的均方误差  $\epsilon^2(1)$  比较.

为节省篇幅, 仅列出一些有用的结论:

(1) 稳态平均值的误差:

$$\epsilon^2(1) = E\{\phi^2(1)\} = \mathbf{I} \mathbf{D}_\varphi \varphi \quad (14a)$$

$$\epsilon^2(n) = E\{\phi^2(n)\} = \mathbf{I} \mathbf{D}_\varphi \frac{n\mathbf{I} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbf{P}^{n-k}}{n^2} \varphi \quad n \geq 2 \quad (14b)$$

这里  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s]^T$ ,  $\mathbf{D}_\varphi = \text{Diag}[\varphi]$ .

(2)  $\epsilon^2(n)$  和  $\epsilon^2(1)$  的比较

$$\epsilon^2(n) < \epsilon^2(1), \quad \forall n > 1 \quad (15)$$

(3)  $n \rightarrow \infty$  时  $\epsilon^2(n)$  的极限性能

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^2(n) = (\Pi \varphi)^2 < \epsilon^2(1) \quad (16)$$

由上可知, 取平均可以降低误差. 下图 8 是某一 DPTML,  $\epsilon(n)$  随  $n$  的变化关系. 当  $n$  增加时, 稳态误差逐渐变小并接近极限值. 还可看出, 在  $n$  比较小时, 减小的幅度比较明显, 所以较小的  $n$  值即可使稳态误差显著降低.

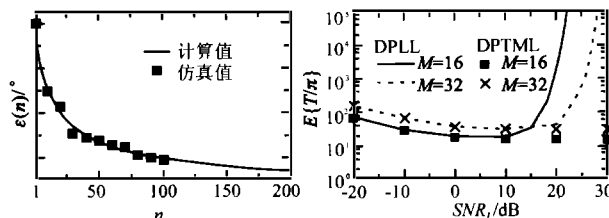


图 8 随  $n$  的变化关系 ( $M=32$ ,  $NTB_1=6$ ,  $SNR_1=0\text{dB}$ )

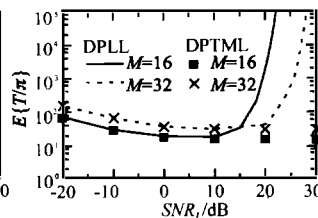


图 9 DPTML 和 DPLL 的稳定时间 ( $NTB_1=6$ )

#### 4 稳定时间分析

可以根据转移概率矩阵  $\mathbf{P}$  求得从任一状态出发, 达到稳定状态  $\phi=0$  的时间. 将  $\phi=0$  设为吸收态, 原 Markov 链转化为一吸收链, 其一步概率转移矩阵  $\tilde{\mathbf{P}}$  除第  $M$  行如式(17)外, 其余各元素与  $\mathbf{P}$  相同:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{M,M-1} &= \tilde{P}_{M,M+1} = 0 \\ \tilde{P}_{M,M} &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$

由有限 Markov 链理论知<sup>[8]</sup>, 如经行、列置换, 将  $\tilde{\mathbf{P}}$  重新排列为以下形式的分块矩阵:

$$\tilde{\mathbf{P}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}_{1 \times (2M-1)} \\ \mathbf{R}_{(2M-1) \times 1} & \mathbf{Q}_{(2M-1) \times (2M-1)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

这里子矩阵  $\mathbf{Q}$  对应  $2M-1$  个非吸收态间的转移概率, 称为该吸收链的基本矩阵, 则可由  $\mathbf{Q}$  求得由非吸收态进入吸收态

的平均时间(即稳定时间):

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{e} \quad (19)$$

这里  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$  是  $2M-1$  维列向量,  $\mathbf{N}$  的元素对应初始状态  $\phi_i$  时的平均稳定时间  $E\{T_a/\phi_i\}$ ,  $i=1, 2, \dots, M-1, M+1, \dots, 2M$ . 现将最坏情况  $E\{T_a/\phi_{2M}\} = E\{T_a/\pi\}$  作为衡量环路稳定时间的度量.

图 9 表示不同  $M$  时,  $E\{T_a/\pi\}$  随信噪比的变化情况以及和 DPLL 的对比, 后者仍采用二元有死区量化, 死区大小为  $\Delta$ . 由图可知:

(1) 信噪比增加到一定程度, DPLL 滞留在  $\phi = \pi$  附近的时间加大, 出现了“hangup”现象;  $M$  越小,  $\phi = \pi$  附近的死区越大, 环路变化越迟钝, 稳定时间越长.

(2) DPTML, 稳定时间随输入信噪比的增加而单调减小; 不存在“hangup”现象.

可见, 双环结构的引入克服了单环结构的 DPLL 不能识别不稳定平衡点的缺点, 有效克服了高信噪比下的“hangup”现象, 稳定时间比 DPLL 小得多. 虽然较后者多了一个环路, 但是它集成了相位测量功能, 不必象常规测距系统那样, 附加额外测相模块, 因此总体复杂度是降低的.

由图 5 和图 9 可以看出, 稳态误差和稳定时间对  $\Delta = \pi/M$  的要求是矛盾的. 为此可采用变步长方法, 在迭代初期,  $\Delta$  大一些, 待稳定后逐步缩小  $\Delta$ , 直至以最小步长进入相位跟踪状态. 这类似于改变 PLL 中的环路增益. 由于引入了 MCU, 控制可以更加灵活.

#### 5 结论

经计算和仿真表明, 本文提出的一种数字相位跟踪测量环路(DPTML), 兼具窄带跟踪滤波和高精度相位测量功能, 具有良好的抗噪声性能, 消除了“hangup”现象, 尤其是高信噪比下, 稳定时间大大低于 DPLL, 非常适于测距等信号频率已知的应用场合. 较之传统的先将正弦波转化为方波, 再通过异或门取得相差信号作为闸门脉冲控制计数器计数的测相方法, DPTML 对噪声和信号波形失真带来的误差有明显的抑制作用, 具有相当大的实用价值. 系统实现采用二元量化、DDS, 环路引入 MCU, 这些措施不但使得系统实现简单, 成本低, 而且易于控制, 便于数据处理. 该系统已经在国家气象局重点科研项目“L 波段二次测风雷达”中获得了实际应用<sup>[9]</sup>, 取得了良好效果.

致谢 感谢国家气象局气象科学研究院高空探测实验室 轧良赫高工、延安大学理学院樊延虎副教授对系统的研制和实验提供的大力支持.

#### 参考文献:

- [1] Ruleger, J M. Electronic Distance Measurement: An Introduction [M]. Berlin: Springer, 1996.
- [2] M P Fitz, et al. A performance analysis of a digital PLL based MPSK demodulator [J]. IEEE Trans., 1995, COM-43(2/3/4): 1192 - 1201.

- [3] N A DAndrea, et al. Multilevel quantized DPLL behavior with phase- and frequency-step plus noise input[J]. IEEE Trans., 1980, COM-28 (8):1373 - 1382.
- [4] D L Isaacson, et al. Markov Chains Theory and Applications [M]. New York: Wiley, 1976.
- [5] W C Lindsey, et al. A survey of digital phase-locked loops [J]. Proc. of the IEEE, 1981, 69(4):410 - 431.
- [6] W C Lindsey. Synchronization Systems in Communication and Control [M]. New Jersey: Prentice-hall, 1972.
- [7] P H Garrett. Adaptive maximum likelihood receiver for direct-ranging applications [J]. IEEE Trans., 1971, AES-7(3):863 - 873.
- [8] Kemeny J G, et al. Finite Markov Chains [M]. Princeton, NJ: D. Van Nostrand Com. Inc., 1960.
- [9] Feng Zhenghe, Huang Jingyu, Chen Yaqin. A novel narrow-bandwidth high-accuracy ranging system for weather balloon [A]. Proc. of ICMMT'2000 [C], Beijing, 2000:553 - 556.

#### 作者简介:



**黄敬禹** 男, 1973 年 6 月生于陕西西安, 分别于 1995 年、2001 年在清华大学电子工程系获工学学士和博士学位, 专业为电磁场与微波技术, 研究方向为通信电路与系统, 测距技术和数字信号处理。

**陈雅琴** 1946 年 12 月生于江苏无锡, 1970 年毕业于清华大学, 现为清华大学电子工程系副教授, 研究方向为高频电子线路, 通信系统和 GPS 应用等领域。

**冯正和** 1945 年 8 月生于上海, 1970 年毕业于清华大学, 现任清华大学电子工程系教授、博士生导师、系主任。主要从事智能天线技术, 微波毫米波技术, 电磁场理论与数值方法, 无线数字通信, 时空信号处理, 微波测量等领域的教学和科研工作。