高阶模糊函数的收敛性分析

李宏伟[1], 袁保宗[2]
(1. 中国地质大学数理系, 武汉 430074; 2. 北方交通大学信息科学研究所, 北京 100044)

摘 要: 本文讨论用于多项式相位信号参数估计的高阶模糊函数的收敛性质. 对于复高斯白噪声污染的时变振幅多项式相位信号, 证明了其高阶模糊函数样本估计和相位多项式最高阶系数估计的强收敛性质. 特别地, 对于常数振幅情形, 得到了多项式系数估计的强收敛速度. 模拟实验证实了所得到的理论结果.

关键词: 多项式相位信号; 高阶模糊函数; 样本估计; 强收敛
中图分类号: TN911.7 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2000) 06-0064-04

Convergence Analysis of Higher-Order Ambiguity Function

LI Hong-wei[1], YUAN Bao-zong[2]
(1. *Department of Mathematics and Physics, China University of Geoscience, Wuhan 430074, China;*
2. *Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

Abstract: This paper addresses the convergence property of higher order ambiguity function (HAF), which is used to estimate the parameters of polynomial-phase signal (PPS). For time varying amplitude PPS in white complex Gaussian noise, the strong convergence of estimates of HAF and the highest order polynomial plase coefficient is proved. Specifically, the convergence rate of coefficient estimate is obtained in constant amplitude case. Simulations are performed to verify the theoretical results.

Key words: polynomial-phase signal; higher order ambiguity function; sample estimate; strong covergence

1 引言

多项式相位信号是信号处理领域中一个具有重要意义的模型, 它在雷达、声纳和通信等领域有广泛的应用[9]. 众所周知, 闭区间上任何连续函数可由一个多项式函数一致逼近 (Stone-Weierstass 定理), 因此多项式相位信号分析对于研究一般的瞬时相位信号也具有积极意义.

相位多项式系数的估计是多项式相位信号分析中的一个关键问题, 近年来提出的高阶模糊函数是讨论这个问题的一个有力工具[4~7,9]. 一方面, 高阶模糊函数不仅可以用来估计常数振幅线性调频 (Chirp) 信号的参数 (与文献[2]比较), 而且也用来讨论高阶相位多项式系数的估计[1,4~6]. 另一方面, 高阶模糊函数也被推广到研究时变振幅[9]和随机振幅[7]多项式相位信号的参数估计.

高阶模糊函数是一个非线性算子. 与最大似然估计算法[10]不同, 高阶模糊函数算法只要求一维序列极值的求取, 并且可通过付里叶变换 (FFT) 实现[4,9]. 由于高阶模糊函数算法的良好性能在不同振幅假设下被模拟实验所证明[4,7,9], 一些研究致力于高阶模糊函数算法的统计分析, 从而建立高阶模糊函数算法的理论基础. 在常数振幅假设下, 文献[5]导出了参数估计的 Cramer-Rao 下界, 文献[6]给出了系数估计的平均收敛速度和估计误差的方差表达式. 在时变振幅情形, 文献[9]证明了高阶模糊函数的样本估计的渐近无偏性和均方收敛性, 并得到了一类多项式相位信号的参数的 Cramer-Rao 下界, 在随机振幅情形, 文献[7]说明了用于多项式系数估计的循环统计量的均方收敛性质. 在高阶模糊函数算法的实现中, 人们常常是通过单一记录的有限个样本得到参数估计的. 已有的关于高阶模糊函数算法的渐近统计分析都未考虑多项式相位信号参数估计的强收敛 (或称几乎处处收敛) 性质, 这种收敛性质在统计信号处理领域经常被讨论.

因此, 本文讨论基于高阶模糊函数的时变振幅多项式相位信号的参数估计的强收敛性质. 在一定的加性噪声条件下, 证明高阶模糊函数样本估计和多项式相位系数估计的强收敛性. 对于常数振幅情形, 得到了系数估计的强收敛速度.

2 信号模型和高阶模糊函数

设 $y(t)$ 是如下的 M 阶时变振幅多项式相位信号[9]:

$$y(t)=\rho(t/T)\exp\{j\sum_{m=0}^{M}a_m t^m\},\ t=0,1,\cdots,T-1 \qquad (1)$$

其中, 时变振幅 $\rho(s)$ 满足下述假定.

假定 1 $\rho(s)$ 是一个定义在 $[0,1]$ 上的连续实函数, 并且 ρ 和 ρ 关于其参数向量的导数是 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

存在一大类函数满足假定 1[9], 特别地, ρ 可以是一个常数. 在实际问题中, $y(t)$ 经常被加性噪声污染, 即

$$x(t)=y(t)+v(t) \qquad (2)$$

收稿日期: 1998-03-09; 修订日期: 1999-12-29. 基金项目: 国家自然科学基金资助课题.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中, 加性噪声 $v(t)$ 满足以下假定.

假定 **2**　$v(t)$ 是具有零均值和有限方差 σ_v^2 的复高斯白噪声.

对于任意给定的正整数 M, τ, 一个复信号 $z(t)$ 的高阶模糊函数定义为[9]

$$P_M[z;\alpha,\tau]\triangleq\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}P_M[z(t);\tau]e^{-j\alpha t} \tag{3}$$

其中

$$P_M[z(t);\tau]\triangleq\prod_{q=0}^{M-1}[z^{(*\,q)}(t-q\tau)]^{(M-1\atop q)} \tag{4}$$

$$z^{(*\,q)}(t)\triangleq\begin{cases}z(t), & q\text{ 为偶数}\\ z^*(t), & q\text{ 为奇数}\end{cases} \tag{5}$$

对于无噪声污染的多项式相位信号 $y(t)$ 有:

$$P_M[y;\alpha,\tau]\triangleq\left\{\int_0^1[\rho(s)]^{2^{M-1}}ds\right\}e^{j\Phi}\delta(\alpha-\tilde{\omega}) \tag{6}$$

其中

$$\tilde{\omega}\triangleq M!\ \tau^{M-1}a_M \tag{7}$$

$$\Phi\triangleq(M-1)!\ \tau^{M-1}a_{M-1}-0.5M!\ (M-1)\tau^M a_M \tag{8}$$

因此, 根据 $|P_M|$ 峰值的位置可以得到相位多项式最高阶系数

$$a_M=\frac{1}{M!\ \tau^{M-1}}\arg\max_{\alpha}|P_M[y;\alpha,\tau]| \tag{9}$$

在获得 a_M 以后, 取 $y_1(t)=y(t)\exp\{-j\alpha_M t^M\}$. 那么, $y_1(t)$ 是一个 $M-1$ 阶多项式相位信号, 重复上述讨论可以得到 a_{M-1}, a_{M-2}, …, a_1. 这是高阶模糊函数算法的基本思想.

在实际应用中, 只能得到被噪声污染的 $x(t)$, 并且只有有限个样本(数据)可以用于参数估计, 即

$$\hat{P}_M[y;\alpha,\tau]\triangleq\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}P_M[y(t);\tau]e^{-j\alpha t} \tag{10}$$

其中,

$$\hat{P}_M[y(t);\tau]\triangleq P_M[x(t);\tau]=\prod_{q=0}^{M-1}[x^{(*\,q)}(t-q\tau)]^{(M-1\atop q)} \tag{11}$$

此时, a_M 的估计取为:

$$\hat{a}_M\triangleq\frac{1}{M!\ \tau^{M-1}}\arg\max_{\alpha}|\hat{P}_M[y;\alpha,\tau]| \tag{12}$$

由此产生的问题是, 在模型(2)之下, 式(12)定义的估计 $\hat{a}_M$ 是否以概率 1 收敛于其真值 a_M. 这正是本文所要讨论的.

3　估计的强收敛性

3.1　时变振幅情形下估计的强收敛性

在讨论高阶模糊函数和 a_M 的估计的强收敛性质之前, 先介绍下面的引理.

引理 **1**　设 $x(t)$ 满足模型(2)和假定 1~2, 那么 $\forall m\in Z$

$$\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_m}\sup_t|\operatorname{cum}\{x_0(t),x_1(t+\xi_1),\cdots,x_m(t+\xi_m)\}|<+\infty \tag{13}$$

其中, $x_k(t)\in\{x(t),x^*(t)\}$, $k=0,1,\cdots,m$. 引理 1 的证明见附录.

考虑 $P_M[y(t);\tau]$, 设

$$f(t)\triangleq P_M[y(t);\tau]=\prod_{q=0}^{M-1}[x^{(*\,q)}(t-q\tau)]^{(M-1\atop q)} \tag{14}$$

显然, 对于固定的 τ 和 M, $f(t)$ 是一个 2^{M-1} 阶的乘积过程, 由文献[3]中的引理 1 可知, 对于任意给定的 m, 有

$$\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_m}\sup_t|\operatorname{cum}\{f(t),f(t+\xi_1),\cdots,f(t+\xi_m)\}|<+\infty \tag{15}$$

式(15)对若干个 f 取共轭时亦成立.

由式(15)和文献[3]的定理 1 及其证明得到, 当 $\gamma>7/8$ 时

$$\sup_{\alpha}\left|\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}f(t)e^{-j\alpha t}-\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}Ef(t)e^{-j\alpha t}\right|\overset{\text{a.s.}}{=}o(1/T^{1-\gamma}) \tag{16}$$

其中, a.s. 表示以概率 1 收敛(强收敛).

由式(14)和 $\hat{P}_M[y(t);\tau]$ 的无偏性[9]可得 $Ef(t)=P_M[y(t);\tau]$. 由式(10), (16)和上式可知, 当 $\gamma>7/8$ 时

$$\sup_{\alpha}\left|\hat{P}_M[y;\alpha,\tau]-\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}P_M[y(t);\tau]e^{-j\alpha t}\right|\overset{\text{a.s.}}{=}o(1/T^{1-\gamma}) \tag{17}$$

上式进一步说明, 对于固定的 γ, 对 α 一致地有

$$\lim_{T\to\infty}\hat{P}_M[y;\alpha,\tau]\overset{\text{a.s.}}{=}P_M[y;\alpha,\tau] \tag{18}$$

式(18)说明, 在模糊(2)之下, 高阶模糊函数的样本估计是关于 α 一致强收敛于其真值的. 利用这一结果和式(9), (12), 有:

$$\hat{a}_M\xrightarrow{a.\,s.}a_M \tag{19}$$

即基于高阶模糊函数的相位多项式系数的估计是强收敛的.

3.2　常数振幅情形下系数估计的强收敛速度

下面来讨论常数振幅情形相位多项式系数 a_M 的估计的强收敛速度. 先给出一个一般性的引理.

引理 **2**　设 $z(t)=b_0e^{j\omega_0 t}+\omega(t)$, 其中 b_0 和 ω_0 为常数, $\omega(t)$ 为加性噪声, 且对于某一 $\beta_0\geq0$, 当 $\beta>\beta_0$ 时有 $\sup_{\omega}\left|\sum_{t=0}^{T-1}\omega(t)e^{-j\omega t}\right|\overset{\text{a.s.}}{=}O(T^{\beta})$. 若 ω_{0T} 是使 $|Z(\omega)|=\left|\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}z(t)e^{-j\omega t}\right|$ 达到极大的点, 则对于任何 $\gamma<(3-\beta_0)/2$ 有:

$$|\omega_{0T}-\omega_0|\overset{\text{a.s.}}{=}o(1/T^{\gamma}) \tag{20}$$

引理 2 的证明见附录.

在常数振幅情形下, $\rho(s)\equiv\rho$, 并且

$$P_M[y(t);\tau]=\rho^{2^{M-1}}e^{j\Phi}e^{j\tilde{\omega}t} \tag{21}$$

其中, Φ 和 $\tilde{\omega}$ 的表达式见式(7)和(8). 由式(17)可知, 当 $\gamma>7/8$ 时, 对 α 一致有

$$\hat{P}_M[y;\alpha,\tau]\overset{\text{a.s.}}{=}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\rho^{2^{M-1}}e^{j\Phi}e^{j(\tilde{\omega}-\alpha)t}+o(1/T^{1-\gamma}) \tag{22}$$

设 α_T 是使 $\hat{P}_M[y;\alpha,\tau]|$ 达到极大的点, 则由引理 2 有, 对于 $\gamma<(3-7/8)/2=17/16$, 有 $|\alpha_T-\tilde{\omega}|\overset{\text{a.s.}}{=}o(1/T^{\gamma})$. 即对于 $\gamma<17/16$.

$$|\hat{a}_M-a_M|=\frac{1}{M!\ \tau^{M-1}}|\alpha_T-\tilde{\omega}|\overset{\text{a.s.}}{=}o(1/T^{\gamma}) \tag{23}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

于是,得到了常数振幅多项式相位信号的基于高阶模糊函数的相位多项式系数估计的强收敛速度.

4 仿真实验

为了检验本文得到的关于多项式相位信号参数估计收敛性质的理论结果,进行了如下的数值仿真实验.

例:在模型(2)中,相位取为二阶多项式 $\Phi(t)=1.8+2.5t+0.5t^2$. 多项式相位信号的振幅为 $\rho(t/T)$(T 为样本长度),信号的有效振幅定义为 $\rho_e=\int_0^1\rho(s)\,ds$. 信噪比定义为 $SNR\triangleq 10log_{10}(\rho_e^2/\sigma_v^2)$. 其中,$\sigma_v^2$ 是加性高斯白噪声 $v(n)$ 的方差. 在实验中,σ_v^2 是根据不同的信噪比来选择的.

在高阶模糊函数中取 $\tau=1$,按式(10~12)进行估计.

取振幅 $\rho(t/T\equiv 1)$(常数振幅情形),系数 $a_2=0.5$ 在不同信噪比和不同样本情形的估计结果见表 1.

取振幅为 $\rho(t/T)=0.8-0.2(t/T)+0.9(t/T)^2$(多项式振幅情形),系数 $a_2=0.5$ 的估计结果见表 2.

取振幅为 $\rho(t/T)=\frac{1}{1-1/e}e^{-t/T}$(瞬变振幅情形),系数 $a_2=0.5$ 的估计结果见表 3.

表 1 常数振幅情形信号参数($a_2=0.5$)的估计结果

SNR	−10dB	−5dB	0dB	5dB	10dB
T=64	2.45436	2.40528	0.49087	0.49087	0.49087
T=128	1.59534	0.49087	0.49087	0.49087	0.49087
T=256	1.92668	0.50314	0.50314	0.50314	0.49087
T=512	0.49701	0.49701	0.49701	0.49701	0.49701
T=1024	0.50007	0.50007	0.50007	0.50007	0.50007

表 2 多项式振幅情形信号参数($a_2=0.5$)的估计结果

SNR	−10dB	−5dB	0dB	5dB	10dB
T=64	2.45436	2.40528	0.49087	0.49087	0.49087
T=128	1.59534	1.59534	0.49087	0.49087	0.49087
T=256	1.92668	1.92668	0.50314	0.50314	0.50314
T=512	0.11658	0.49701	0.49701	0.49701	0.49701
T=1024	0.50007	0.50007	0.50007	0.50007	0.50007

表 3 瞬变振幅情形信号参数($a_2=0.5$)的估计结果

SNR	−10dB	−5dB	0dB	5dB	10dB
T=64	2.45436	2.40528	0.49087	0.49087	0.49087
T=128	1.59534	1.81623	0.49087	0.49087	0.49087
T=256	1.92668	0.50314	0.50314	0.50314	0.49087
T=512	0.11658	0.49701	0.49701	0.49701	0.49701
T=1024	0.50007	0.50007	0.50007	0.50007	0.50007

表 1~3 表明,基于高阶模糊函数的多项式相位信号参数估计的精度和收敛速度都比较好,仅当信噪比较低时(−5dB 和−10dB),时变振幅的结果略差于常数振幅的结果,这与上一节证明的结果是一致的.

5 结论

本文讨论复高斯白噪污染的时变振幅多项式相位信号参数估计的统计性质. 对于一般的时变振幅多项相位信号,证明了其高阶模糊函数样本估计和相位多项式系数 a_M 估计的强收敛性质. 特别地对于常数振幅多项式相位信号,得到了多项式系数估计的强收敛速度. 这些结果和已有的关于多项式相位信号参数估计的平均收敛和 Cramer-Rao 下界的结果构成了高阶模糊函数方法的理论基础.

本文的分析是在时变振幅情形下进行的,这种分析方法可以推广到讨论随机振幅多项式相位信号参数估计[7]的强收敛性质.

参考文献

[1] S. Barbarossa and V. Petrone. Analysis of polynomial-phase signals by the integrated generalized ambiguity function. IEEE Trans., 1997, SP-45(2): 316~327

[2] P. M. Djuric and S. M. Kay. Parameter estimation of chirp signals. IEEE Trans., 1990, ASSP-38(12): 2118~2126

[3] H.-W. Li and Q.-S. Cheng. Almost sure convergence analysis of mixed time averages and kth-order cyclic statistics. IEEE Trans., 1997, IT-43(4): 1265~1268

[4] S. Peleg and B. Porat. Estimation and classification of polynomial-phase signals. IEEE Trans., 1991, IT-37(2): 422~430

[5] S. Peleg and B. Porat. The Cramer-Rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase. IEEE Trans., 1991, SP-39(3): 749~752

[6] B. Porat and B. Friedlander. Asymptotic statistical analysis of the higher order ambiguity function for parameter estimation of polynomial-phase signals. IEEE Trans., 1996, IT-42(3): 995~1001

[7] S. Shamsunder, G. B. Giannakis and B. Friedlander. Estimating random amplitude polynomial phase signals: A cyclostationary approach. IEEE Trans., 1995, SP-43(2): 492~505

[8] J. Wang. Some estimation problems for linear model of time series. China Ann. Math., A, 1983, 4: 19~35

[9] G. Zhou, G. B. Giannakis and A. Swami. On polynomial phase signals with time-varying amplitude. IEEE Trans., 1996, SP-44(4): 848~861

[10] G. Zhou and A. Swami. Performance analysis for a class of amplitude modulated polynomial phase signals. Proc. Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Detroit, MI, May, 1995: 1593~1596

附录

1 引理 1 的证明

在模型(2)和假定 1~2 之下,考虑三种情形:$m=0$, $m=1$ 和 $m\geq 2$.

当 $m=0$ 时,$\mathrm{cum}\{x(t)\}=\rho(t/T)\exp\{j\sum_{m=0}^{M}a_m t^m\}$

$$\sup_t|\mathrm{cum}\{x(t)\}|\leq\max_{[0,1]}|\rho(s)|<+\infty \qquad (24)$$

同理有:

$$\sup_t|\mathrm{cum}\{x^*(t)\}|<+\infty \qquad (25)$$

联合式(24)和(25)得到

$$\sup_t|\mathrm{cum}\{x_0(t)\}|<+\infty,\ x_0(t)\in\{x(t),x^*(t)\} \qquad (26)$$

当 $m=1$ 时,

$$\mathrm{cum}\{x(t),x(t+\xi_1)\}=\mathrm{cum}\{v(t),v(t+\xi_1)\}=0;$$

$$\mathrm{cum}\{x(t),x^*(t+\xi_1)\}=\mathrm{cum}\{v(t),v^*(t+\xi_1)\}=\sigma^2\delta(\xi_1).$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由以上两式可知

$$\sum_{\xi_1=-\infty}^{+\infty}\sup_t|\operatorname{cum}\{x_0(t),x_1(t+\xi_1)\}|<+\infty,$$

$$x_0(t),x_1(t)\in\{x(t),x^*(t)\} \tag{27}$$

当 $m\geq 2$ 时, 设 $x_0(t),x_1(t),\cdots,x_m(t)\in\{x(t),x^*(t)\}$, 有

$$\operatorname{cum}\{x_0(t),x_1(t+\xi_1),\cdots,x_m(t+\xi_m)\}=\operatorname{cum}\{v_0(t),v_1(t+\xi_1),\cdots,v_m(t+\xi_m)\}=0 \tag{28}$$

第二个等式是由 $v(t)$ 的高斯性假定得到的.

由式(26), (27)和(28)可知, $\forall m$ 都有

$$\sum_{\xi_1,\cdots,\xi_m}\sup_t|\operatorname{cum}\{x_0(t),x_1(t+\xi_1),\cdots,x_m(t+\xi_m)\}|<+\infty \tag{29}$$

其中, $x_k(t)\in\{x(t),x^*(t)\}$, $k=0,1,\cdots,m$. 引理 1 得证.

2　引理 2 的证明

仿照文献[8]的定理 2.1 给出证明. 令

$$W_T(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}\omega(t)e^{-j\omega t} \tag{30}$$

则有

$$Z(\omega)=\frac{1}{T}b_0e^{j0.5(T-1)(\omega_0-\omega)}\frac{\sin[0.5T(\omega_0-\omega)]}{\sin[0.5(\omega_0-\omega)]}+W_T(\omega) \tag{31}$$

对于 $\gamma<(3-\beta_0)/2$, 取 d 和 d_1 满足

$$\max\{1,\gamma\}<d<d_1<(3-\beta_0)/2 \tag{32}$$

取 β 满足

$$\beta_0<\beta<\min\{3-2d_1,1\} \tag{33}$$

此时,

$$|Z(\omega_0)|\geq|b_0|-\sup_\omega|W_T(\omega)|=|b_0|-C_1/T^{1-\beta},\ \text{a.s.} \tag{34}$$

另一方面, 对于满足式(32)的 d, 有

$$\sup_{T^{-d}\leq|\omega-\omega_0|\leq\pi}|Z(\omega)|\leq\sup_{T^{-d}\leq|\omega-\omega_0|}\left|\frac{\sin[0.5T(\omega_0-\omega)]}{\sin[0.5(\omega_0-\omega)]}\right|+\sup_\omega|W_T(\omega)|$$
$$=|b_0|\sqrt{1-C_2T^{2(2-d)-2}}+C_1/T^{1-\beta}$$
$$\leq|b_0|-C_3/T^{2d-2} \tag{35}$$

由式(32)和(33)知 $2d-2=1-(3-2d)<1-(3-2d_1)<1-\beta$. 比较式(34)和(35)有, 当 T 足够大以后

$$|Z(\omega_0)|\geq\sup_{T^{-d}\leq|\omega-\omega_0|\leq\pi}|Z(\omega)|,\ \text{a.s.} \tag{36}$$

上式说明, 以概率为 1 地当 T 足够大以后, $|Z(\omega)|$ 在 $(\omega_0-T^{-d},\omega_0+T^d)$ 中达到极大值, 即 $|\omega_{0T}-\omega_0|<1/T^d$, a.s. 由式(32)知 $\gamma<d$, 故

$$|\omega_{0T}-\omega_0|\overset{\text{a.s.}}{=}o(1/T^\gamma).$$

引理 2 得证.



李宏伟　教授, 1996 年获北京大学理学博士学位, 1998 年在北方交通大学完成博士后研究工作. 目前研究方向为非线性时间序列分析和非平稳信号处理.

袁保宗　教授, 博士导师. 目前研究领域为语音信号处理, 多媒体信息处理, 数据通讯和信息融合.

(上接第 63 页)

[3] 陈志坚. 脉间变频实现高分辨力成像. 现代雷达, 1989, 11(4): 31~35

[4] 杨军, 姚军奎, 郭英辉等. 毫米波频率步进雷达脉冲波形对目标辨识的影响. 兵工学报, 1998, 19(4): 322~327

[5] Abraham Paulose. High Radar Rang Resolution With the Step Frequency Waveform. Naval Postgraduate School Monterey, California, 1994

[6] 里海捷克. 雷达分辨理论. 北京: 科学出版社, 1980

[7] 林茂庸, 柯有安. 雷达信号理论. 北京: 国防工业出版社, 1984

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net