

# 一种正交多项式混沌全局建模方法

简相超,郑君里

(清华大学电子工程系,北京 100084)

**摘要:** 本文研究了一种正交多项式混沌全局建模方法,所用正交多项式集以吸引子不变测度为核.通过对 Hénon 映射数据和电离层参数实测数据的分析,表明在待建模系统不很复杂时(其内在机理可用较低阶多项式表达),这种全局建模方法能得到系统动力学特性.在低噪声情况下模型还能充分精确地重构系统方程式.在噪声较大或系统内在机理很复杂时建模结果仍可用于一步预测,且具有较好效果.

**关键词:** 混沌;全局建模;不变测度;正交多项式;电离层

**中图分类号:** TN914 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 01-0076-03

## A Chaotic Global Modeling Method Based on Orthogonal Polynomials

JIAN Xiang-chao, ZHENG Jun-li

(Dept. of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** In this article, we study a chaotic global modeling method based on a set of polynomials defined on the attractor's invariant measure as its kernel. Through analysis of Hénon map data and observed data of ionospheric parameters, it is shown that if the underlying system is simple enough to be represented by low-order polynomials, this method can capture the dynamics of the system. Also, when the noise level is low, we can acquire the equation of the system. When noise level is higher or the system is more complex, we still can use the reconstructed model to perform one-step prediction in a fairly good fashion.

**Key words:** chaos; global modeling; invariant measure of attractors; orthogonal polynomials; ionosphere

### 1 引言

随着混沌理论的深入发展,人们对混沌理论的实际应用产生了浓厚兴趣,例如在信息科学领域就有如混沌预测、混沌伪随机序列产生、混沌保密通信等等<sup>[1,2]</sup>不少混沌应用的例子.这些应用可以分为两类:一类是正问题(分析型问题),即从实际系统物理的、化学的,或其他形式的规律出发,得到系统演化方程式,然后分析系统动力学行为,及可能产生的混沌现象;另一类是反问题(综合型问题),即从系统输出数据出发,通过各种建模手段,发现系统演化规律,进一步找到系统演化方程式.人们已经提出了一些混沌建模方法<sup>[3]</sup>,其基本思想是混沌分析中相空间重构的思想:由一维观测数据构造延时坐标,得到与原始相空间微分同胚的重构相空间,从而就得到了以相空间点映射表达出的系统在吸引子上的动力学行为.如何依据这个动力学行为来得到吸引子上的映射就是混沌建模的主要任务.有了混沌模型,我们就可以推测系统下一步的状态点位置,取出合适的延时坐标分量,得到下一时刻观测数据的预测位置.这种相空间重构预测是混沌模型的一个主要应用.此外,人们还可以根据混沌模型来计算 Lyapunov 指数和分数维等.

设  $x_n$  为当前状态点,  $x_{n+1}$  为下一个状态点,系统演化方程为:

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (1)$$

其中,  $F$  是吸引子上的未知映射.在局部模型方法中,基于  $F$  连续性的假设(这在实际系统中一般也是满足的),引进邻近点的概念,认为待预测点在相空间中的邻近点演化行为能够反映出此点演化行为,并建立局部线性模型、局部二阶模型和局部高阶模型等基于台劳展开的多项式模型,以及局部前向多层神经网络模型、局部径向基函数模型等神经网络非线性模型来拟合反映吸引子局部动力学特性的线性或非线性映射.全局模型则是希望用一个在整个吸引子上都有效的模型描述系统的演化行为.

局部模型由吸引子上的许多局部映射构成.这些局部映射在不同的邻域之间不连续,在吸引子以外不适用,而且待调整参数非常多.比如,对于  $P$  阶的多项式局部映射,在局部动力学维数为  $D$  时对每个时间步长都有大约  $P^D$  个参数需要计算.相反,全局模型用一个相对简单的连续模型描述整个数据集,具有相空间中的光滑性和解析性,和在相空间较大范围内产生轨道的能力.全局模型的这些优点促使人们不断努力寻找一些具有封闭函数表达式的全局模型,以便能表达出整个

吸引子上和吸引子附近相空间中的系统动力学行为.

### 2 正交多项式的混沌全局建模方法

正交多项式的全局建模使用了向量场  $x = F(x)$  在  $d_E$  维空间中某个正交多项式基函数集上的展开形式. 这儿的多项式集合的正交性是指对吸引子不变测度的正交性<sup>[4,5]</sup>. 寻找多项式和函数  $F(x)$  的系数仅仅需要计算相空间中数据点的矩量值. 整个过程如下:

设吸引子的不变测度

$$p(x) = \frac{1}{N} \int_{k=1}^N d^E(x - y(k)) \quad (2)$$

引入一个  $R^{d_E}$  上的关于不变测度  $p(x)$  正交的多项式序列  $m_n(x)$ . 由正交性,有

$$\int m_n(x) m_m(x) p(x) d^E x = \delta_{nm} \quad (3)$$

设  $m_0(x) = 1$ , 由 Gram-Schmidt 正交化过程可以得到其他  $m_n(x)$  直至所需要的阶数.

对使得数据点演化的全局向量场  $F(x)$  进行  $M$  阶近似:

$$F_M(x) = \sum_{m=1}^M c(m) m_m(x) \quad (4)$$

系数  $c(m)$  由下式决定:

$$\begin{aligned} c(m) &= \int F(x) m_m(x) p(x) d^E x \\ &= \frac{1}{N} \int_{k=1}^N F(y(k)) m_m(y(k)) \\ &= \frac{1}{N} \int_{k=1}^N y(k+1) m_m(y(k)) \end{aligned} \quad (5)$$

这样,我们就得到  $y(k+1) = F_M(y(k))$  (6)

可见,一旦从已知数据中得到  $m_n(x)$ , 向量场的计算就变成了数据各阶幂次之和(注意到  $m_n(x)$  都是多项式). 这里,  $F_M(\cdot)$  就是系统正交多项式形式的全局模型.

### 3 正交多项式全局建模方法实例

首先我们以 Hénon 映射为例:当  $a = 1.4, b = 0.3$  时 Lyapunov 指数  $\lambda_1 = 0.4112, \lambda_2 = -1.6152$

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 - ax(n)^2 + y(n) \\ y(n+1) = bx(n) \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\lambda_1 + \lambda_2 = \log_e(b) = -1.2040$ .

在实施正交多项式逼近时,需要小心选择多项式的个数  $P$  和多项式阶数  $R$ . 在 (7) 式中取初值  $(x, y) = (0, 0)$ , 叠代 1000 个点,然后取后 500 个点作为实验点. 在  $P=4, R=2$  时,以吸引子为核的  $P$  个正交多项式分别为:

$$\begin{cases} p_0(x, y) = 1 \\ p_1(x, y) = -0.3308 + 1.3687x \\ p_2(x, y) = -0.4176 + 0.3184x + 4.6824y \\ p_3(x, y) = -1.0729 - 0.2665x - 0.6035y + 1.9945x^2 \end{cases} \quad (8)$$

相应地,对应式(7)中的两个式子,有

$$\begin{cases} x(n+1) = 0.2436p_0(x(n), y(n)) - 0.1653p_1(x(n), y(n)) \\ \quad + 0.1231p_2(x(n), y(n)) - 0.7019p_3(x(n), y(n)) \\ y(n+1) = 0.0725p_0(x(n), y(n)) + 0.2192p_1(x(n), y(n)) \end{cases}$$

将式(8)代入上面两式,有

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 + y(n) - 1.4x(n)^2 \\ y(n+1) = 0.3x(n) \end{cases} \quad (9)$$

当取  $P=10$  时,  $R=4$ ,对于没有噪声污染的数据序列,产生的系数仍然与(9)没有明显的偏离,表明这种正交多项式建模方法可以从数据中得到系统方程式.

下面我们取上述序列的  $x$  分量作为一维观测序列重构相空间,由最小互信息量准则和最小伪最近点准则<sup>[4]</sup>得到重构延时为 1,嵌入维数为 2. 我们得到类似(9)的结果:

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 + y(n) - 1.4x(n)^2 \\ y(n+1) = x(n) \end{cases} \quad (10)$$

可见,对于可由低阶多项式表达的系统,采用正交多项式全局建模方法可以从观测数据中引出系统表达式. 对于实际系统,由于系统阶次未知,只能在不同的阶次试算几次,通过比较预测结果好坏来大致确定系统建模时实际需要的阶数.

现在给出一个实际混沌系统的计算实例. 采用的混沌序列是电离层频率参数  $f_oF2$  每小时值序列<sup>[6]</sup>,选取台北地区 1969 年 11 月 26 日零时起连续 42.75 天的每小时  $f_oF2$  数据,共 1025 点作为实验数据. 为了便于比较各阶多项式系数,对数据序列线性归一化到  $[0, 1]$  区间,见图 1,前 1000 点为重构相空间点,后 25 点为一步预测待预测点. 由数据序列与其延时间序列的互信息量对延时间值的关系得到重构延时  $\tau_s = 3$ ;同样在  $\tau_s = 3$  时由伪最小邻近点数对嵌入维数的关系可以得出嵌入维数  $d_E = 3$ <sup>[3]</sup>. 选用阶数为 3 的多项式作为正交基函数,得到函数为:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0.2028 + 1.1549x - 0.2789y - 0.4567z - 0.6095x^2 \\ &\quad - 1.6125xy + 3.1559y^2 + 2.0375xz - 3.4829yz + \\ &\quad + 0.7996z^2 - 0.5252x^3 + 3.8629x^2y - 4.8396xy^2 + \\ &\quad + 0.1346y^3 - 0.7560x^2z + 4.3611xyz - 1.3363y^2z - \\ &\quad - 3.2664xz^2 + 2.5362yz^2 - 0.1967z^3 \end{aligned}$$

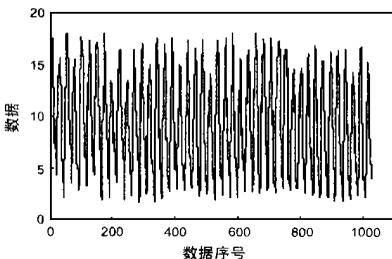


图1 电离层 foF2 混沌观测数据

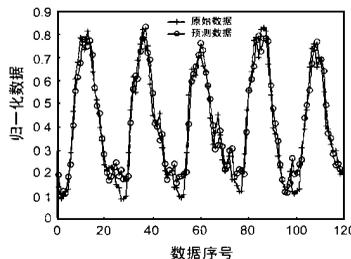


图2 一步预测结果,平均均方误差 mse = 0.025

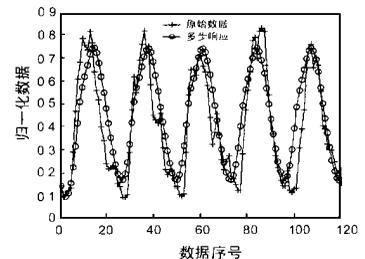


图3 多步预测结果,平均均方误差 mse = 0.081

这儿, 设  $d$  对应一维观测数据, 则  $x$  对应  $d(n)$ ,  $y$  对应  $d(n-1)$ ,  $z$  对应  $d(n-2)$ ,  $f(x, y, z)$  对应  $d(n+1)$ , 为一步预测值.

一步预测的结果见图 2, 平均均方误差 ( $mse$ ) 为 2.5%, 结果比较好. 当从某一个状态点开始进行长时间演化行为时, 重构模型的响应像一个略微衰减的震荡过程, 如图 3, 由预测图可以看到, 3 阶多项式模型已经学习到数据中的周期特性; 而且前几个预测值还比较吻合, 表明仅仅用 3 维空间中的 3 阶多项式能够初步拟合此电离层参数系统的动力学行为. 值得注意的是, 对于内在机理比低阶非线性多项式复杂得多的系统, 我们应当进一步从系统内在机理出发探求其演化方程式, 而不能仅仅靠混沌建模.

#### 4 正交多项式全局建模的抗噪声性能

抗噪能力体现在在某个噪声门限下模型对噪声的不敏感

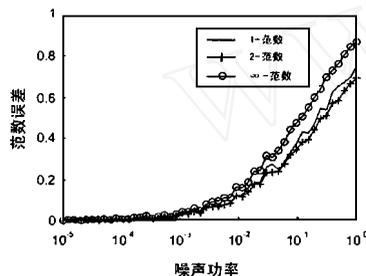


图 4  $P=4$  时全局模型系数偏差对噪声功率的关系

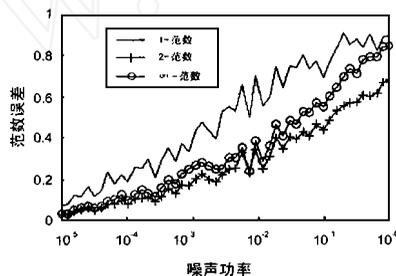


图 5  $P=10$  时全局模型系数偏差对噪声功率的关系

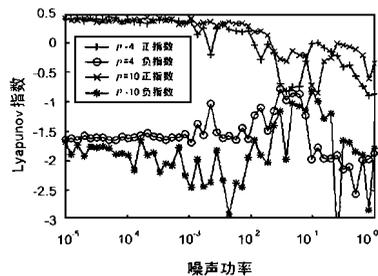


图 6  $P=4$  和  $P=10$  时全局模型 Lyapunov 指数对噪声功率的关系

另外, 还可以计算模型系统的 Lyapunov 指数对噪声的关系, 见图 6. 此时无噪系统的 Lyapunov 指数值  $\lambda_1 = 0.4112$ ,  $\lambda_2 = -1.6152$ . 对比图 4, 图 5, 和图 6 可以看出,  $P=4$  时模型构造过程的抗噪声能力较强, 在噪声功率小于  $10^{-3}$  时系统能够正确地反映真实系统的动力学行为, 在图 6 中也可以看出此时的 Lyapunov 指数与无噪时的值非常接近. 而  $P=10$  时由于需要估计的多项式系数较多, 多项式的阶次较高, 比较小的噪声污染也容易引起建模系数较大的偏离, 如图 5 示; 相应地, 模型系统的 Lyapunov 指数随着噪声功率的加大波动也很大, 表明模型已逐渐不能得到系统的动力学行为了. 同时, 从图 6 中可以看到, 当噪声功率约为 0.018 时即信噪比下降到 14.6dB 时模型的正 Lyapunov 指数第一次过 0 点, 表明模型已经不具有产生混沌行为的必要条件, 更是说明当信噪比低于这个水平时这种正交多项式建模的方法已经没有能力得到系统的动力学行为了. 不过这并不妨碍模型在短期预测中的应用, 这一点已在图 2, 图 3 的比较中得到说明.

#### 5 结论

综上所述, 若待建模系统本身不很复杂, 即其内在机理可用较低阶多项式表达时, 采用这种全局建模方法有很好的效果, 如文中对 Hénon 映射数据的计算结果. 而且, 在噪声污染不很大时, 模型能够充分精确地重构系统方程式. 当噪声污染较大时, 建模结果仍可用于一步预测, 且效果较好.

对正交多项式全局模型系数间的差异, 有 1-范数、2-范数、 $\infty$ -范数、Lyapunov 指数等几种度量. 本文采用式 (7) 的 Hénon 映射的例子, 从序号为 1 的 (0, 0) 点迭代后取序号从 201 到 1000 的 800 个数据点, 取  $x$  分量作为观测到的数据, 序列范围  $[ -1.2835, 1.2730 ]$ , 均值 0.2511, 标准差 0.7247, 方差 (即功率) 为 0.5251. 由数据序列与其延序列的互信息量对延时值的关系图得到重构延时  $\tau_s = 1$ ; 同样在  $\tau_s = 1$  时由伪最小邻近点对嵌入维数的关系图可以得出嵌入维数  $d_E = 2$ . 当  $P = 4$  时建模的结果如式 (10).

加入均值为零的均匀分布噪声序列到此数据序列以模拟实际观测序列中的噪声, 噪声功率从  $10^{-5}$  到 100. 对此有噪声序列建模, 与无噪序列建模系数比较, 采用范数度量, 在取  $P=4$  和 10 时结果分别见图 4, 图 5, 其中横轴为噪声功率, 纵轴为范数误差:

#### 参考文献:

- [1] T Aislam, J A Edwards. Secure communications using chaotic digital encoding [J]. Electron. Lett., 1996, 32(3): 190 - 191.
- [2] L Kocarev, K S Halle, K Eckert, L O Chua, U Parlitz. Experimental demonstration of secure communications via chaotic synchronization [A]. R N Nadan (ed). CHUA'S CIRCUIT: A paradigm for CHAOS [C]. Singapore: World Scientific, 1993: 379 - 394.
- [3] H Abarbanel. Analysis of Observed Data [M]. Springer-Verlag New York Inc, 1996.
- [4] M Gona, F Lentini, V Vimagalli. Functional reconstruction and local prediction of chaotic time series [A]. Physical Review A [C], 1991, 44: 3496 - 3502.
- [5] R Brown. Orthogonal polynomials as prediction functions in arbitrary phase space dimensions [A]. Physical Review E [C], 1993, 47: 3962 - 3969.
- [6] NATIONAL GEOPHYSICAL DATA CENTER. Ionospheric Digital Database on compact disc [CD]. NOAA National Data Centers, NGDC, <http://www.ngdc.noaa.gov/ngdc.html>. 1994.

#### 作者简介:

简相超 男, 1974 年 4 月出生于河南淮滨. 1997 年清华大学电子工程系本科毕业, 同年在本系直接攻读博士学位. 主要研究方向为混沌理论在通信中的应用, 包括混沌预测和混沌建模等. Email: jianxc@cenpok.net