

# 幅度非均匀取样信号的数字频谱研究

林茂六,解本钊,权太范

(哈尔滨工业大学电子与通信工程系,黑龙江哈尔滨 150001)

**摘 要:** 在并行交替式超高速数字化系统中,由于各个 A/D 客观上存在的偏置(offset)及增益(gain)的不一致性,造成取样信号幅度的不均匀性.本文首先提出了幅度非均匀取样信号的概念,然后研究了由于偏置产生的幅度非均匀取样信号的数字频谱,推导出了它的数字频谱表达式,详细分析了存在偏置时正弦信号的数字频谱,得到了系统的信噪比公式,最后给出了计算机仿真结果.

**关键词:** 偏置;幅度非均匀取样;数字频谱

**中图分类号:** TM932

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2000) 05-0025-04

## Research on the Amplitude Nonuniformly Sampled Signals' digital Spectra

LIN Mao-liu, XIE Ben-zhao, QUAN Tai-fan

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** In the high speed digitizers with time-interleaved structure, the input signal's amplitude are sampled nonuniformly because of the offset and gain difference of A/D. In this paper, we first define the concept of amplitude nonuniformly sampled signal, study the digital spectra of the amplitude nonuniformly sampled signal, derive its digital spectra representation, and furthermore present a detailed spectrum analysis of an amplitude nonuniformly sampled sinusoid, to obtain the signal-to-noise ratio. At last, the results of computer simulation that verify the correction of the above theory are given.

**Key words:** offset; amplitude nonuniformly sample; digital spectra

### 1 引言

为了不失真地实时捕捉、记录到高速数字化系统中的宽度在纳秒(ns)甚至百皮秒(ps)量级的单次或重复频率极低的窄脉冲,必须采用实时取样速率在 Gsa/s 量级的超高速数字化系统.就目前的电子技术水平,如此高的实时取样速率大都采用如图1所示的并行时间交替(time-interleaved)式结构来实现.这种结构也是第三代无线通信体制——软件无线电硬件平台的核心部件<sup>[1]</sup>.如果  $M$  个 A/D 并行,可以将采样速率提高到单个 A/D 采样速率的  $M$  倍.

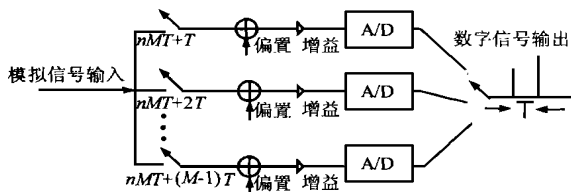


图1 多通道并行超高速数据采集系统模型

在这种结构中,要求每个通道的采样时间比前一个通道延迟  $T$  秒,对于超高速数字化系统,各个通道之间的微小延时要做到精密均匀是难以实现的,且各个 A/D 又存在不同的

偏置(offset)和增益(gain)误差,故这种结构对模拟信号量化存在非均匀现象,由此得到的数字信号统称为非均匀取样信号.由非均匀采样时间得到的信号称为时间非均匀取样信号,由于 A/D 的偏置和增益误差造成的非均匀称为幅度非均匀取样信号.

上述三种误差是造成输入信号的频谱发生畸变的主要原因,当由 500Ms/s, 8bit 的 A/D 构成两路时间并行交替结构时,两个 A/D 的增益误差仅为 3% 时,系统的有效位降至 5.8bit 以下,时基误差为 4ps 时,系统有效位降至 6bit 以下<sup>[2]</sup>.这些事实促使人们对非均匀取样信号的研究产生浓厚兴趣. Y. C. Jeng 博士首先对于时间非均匀取样信号作了详细分析,推导出了时间非均匀取样信号的数字频谱的严谨表达式<sup>[3]</sup>,并且提出了修正时间非均匀取样正弦信号的补偿算法<sup>[4]</sup>,最近又提出了由取样数据恢复原始数据的算法<sup>[5]</sup>.本文仅讨论由于各个 A/D 的偏置误差引起的输入信号的频谱的畸变以及对系统的信噪比的影响.可以看到,寄生频谱与输入信号频率无关,且是线状频谱.这些频谱就是文献[6]所说的高频颤动(dither).高频颤动虽然降低了系统的信噪比,但利用其具有固定规律性,采取一定的算法,可以提高系统的有效位数,有关这方面的内容将另外讨论.

收稿日期:1999-07-26;修订日期:1999-12-30

基金项目:国家自然科学基金(No. 69872021)资助课题

## 2 偏置幅度非均匀取样信号的数字频谱

为了说明这种并行结构产生的问题,考虑由两片 A/D 构成的最简单的系统. 由于两个 A/D 之间的偏置存在差异,因此输出数据是输入信号和误差信号的和(见图 2),误差信号的频率和单个 A/D 的采样频率相同,并且和输入信号无关,只是和偏置的差异有关. 当  $M$  个 A/D 并行时,误差信号包含  $M$  个频率. 下面将详细推导此结果.

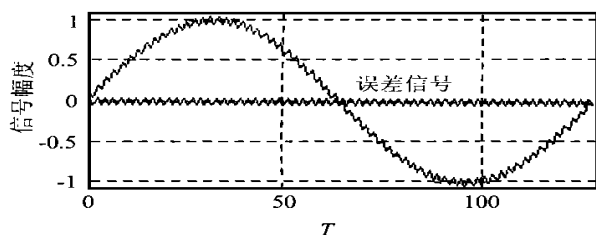


图 2 两路 A/D 并行输出结果

设每个 A/D 的偏置误差为  $a_m, m=0, 1, 2, \dots, M-1$ , 由于每个 A/D 的偏置误差是固定的, 因此误差序列  $a(n)$  可以看作是由  $a_m$  延拓而成的周期为  $M$  的周期序列. 此周期序列的频谱为:

$$\begin{aligned} P_{\text{dfset}}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) e^{-j\omega n T} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(m+nM) e^{-j\omega(m+nM)T} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-j\omega m T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n M T} = \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-j\omega m T} e^{-j\omega n M T} \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n M T}$  是直流信号经过抽样间隔为  $MT$  等间隔抽样得到的信号频谱, 因此根据采样定理上式可以写成:

$$\begin{aligned} P_{\text{dfset}}(\omega) &= \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-j\omega m T} \frac{1}{MT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k \frac{2\pi}{MT}) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-j(2\pi/M)km} \right] 2\pi \delta(\omega - k \frac{2\pi}{MT}) \end{aligned} \quad (2)$$

假设输入信号是一个带限  $(-1/2T, 1/2T)$  的模拟信号, 它的付氏变换为  $G^a(\omega)$  ( $a$  代表模拟信号频谱). 那么, 输入信号由于偏置误差造成的幅度非均匀采样后的数字频谱为:

$$G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G^a(\omega - k \frac{2\pi}{T}) + P_{\text{dfset}}(\omega) \quad (3)$$

这样就得到了偏置幅度非均匀采样信号的数字频谱表达式, 其中第一项是输入模拟信号经过采样后的频谱, 第二项是误差信号产生的与输入信号无关的附加频谱分量.

## 3 幅度非均匀采样正弦信号

正弦信号是信号分析的最基本工具, 下面讨论输入信号是正弦信号的情况.

已知正弦波  $e^{j\omega_0 t}$  的频率为  $f_0$ , 这里  $f_0 = \omega_0/2\pi$ , 其付氏变换为:

$$G^a(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (4)$$

将此式代入式(3)得:  $G(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - k \frac{2\pi}{T})$

$$+ \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-j(2\pi/M)km} \right] 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - k \frac{2\pi}{MT}) \quad (5)$$

定义等式:

$$A(k) = \sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-j(2\pi/M)km}, k = \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1, M, \dots \quad (6)$$

那么式(5)可以写成:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - k \frac{2\pi}{T}) \\ &+ \frac{1}{MT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(k) 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - k \frac{2\pi}{MT}) \end{aligned} \quad (7)$$

此式为偏置幅度非均匀采样正弦信号的完整的频谱表达式.

下面讨论偏置幅度非均匀采样正弦信号的一些重要特性.

首先, 由等式(6)可以看出  $A(k)$  是周期为  $M$  的周期序列, 因此, 式(7)的第二项是关于  $k$  的周期函数, 周期是  $2\pi/T$ , 而式(7)的第一项是正弦函数的频谱, 是关于  $\omega$  的周期为  $2\pi/T$  的周期函数, 所以  $G(\omega)$  是  $\omega$  的周期函数, 周期为  $2\pi/T = 2f_s$ , 即系统的取样角频率. 其次, 频率中的一个周期包含  $M+1$  根谱线, 信号主谱线位于  $f_0$  处, 偏置误差产生的附加频率谱线均匀分布在频率轴上的  $k f_s/M, k=0, 1, 2, \dots, M-1$ , 相邻两根谱线之间距离为  $f_s/M$ , 如图 3 所示. 图中矩形框包含  $G(f)$  的一个周期. 另外, 从式(6)可以看出, 有限序列  $A(k), k=0, 1, \dots, M-1$  是序列  $a_m$  的离散付立叶变换(DFT), 即附加频率分量的幅值由  $a_m$  的离散付立叶变换的值确定, 利用这个特点, 调整 A/D 的偏置可以调整附加频率分量的值, 使用相应的算法可以提高 A/D 的分辨力, 有关内容将在后续文章中加以讨论. 由上分析可以得到系统的信噪比  $S/N$ :

$$S/N = 10 \log_{10} \left( \frac{1}{\sum_{k=0}^{M-1} |A(k)/M|^2} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{M^2}{\sum_{k=0}^{M-1} |A(k)|^2} \right) \text{ db} \quad (8)$$

其中,  $A(k)$  是  $a_m$  的离散付立叶变换的值.

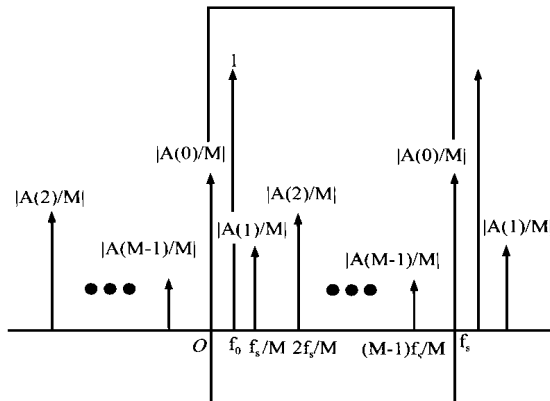


图 3 偏置幅度非均匀采样正弦信号的数字谱

比较偏置幅度非均匀采样正弦信号的数字频谱与文献[3]的时间非均匀采样正弦信号数字频谱, 可以看出, 二者的

共同点是产生  $M$  条频率间隔为  $f_s/M$  附加频率分量. 不同点是偏置幅度非均匀采样正弦信号的数字频谱中的附加频率分量位于固定的频率点上, 与输入信号的频率无关. 而时间非均匀取样正弦信号的数字频谱附加频率分量的位置和输入信号的频率有关, 均匀分布在频率轴的  $f_0 + kf_s/M$ , ( $k=0, 1, 2, \dots, M-1$ ) 点上.

以下利用上述表达式, 对几种典型的实例进行分析, 推导出其信噪比.

### 3.1 两路并行交替式系统

考虑  $M=2$  的最简单的并行交替式采样系统, 假设两个 A/D 的偏置误差分别为  $a_0, a_1$ , 以其中的一个为参考值, 设  $a_0=0$ , 将  $|A(k)|$  的值代入式 (7) 得到此时的信噪比为:

$$S/N = 10\log_{10}(4/2a_1^2) = 10\log_{10}(2/a_1^2) \text{ dB} \quad (9)$$

图 4 给出了  $a_1$  从 0 到信号幅度 50% 时的信噪比.

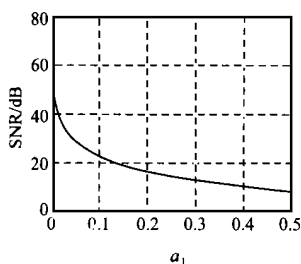


图 4  $M=2$  时的信噪比

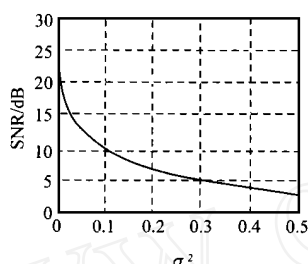


图 5 误差是独立分布随机变量的信噪比

### 3.2 独立随机变量

假定  $a_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots, M-1$ ) 是  $M$  个独立的, 均值为 0, 分布相同的随机变量. 此时, 要计算信噪比只需数学期望值代替  $|A(k)|^2$ .

$$\begin{aligned} E[A(k)A^*(k)] &= E\left(\sum_{m=0}^{M-1} a_m e^{-j\frac{2\pi mk}{M}} \sum_{n=0}^{M-1} a_n e^{j\frac{2\pi nk}{M}}\right) \\ &= E\left(\sum_{m=0}^{M-1} a_m^2\right) = M^2 \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\sigma^2$  是变量  $a_m$  的方差. 此时, 信噪比为:

$$S/N = 10\log_{10}(1/\sigma^2) \text{ dB} \quad (11)$$

由上式可以看出, 信噪比只与信号幅度和偏置误差的方差有关, 和 A/D 的个数以及误差的分布无关. 这个事实意味着  $S/N$  独立于误差分布, 它使我们在研究幅度非均匀采样时, 可以不需要知道误差的确切分布.

图 5 给出了  $\sigma^2$  由 0 变化到 0.5 的信噪比, 横轴代表  $\sigma^2$  的值.

## 4 计算机模拟

以上从理论上分析了由于 A/D 转换器的偏置误差造成的幅度非均匀采样对输入信号数字频谱的影响, 推导出了输入信号为正弦信号的信噪比表达式. 下面利用 FFT 频谱分析方法的计算机仿真来验证上述理论的正确性. 假设输入信号是幅度为 1, 频率为  $f_0$  的标准正弦信号  $\cos 2\pi f_0 t$ , 为了降低 FFT 对信号截断的影响, FFT 的长度选取 A/D 个数的整数倍, 这里取 16 倍, 信号频率  $f_0$  位于 FFT 分析的整频点并且没有位于偏

置误差频率出现的频率点上. 下面给出应用 Matlab 软件的仿真结果.

(1) 考虑  $M=2$  并且  $a_0=0$  时的情况, 假设  $a_1=0.2$ ,  $f_0/f_s=5/32$ , 此时信号应该位于 FFT 输出序列的第六点上, 附加的频率分量位于第一点和第十七点上. 按式 (7) 计算的信噪比的值为 16.9897dB. 图 6 给出了 FFT 的输出结果, 由图可以看出信号和附加频率点位置和理论分析的一致. 此时计算的信噪比为 16.9897dB, 和理论值相等. 按上述方法得到了由 0 到 0.5 式的仿真输出结果, 如图 7 所示. 比较图 4 和图 7 可以看出, 两条信噪比曲线完全一样, 说明了前面的理论推导的正确性.

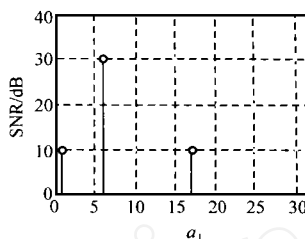


图 6 FFT 输出结果

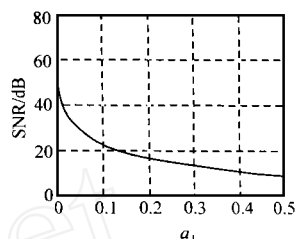


图 7  $M=2$  时的仿真结果

(2) 偏置误差是独立分布的随机变量.

均匀分布和高斯分布是两种常见的统计分布规律, 下面检验偏置误差是这两种分布的情况.

用 Matlab 软件产生  $M$  个独立分布的随机变量作为  $M$  个 A/D 的偏置误差, 把它和固定频率的输入正弦信号的和作  $16M$  点的 FFT, 此时误差信号的频率位于 FFT 输出的第  $1+16^*k$ , ( $k=0, 1, \dots, M-1$ ) 点上, 信号位于已知的频率点上, 这里选的输入频率  $f_0=5f_s/16M$ , 因此, FFT 输出结果的第六点是信号分量, 由此计算系统的信噪比. 由于误差信号是随机的, 必须多次求它们的频谱, 然后进行平均, 因此得到的信噪比和频谱平均的次数有关. 图 8 给出了平均次数分别为 10 和 100 的结果, 其中  $M=8$ , 图 8(a), (b) 是均匀分布结果, (c),

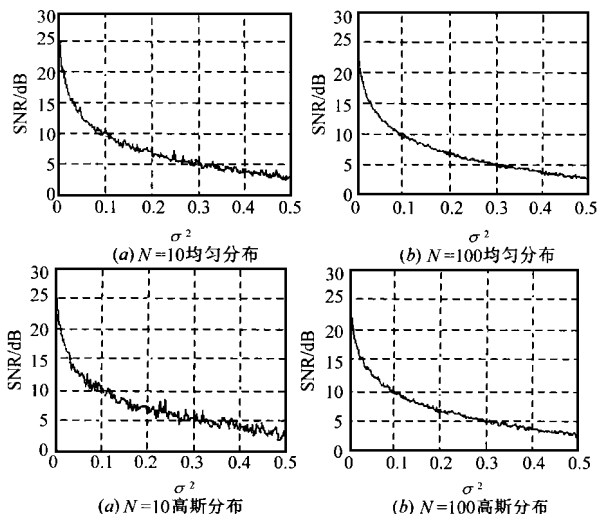


图 8 误差是独立分布随机变量的仿真结果

(d) 是高斯分布的结果. 图中横轴代表误差随机变量的方差, 纵轴代表信噪比的值, 单位是 dB.

将图 8 和图 5 进行比较可以看出,模拟值和理论值有一定的偏差,这是由于产生的随机变量不可能是严格的均匀或高斯分布的,而且均值也不为 0。当频谱平均的次数少时,信噪比和理论值的偏差大,随着频谱平均的次数的增加,二者的偏差愈来愈小,这符合随机变量的统计特性。另外,当误差的分布规律不同时,信噪比曲线变化规律相同,证明了信噪比和误差的分布无关。

## 5 结论

综上所述,得到如下结论。

(1) 在并行交替式取样系统中, A/D 的偏置误差对系统的影响是产生和 A/D 个数相同的附加频率分量,附加频率分量位于和采样频率和 A/D 个数有关的固定频率点上,并且等间隔地分布在频率轴上,其位置和输入信号的频率无关。

(2) 附加的频率分量降低了系统的信噪比,当误差是独立分布的随机变量时,信噪比只与信号的幅度和误差的方差有关,与误差的分布规律无关。

## 参考文献

- [1] 肖维民等. 软件无线电综述. 电子学报, 1998, 26(5): 65 ~ 68
- [2] A. Moutjo and K. Rush. Accuracy in Interleaved ADC system. HP journal, October, 1993: 31 ~ 38
- [3] Y. C. Jeng. Digital spectra of nonuniformly sampled signals: Fundamentals and high-speed waveform digitizers. IEEE Trans. Instrum. Meas., June 1988, 37: 245 ~ 251
- [4] Y. C. Jeng. Digital spectra of nonuniformly sampled signals: Robust sampling time offset estimation algorithm for ultra high-speed waveform digitizers using interleaving. IEEE Trans. Instrum. Meas., Feb. 1990, 39: 71 ~ 75
- [5] Y. C. Jeng. Perfect Reconstruction of Digital Spectrum from Nonuniformly Sampled Signals. IEEE Trans. Instrum. Meas., June 1997, 46: 649 ~ 652
- [6] Sophocles J. Orfanidis. Introduction to Signal Processing, 清华大学出版社, 1998: 508 ~ 510



林茂六 1943 年 10 月生于江西省泰和, 1967 年毕业于成都电讯工程学院电讯系。现任哈尔滨工业大学电子与通信工程系教授, 中国电子学会电子测量分会理事。目前主要研究领域为超高速数字化系统的体系结构, 非均匀取样理论及校准技术等。



解本钊 1971 年生于辽宁省凌源, 分别于 1992 年和 1996 年获得哈尔滨工业大学电子与通信工程系, 通信与电子系统专业学士和硕士学位。现为信号与信息处理专业博士研究生, 主要研究领域为超高速数字化系统理论, 非均匀取样信号处理等。



权太范 1950 年生于吉林省延边, 现为哈尔滨工业大学信号与信息处理专业博士导师, 主要研究领域为雷达信号处理, 目标跟踪与识别, 神经网络和数据融合技术等。

(上接 35 页)

- [2] A. Ziv and J. Bruck. Analysis of checkpointing schemes with task duplication. IEEE Trans. Computers, Feb. 1998, 37(2): 222 ~ 227
- [3] D. P. Siewiorek and R. S. Swarz. The theory and practice of reliable system design. Digital Press, 1982
- [4] P. Agrawal. Fault tolerance in multiprocessor systems without dedicated redundancy. IEEE Trans. Computers, Mar. 1988, 37(3): 358 ~ 362
- [5] A. Duda. The effects of checkpointing on program execution time. Information Processing Letters, June 1983, 16: 221 ~ 229
- [6] D. K. Pradhan, and N. H. Vaidya. Roll-Forward and Rollback Recovery: Performance-Reliability Trade-off. Proc. 24th IEEE Int'l Symp. Fault-Tolerant Computing, June 1994: 186 ~ 195
- [7] J. Long, W. K. Fuchs, and J. A. Abraham. Forward recovery using checkpointing in parallel systems. Proc. 19th Int'l Conf. Parallel Processing, Aug. 1990: 272 ~ 275
- [8] E. N. Elnozahy, D. B. Johnson and W. Zwaenepoel. The performance of consistent checkpointing. The 11th Symposium on Reliable Distributed Systems, 1992: 39 ~ 47
- [9] J. S. Plank, M. Beck and G. Kingsley. Libckpt: Transparent Checkpointing under Unix. 1995 USENIX Technical Conference, 1995: 213 ~ 223