

有色噪声中谐波频率的频域非线性预滤波估计方法

马淑芬, 吴嗣亮

(北京理工大学电子工程系, 北京 100081)

摘 要: 基于谐波信号表现为频域中的异常点这一思路, 利用滑动中值滤波器滤除数据异常点的能力, 本文提出了未知有色噪声背景下谐波信号频率的一种高分辨估计方法. 其突出特点是对噪声分布的强普适性, 且算法实现简单. 仿真结果验证了该方法的性能.

关键词: 信号处理; 频率估计; 有色噪声; 非线性滤波

中图分类号: TN957 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 06-0048-03

Sinusoid Frequency Estimation in Colored Noise Based on Nonlinear Prefiltering in Frequency Domain

MA Shu-fen, WU Si-liang

(Dept. of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Based on the observation that sinusoids show themselves as **outliers** in frequency domain, this paper proposes a new approach for the superresolution frequency estimation of sinusoids in an unknown colored noise environment by utilizing the capability of running median filters to remove outliers from data. The outstanding advantages of the method are its strong adaptability to various noise distributions and the simplicity of its implementing algorithm. Simulations are provided to show its performances.

Key words: signal processing; frequency estimate; colored noise; nonlinear filtering

1 引言

噪声中谐波信号的频率估计是信号处理中的一个典型问题, 已提出许多高分辨率的解决办法^[1,2]. 然而, 这些方法大多仅适用于白噪声或二阶统计特性已知的有色噪声情况, 未知统计特性的有色噪声将使这些方法的估计性能明显退化^[1,3]. 近年来, 人们开始将有色噪声背景下这一问题作为一个重要的研究课题. 基于噪声的高斯分布和 AR 模型假设, Bayesian 提出了一种频率估计方法^[3], 而文献[4~9]提出了极大似然频率估计法, 它们都归结为高度非线性的参数优化问题. 利用高阶累积量对高斯噪声的抑制能力, 文献[10]提出了适用于高斯有色噪声的谐波恢复方法. 文献[11~14]则利用三阶累积量对无二次相位耦合谐波信号的抑制作用, 提出了适用于非对称分布线性非高斯有色噪声的一类谐波信号频率估计方法. 最近, 文献[5]引入一种新的四阶累积量定义, 提出了对称或非对称分布线性非高斯有色噪声中的谐波恢复方法. 这些基于高阶累积量的方法不仅运算量较大, 样本累积量的高方差特点^[16]也限制了小样本情况的估计性能. 可见, 有色噪声背景下谐波信号的频率估计问题目前还没有十分有效的、适合任何噪声特性的解决办法.

本文从一个全新的角度看待有色噪声中谐波信号的频率估计问题, 认为信号的含噪观测量中信号成份是叠加于噪声

功率谱上的异常点或脉冲噪声, 利用一类典型的非线性滤波器(滑动中值滤波器)滤除脉冲噪声的能力^[17], 从含噪观测量的功率谱中获得有色噪声的功率谱, 进而获得与原谐波信号有相同频率分量的谐波信号的含白噪声观测量的功率谱或自相关函数, 再由现有白噪声背景下的方法^[1,2]获得信号频率的高分辨估计. 这种未知有色噪声中谐波信号的频率估计新方法其突出优点是对噪声特性的强普适性, 即适用于对称或非对称分布、线性或非线性的有色噪声. 此外, 其实现算法简单, 仅需在白噪声背景下的方法基础上附加很少的运算.

2 理论分析

设 M 个分量叠加的谐波信号为:

$$s(n) = \sum_{i=1}^M A_i \sin(\omega_i n + \phi_i) \quad (1)$$

其中 A_i , ω_i 分别为第 i 个分量的幅值和角频率, 它们为确定性未知常量; ϕ_i 为第 i 个分量的初相位, 是在 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布的随机变量且相互独立. $s(n)$ 的观测量为:

$$x(n) = s(n) + w(n) \quad (2)$$

其中 $\{w(n)\}$ 为各态遍历平稳随机观测噪声, 且与 $\{s(n)\}$ 相互独立. 显然, $\{x(n)\}$ 的功率谱为:

$$P_x(\omega) = P_w(\omega) + \sum_{i=1}^M \frac{1}{4} A_i^2 [\delta(\omega - \omega_i) + \delta(\omega + \omega_i)] \quad (3)$$

式中, $P_w(\cdot)$ 为 $\{w(n)\}$ 的功率谱, $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数.

根据式(3), 由于谐波信号的存在, 在观测量的功率谱上出现了 $2M$ 个异常点或脉冲噪声. 设法消除功率谱上的这些脉冲噪声, 将获得观测噪声的功率谱 $P_w(\cdot)$. 为此, 可以采用能够有效滤除脉冲噪声的非线性滤波器, 如滑动中值滤波器^[17], 对观测量功率谱 $P_x(\cdot)$ 进行频域非线性滤波.

一旦获得观测噪声功率谱 $P_w(\cdot)$, 由

$$\begin{aligned} P_y(\cdot) &= P_x(\cdot) / P_w(\cdot) \\ &= \frac{1}{4} \frac{A_i^2}{P_w(\cdot)} \cdot [f(\cdot - i) + f(\cdot + i)] + 1 \\ &= \frac{1}{4} \frac{A_i^2}{P_w(\cdot)} \cdot [f(\cdot - i) + f(\cdot + i)] + 1 \quad (4) \end{aligned}$$

可以得到以下谐波信号加白噪声的随机过程的功率谱:

$$y(n) = \frac{A_i}{\sqrt{P_w(\cdot)}} \sin(\cdot + i) + e(n) \quad (5)$$

其中 i 为在 $[-\pi, \pi]$ 上均匀分布的独立随机变量, $\{e(n)\}$ 为方差 $\sigma_e^2 = 1$ 的零均值白噪声. 因此, 现有白噪声背景下的高分辨频率估计方法, 如线性预报法、MUSIC 法、ESPRIT 法等, 均可用来从 $\{y(n)\}$ 的自相关函数, 即 $P_y(\cdot)$ 的 Fourier 反变换中, 获得 $\{i; i = 1, 2, \dots, M\}$ 的估计.

3 实现方法

给定谐波信号 $\{s(n)\}$ 含噪观测量的一个有限长度样本 $\{x_N(n); n = 0, 1, \dots, N-1\}$, 直接采用周期图来估计 $P_x(\cdot)$. 考虑与自相关函数的线性卷积计算相对应, 计算 $\{x_N(n)\}$ 的 $2N$ 点周期图:

$$P_x(k) = (1/N) |X_{2N}(k)|^2, (k = 0, 1, \dots, 2N-1) \quad (6)$$

其中,

$$X_{2N}(k) = DFT\{x_{2N}(n) \cdot d_N(n)\}, (k = 0, 1, \dots, 2N-1) \quad (7)$$

$$x_{2N}(n) = \begin{cases} x_N(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (8)$$

$\{d_N(n)\}$ 为考虑抑制频谱泄漏所加的长度为 N 的适当数据窗.

记

$$r_{x0}(m) = IDFT\{P_x(k)\}, (m = 0, 1, \dots, 2N-1) \quad (9)$$

不难证明:

$$r_{x0}(m) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} x_N(n) x_N(n+m) \cdot d_N(n) d_N(n+m) & 0 \leq m \leq N-1 \\ 0, & m = N \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{m-1} x_N(n) x_N(n-m+2N) d_N(n) d_N(n-m+2N), & N+1 \leq m \leq 2N-1 \end{cases} \quad (10)$$

由于对 $0 \leq m \leq N-1$,

$$\begin{aligned} E\{r_{x0}(m)\} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} E\{x_N(n) x_N(n+m)\} \cdot d_N(n) d_N(n+m) \\ &= r_x(m) \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-m} d_N(n) d_N(n+m) \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } r_x(m) &= r_{x0}(m) \cdot N \left[\sum_{n=0}^{N-1-m} d_N(n) d_N(n+m) \right]^{-1}, \\ &\quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (12) \end{aligned}$$

是 $\{x(n)\}$ 的自相关函数 $r_x(m)$ 的无偏估计. 式(11)中, $E\{\cdot\}$ 表示数学期望.

在周期图 $\{P_x(k)\}$ 上, 谐波信号各分量表现为有一定宽度的孤立的或相互交叠的谱峰. 记 N 点数据窗 $\{d_N(n)\}$ 的主瓣宽度为 $B_s \cdot (2/N)$, 则在 $\{P_x(k)\}$ 上, 孤立的谐波信号主谱峰的宽度将为 $2B_s \cdot (2/N)$, $\{s(n)\}$ M 个分量的累计主谱峰宽度满足

$$B_s \cdot (2/N) \leq 2MB_s \cdot (2/N) \quad (13)$$

取窗口长度为

$$L = 2K + 1 \geq 4MB + 1 \geq 2B_s + 1 \quad (14)$$

的滑动中值滤波器对 $\{P_x(k)\}$ 滤波, 并利用离散过程功率谱的周期性, 得

$$\begin{aligned} P_w(i) &= \text{med}\{\tilde{P}_x(i-K), \tilde{P}_x(i-K+1), \dots, \tilde{P}_x(i), \dots, \\ &\quad \tilde{P}_x(i+K)\}, (i = 0, 1, \dots, 2N-1) \quad (15) \end{aligned}$$

其中 $\{\tilde{P}_x(i)\}$ 是对 $P_x(k)$ 以 $2N$ 为周期进行延拓所得的周期序列, 即

$$\tilde{P}_x(i) = P_x(i \bmod 2N) \quad (16)$$

根据中值滤波器的性质(文[17]), 式(15)的中值滤波器可将谐波信号 $\{s(n)\}$ 的主谱峰从 $\{P_x(k)\}$ 上滤除掉. 滤波结果 $\{P_w(i)\}$ 用作观测噪声 $\{w(n)\}$ 功率谱 $P_w(\cdot)$ 的估计.

根据式(4), 式(5)过程 $\{y(n)\}$ 的 $2N$ 点周期图可估计为:

$$P_y(k) = P_x(k) / P_w(k), (k = 0, 1, \dots, 2N-1) \quad (17)$$

再由式(9)、(12), $\{y(n)\}$ 的自相关函数 $r_y(m)$ 可估计为:

$$\begin{aligned} r_y(m) &= N \left[\sum_{n=0}^{N-1-m} d_N(n) d_N(n+m) \right]^{-1} \cdot IDFT\{P_y(k)\}, \\ &\quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (18) \end{aligned}$$

由 $\{r_y(m)\}$ 可采用现有白噪声背景下的各种高分辨频率估计方法^[11,21] 估计谐波信号的频率 $\{i; i = 1, 2, \dots, M\}$. 现简述下一节获得仿真结果的 TLS-ESPRIT 法的估计过程:

(1) 取 $2M \leq J \leq N-1$, 形成 $(J+1) \times (J+1)$ 阶矩阵

$$R = \begin{bmatrix} r_y(0) & r_y(1) & \dots & r_y(J) \\ r_y(1) & r_y(0) & \dots & r_y(J-1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ r_y(J) & r_y(J-1) & \dots & r_y(0) \end{bmatrix}_{J+1}$$

(2) 计算对称矩阵 R 的特征分解: $R = \sum_{i=1}^{J+1} u_i u_i^T$. 其中

$\{i; i = 1, 2, \dots, J+1\}$ 为从大到小顺序的特征值; u_i 为对应 i 的特征向量.

(3) 由 $\{i; i = 1, 2, \dots, J+1\}$ 确定 R 的有效秩 $2M$.

(4) 形成主特征向量矩阵 $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{2M}]_{(J+1) \times 2M}$. 采用整体最小二乘 (TLS) 法求解方程 $U_1 F = U_2$, 获得 $2M \times 2M$ 阶方阵 F . 这里, U_1 和 U_2 分别为 U 删除第 $(J+1)$ 行和第一行所得的 $J \times 2M$ 阶矩阵.

(5) 计算方阵 F 位于复平面上右半平面的 M 个特征值 $\{z_i; i = 1, 2, \dots, M\}$, 并由 $\hat{\omega}_i = \arctan[\text{Im}(z_i) / \text{Re}(z_i)]$ 计算谐波

频率估计.

讨论:式(7)、(18)可采用 FFT 算法快速实现. 白噪声背景下的高分辨频率估计方法也可采用式(6)~(12)快速计算样本自相关函数. 与白噪声背景下的方法相比,前述方法仅增加了式(15)、(17)所需的运算. 式(15)不仅存在约需 $O(NL^2)$ 次比较运算的算法,也容易采用 VLSI 硬件实现^[17]. 同时,根据实过程周期图的对称性,实际仅需对 i 或 k 取 $0, 1, \dots, N$ 计算式(15)、(17).

4 数值仿真结果

为检验前述估计方法的可行性、高分辨性能和对噪声分布特性的普适性,进行 Monte Carlo 仿真. 仿真中噪声模型取自文献[11~15]. 应当指出, [11~15]中的仿真实例均不能检验算法的高分辨性能. 在此特别注意了这一点,所给实例中谐波信号频率间隔小于对应数据样本长度下经典频率估计方法的极限分辨率.

例:两个谐波叠加信号的含噪观测量为:

$$x(n) = \sqrt{2}\sin(2\pi f_1 n) + \sqrt{2}\sin(2\pi f_2 n + \pi/4) + w(n)$$

其中 $f_1 = 0.315$, $f_2 = 0.32$; $w(n)$ 为服从如下 ARMA 模型的有色观测噪声:

$$\begin{aligned} w(n) &= 1.4w(n-1) + 0.8w(n-2) \\ &= e(n) - 0.75e(n-1) - 2.5e(n-2) \end{aligned}$$

$\{e(n)\}$ 为零均值的各态遍历平稳白噪声. 信噪比定义为 $\text{SNR} = -10\log_{10} \frac{\sigma_w^2}{\sigma_x^2}$, σ_w^2 为 $w(n)$ 的方差. 数据样本长度取为 $N = 128$, TLS-ESPRIT 法的参数 J 取为 $J = 54$. 数据窗 $\{d_N(n)\}$ 取 Hamming 窗.

表 1 均匀分布有色噪声时的估计结果

SNR (dB)	L	f_1		f_2		分辨组数
		均 值	标准差	均 值	标准差	
- 5	23	0.31525	0.00086	0.31962	0.00098	85
	33	0.31499	0.00080	0.31948	0.00090	91
	43	0.31508	0.00087	0.31939	0.00071	89
0	23	0.31529	0.00042	0.31948	0.00034	99
	33	0.31532	0.00054	0.31946	0.00035	100
	43	0.31529	0.00041	0.31945	0.00033	100
5	23	0.31539	0.00022	0.31948	0.00019	100
	33	0.31539	0.00022	0.31947	0.00018	100
	43	0.31539	0.00022	0.31947	0.00018	100

表 2 高斯分布有色噪声时的估计结果

SNR (dB)	L	f_1		f_2		分辨组数
		均 值	标准差	均 值	标准差	
- 5	23	0.31495	0.00084	0.31953	0.00122	93
	33	0.31498	0.00083	0.31936	0.00061	93
	43	0.31490	0.00098	0.31933	0.00064	90
0	23	0.31536	0.00038	0.31946	0.00033	100
	33	0.31535	0.00037	0.31945	0.00032	100
	43	0.31533	0.00038	0.31944	0.00033	100
5	23	0.31539	0.00021	0.31947	0.00018	100
	33	0.31539	0.00021	0.31946	0.00018	100
	43	0.31538	0.00020	0.31946	0.00018	100

表 1~3 给出了在不同的观测噪声分布、SNR 和中值滤波

器窗口长度 L 情况下,对 100 组独立观测样本采用前述方法能够正确分辨两个信号分量的组数以及统计所得的频率估计的均值和标准差. 可见,前述方法可以高分辨地估计出高斯或非高斯、对称或非对称分布有色噪声中谐波信号的频率,且估计结果与噪声分布特性不相关;中值滤波器窗口长度 L 的取值在式(14)给定值附近对估计结果影响甚小.

表 3 四自由度 χ^2 分布有色噪声时的估计结果

SNR (dB)	L	f_1		f_2		分辨组数
		均 值	标准差	均 值	标准差	
- 5	23	0.31522	0.00072	0.31954	0.00094	92
	33	0.31522	0.00083	0.31944	0.00069	94
	43	0.31503	0.00099	0.31943	0.00073	90
0	23	0.31536	0.00039	0.31945	0.00035	99
	33	0.31536	0.00038	0.31944	0.00034	99
	43	0.31533	0.00045	0.31943	0.00035	99
5	23	0.31538	0.00021	0.31945	0.00019	100
	33	0.31538	0.00021	0.31945	0.00019	100
	43	0.31537	0.00021	0.31944	0.00019	100

5 结束语

本文基于谐波信号在频域表现出的异常性,首次在谐波信号的频率估计问题中引入中值非线性滤波技术作频域滤波预处理,将未知有色噪声背景下的问题转化成白噪声中谐波信号的频率估计,获得了一种对噪声分布特性强普适的高分辨估计方法. 实际上,该方法仅是对白噪声背景下的各种高分辨方法在采用 FFT 快速计算样本自相关函数的过程中附加了式(15)、(17)的运算. 因此,与有色噪声背景下的现有各种估计方法相比,该方法在计算复杂性方面也有明显的优势.

在频域滤波预处理中,本文仅采用了一种最简单的次序统计滤波器. 进一步可以研究其它能有效滤除脉冲噪声的非线性滤波器,如其它次序统计滤波器、各种形态滤波器等的应用. 此外,本文的方法不难推广应用于未知有色噪声背景下的多维谐波频率估计、方向估计、时延估计等问题.



马淑芬 1989 年获燕山大学硕士学位并留校任教. 1996 年到北京理工大学任教至今. 现为副教授. 目前主要从事现代信号处理的理论与应用、DSP 应用技术和传感技术等方面的研究.



吴嗣亮 1995 年获哈尔滨工业大学博士学位. 1996 年至 1998 年在北京理工大学雷达技术研究所做博士后研究,出站后留校. 现为副教授、中国电子学会高级会员. 曾获四项部级科技进步奖,发表论文三十余篇. 目前主要研究方向为现代信号处理的理论与应用、终点弹道测量技术和 DPS 应用技术.

(下转第 47 页)

制率这一特点,提出采用 RAT 方法,在信号的模糊平面上检测线性调频信号的调制率,进而得到转角信息。在实际应用中,通常需对多个纵向距离单元进行计算,然后对各估计值统计平均以便使估计值合理有效。与传统方法相比,该方法不需要目标的轨迹信息,且估计精度较高。同时,它无须隔离孤立散射点,具有较好的稳健性。仿真和实测数据的处理结果表明了该方法的有效性。

参考文献

- [1] Dale A. Ausherman et al. Developments in radar imaging. IEEE Trans on AES July 1984, AES-20(4):340~363
- [2] J. L. Walker. Range-Doppler imaging of rotating objects. IEEE Trans on AES Jan. 1980, AES-16(1):23~52
- [3] S. Werner et al. Moving target imaging algorithm for SAR data. IEEE Trans on AES Jan. 1990, 26(1):57~67
- [4] Benjamin C. Flores and Alberto Ugarte. Refinement of range-Doppler imagery by feedback control. SPIE Automatic Object Recognition, 1993(1960):36~46
- [5] M. Wang et al. Linear frequency-modulated signal detection using radon-ambiguity transform. IEEE Trans on SP Mar. 1998, 46(3):571~587

- [6] 863-308 主题十周年汇报-逆合成孔径雷达论文集, 1996



李 玺 1972 年出生, 1995 年获南京理工大学学士学位。现为该校硕博连读研究生。主要研究方向为雷达信号处理, 雷达成像技术。



顾 红 1967 年出生, 1988 年获南京理工大学通信与电子系统硕士学位。1995 年获西安电子科技大学通信与电子系统博士学位。现为南京理工大学副教授。研究方向为: 雷达信号处理, 噪声雷达系统, 目标识别等。

刘国岁 1933 年出生, 1953 年毕业于张家口通信工程学院, 现为南京理工大学教授兼电子工程技术研究中心总工程师, 博士生导师。主要从事噪声雷达理论与应用, 随机信号理论与应用, 神经网络与模糊系统, 近代信号处理等项研究。著书两本, 发表论文 100 余篇。

(上接第 50 页)

参考文献

- [1] 张贤达. 现代信号处理. 清华大学出版社, 1995
- [2] 吴嗣亮. 二维正弦波的系统模型等价描述与参数估计. 哈尔滨工业大学博士学位论文, 1995
- [3] C.-M. Cho, P. M. Djuric. Bayesian Detection and Estimation of Sinusoids in Colored Noise. IEEE Trans. SP, 1995, 43(12):2943~2951
- [4] C. Chatterjee, et al. Estimation of Close Sinusoids in Colored Noise and Model Discrimination. IEEE Trans. ASSP, 1987, 35(3):328~337
- [5] S. Kay & V. Nagesha. Maximum Likelihood Estimation of Signals in Autoregressive Noise. IEEE Trans. SP, 1994, 42(1):88~101
- [6] V. Nagesha & S. Kay. Spectral Analysis Based on the Canonical Autoregressive Decomposition. IEEE Trans. SP, 1996, 44(7):1719~1733
- [7] J. Li & P. Stoica. Efficient Mixed-Spectrum Estimation with Applications to Target Feature Extraction. IEEE Trans. SP, 1996, 44(2):281~295
- [8] P. Stoica, et al. Sinusoid Parameter Estimation in the Colored Noise Case: Asymptotic Cramer-Rao Bound, Maximum Likelihood, and Nonlinear Least-Squares. IEEE Trans. SP, 1997, 45(8):2048~2059
- [9] M. J. Turmon & M. I. Miller. Maximum Likelihood Estimation of Complex Sinusoids and Toeplitz Covariances. IEEE Trans. SP, 1994, 42(5):1074~1085
- [10] A. Swami & J. M. Mendel. Cumulant-Based Approach to the Harmonic Retrieval and Related Problems. IEEE Trans SP, 1991, 39(5):1099~1109
- [11] 梁应敞, 王树勋, 戴逸松. 非高斯有色噪声中的正弦信号频率估计. 电子学报, 1994, 22(4):6~12
- [12] Zhang X. D. & Li Y. D. Harmonic Retrieval in Mixed Gaussian and Non-Gaussian Noises. IEEE Trans. SP, 1994, 42(12):3539~3543
- [13] Zhang X. D. & Liang Y. C. Prefiltering-Based ESPRIT for Estimating Sinusoidal Parameters in Non-Gaussian ARMA Noise. IEEE Trans. SP, 1995, 43(1):349~353
- [14] Zhang X. D., et al. A Hybrid Approach to Harmonic Retrieval in Non-Gaussian Noise. IEEE Trans. IT, 1994, 40(7):1220~1226
- [15] 张严, 王树勋. 非高斯有色噪声中基于四阶累积量噪声建模的谐波恢复方法. 电子学报, 1998, 26(4):1~6
- [16] 张贤达. 时间序列分析——高阶统计量方法. 清华大学出版社, 1996
- [17] 陈贺新. 非线性滤波器与数字图像处理. 国防工业出版社, 1997