

分数阶 Fourier 域谱估计及其应用

张 峰,陶 然

(北京理工大学电子工程系,北京 100081)

摘 要: 本文定义了随机信号的分数阶功率谱和分数阶相关函数,得到了分数阶功率谱和分数阶相关函数的关系.在此基础上,推导出分数阶 Fourier 域滤波器的输入输出分数阶功率谱的关系.仿真结果表明,分数阶功率谱估计可以用于 chirp 信号的检测和估计,以及分数阶系统辨识.

关键词: 分数阶 Fourier 变换;分数阶域滤波;分数阶功率谱密度

中图分类号: TN911.7; TN957.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 09-1723-05

Power Spectral Estimation and Its Application in Fractional Fourier Domain

ZHANG Feng, TAO Ran

(Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: The definition of the fractional power spectrum and the fractional correlation for random signals are proposed, and the expression of the fractional power spectral density in terms of the fractional correlation function is described. Then, the fractional power spectral relations for the fractional Fourier filter are derived. Finally, the theory obtained is verified by simulations, and indicate the potential applications in chirp signals detection and fractional system identification.

Key words: fractional Fourier transform; filtering in fractional Fourier domain; fractional power spectral density

1 引言

在基于 Fourier 变换的线性时不变系统分析中,已经得到了随机信号输入与输出的统计关系,尤其是系统输入输出功率谱的关系,并广泛应用于滤波,信号识别,信号分离,系统辨识以及最佳线性系统设计等方面^[1~3].随着分数阶 Fourier 变换理论不断发展,其在信号处理领域的潜力也不断得到越来越多地挖掘^[4~12].分数阶 Fourier 变换是传统 Fourier 变换的广义形式,可以理解为时频平面的旋转,传统的时域和频域只是分数阶 Fourier 域的特例^[4,5,12].由于分数阶 Fourier 变换是在统一的时频域处理信号,相较 Fourier 变换,其增加的旋转角度参数,使得在分数阶 Fourier 域滤波灵活性更强,可以获得更好的滤波和检测性能^[4,5,7,8];并且分数阶 Fourier 变换具有成熟的离散快速算法^[13],避免了复杂的线性时变操作.在基于分数阶 Fourier 变换的 chirp 信号检测和估计,以及分数阶 Fourier 域滤波中,可以应用有限长观测数据的分数阶 Fourier 变换的模平方作为统计量进行检测估计和滤波,而该统计量本质上

为“分数阶功率谱”的估计^[9~12].那么针对随机信号的分数阶功率谱的具体定义是什么?是否还有其它的统计量可以作为分数阶功率谱的有效估计?随机信号通过分数阶 Fourier 域滤波器的输入输出功率谱关系是什么?本文首先给出了针对随机信号的分数阶功率谱和分数阶相关函数的定义,并且得到了分数阶功率谱和分数阶相关函数的关系.进而得到了分数阶 Fourier 域滤波器的输入输出功率谱关系.最后,仿真验证了理论的正确性,并表明分数阶功率谱估计可以用于 chirp 信号的检测和参数估计,以及分数阶系统辨识.

2 分数阶 Fourier 变换和分数阶域滤波

2.1 分数阶 Fourier 变换

分数阶 Fourier 变换作为传统 Fourier 变换的一种广义形式,可以看作信号在时频平面上的旋转.信号 $x(t)$ 的角度分数阶 Fourier 变换定义为^[14]:

$$X(u) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} K(u, t) x(t) dt \quad (1)$$

其中积分核为:

$$K(u, t) = \begin{cases} A e^{j \frac{t^2 + u^2}{2} \cot \alpha - j u t \csc \alpha}, & k \\ (u - t), & = 2k \\ (u + t), & = (2k + 1) \end{cases} \quad (2)$$

式中 $A = \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2}}$, k 取整数, F 表示角度分数阶 Fourier 变换算子. 可以看出, 当 $\alpha = \pi/2$ 时, 分数阶 Fourier 变换将变成 Fourier 变换. 关于分数阶 Fourier 变换详细的定义和性质可参考文献[12].

2.2 分数阶 Fourier 域滤波

图1为角度分数阶 Fourier 域滤波器. 输入信号首先进行角度的分数阶 Fourier 变换到分数阶 Fourier 域, 然后在分数阶 Fourier 域乘以滤波器函数 $H(u)$, 然后再经过 $-\alpha$ 角度的分数阶 Fourier 变换得到时域的输出[4,5,7].

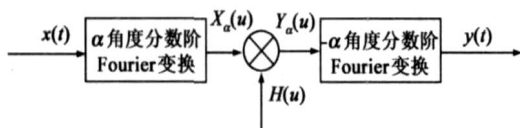


图1 分数阶 Fourier 域滤波

根据分数阶 Fourier 域滤波器的概念, 也就是:

$$Y(u) = H(u) X(u) \quad (3)$$

由分数阶卷积定理[15], 可以得到分数阶 Fourier 域滤波器的时域表示:

$$y(t) = \frac{|\csc \alpha|}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{t^2}{2} \cot \alpha} \tilde{x}(t) * \tilde{h}(t) \quad (4)$$

其中 $\tilde{x}(t) = x(t) e^{j \frac{t^2}{2} \cot \alpha}$, $\tilde{h}(t) = F^{-2} [H(u)](t \csc \alpha)$.

3 随机信号的分数阶功率谱估计和分数阶 Fourier 域滤波器输入输出分数阶功率谱的关系

3.1 分数阶功率谱和分数阶相关函数

设 $\tau(t)$ 为随机信号 $x(t)$ 的样本函数在时间 $[-T, T]$ 的截断函数, $\tilde{\tau}(u)$ 为 $\tau(t)$ 的角度分数阶 Fourier 变换, 则随机信号 $x(t)$ 的角度分数阶功率谱密度函数定义为:

$$P(u) = \lim_T \frac{E |\tilde{\tau}(u)|^2}{2T} \quad (5)$$

角度分数阶相关函数型定义为:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{.1}(\alpha) &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R(t_2 + \alpha, t_2) e^{j \frac{t_2^2}{2} \cot \alpha} dt_2, \\ &= R(t_2 + \alpha, t_2) e^{j \frac{t_2^2}{2} \cot \alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

型定义为:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{.2}(\alpha) &= \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R(t_1, t_1 - \alpha) e^{j \frac{t_1^2}{2} \cot \alpha} dt_1, \\ &= R(t_1, t_1 - \alpha) e^{j \frac{t_1^2}{2} \cot \alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $R(t_2 + \alpha, t_2)$ 和 $R(t_1, t_1 - \alpha)$ 为随机信号 $x(t)$ 的相关函数, $\alpha = t_1 - t_2$, \cdot 表示时间平均. 需要注意的

是, 由于随机信号 $x(t)$ 的相关函数 $R(t_1, t_2)$ 可以表示为 $R(t_2 + \alpha, t_2)$ 和 $R(t_1, t_1 - \alpha)$, 所以分数阶相关函数的定义具有两种等价形式.

下面考察分数阶功率谱和分数阶相关函数的关系.

$$\begin{aligned} P(u) &= \lim_T \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T \tilde{\tau}(t_1) e^{j \frac{t_1^2 + u^2}{2} \cot \alpha - j u t_1 \csc \alpha} dt_1 \right. \\ &\quad \left. \cdot A \int_{-T}^T \tilde{\tau}(t_2) e^{-j \frac{t_2^2 + u^2}{2} \cot \alpha + j u t_2 \csc \alpha} dt_2 \right] \\ &= \lim_T \frac{1}{2T} E \left[A A \int_{-T}^T dt_1 \int_{-T}^T e^{-j u(t_1 - t_2) \csc \alpha} e^{j \frac{t_1^2 - t_2^2}{2} \cot \alpha} \tilde{\tau}(t_1) \tilde{\tau}(t_2) dt_2 \right] \end{aligned} \quad (8)$$

令 $t_1 = t_2 + \alpha$, 有

$$\begin{aligned} P(u) &= A A \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T-\alpha}^{T-\alpha} dt \int_{-T}^T e^{-j u \csc \alpha} e^{j \frac{(2t_2 + \alpha)^2 - t_2^2}{2} \cot \alpha} \\ &\quad \cdot R(t_2 + \alpha, t_2) dt_2 \\ &= A A \int_{-T}^T e^{-j u \csc \alpha} d \left\{ \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R(t_2 + \alpha, t_2) e^{j \frac{(2t_2 + \alpha)^2 - t_2^2}{2} \cot \alpha} dt_2 \right\} \\ &= A A \int_{-T}^T e^{-j u \csc \alpha} e^{j \frac{\alpha^2}{2} \cot \alpha} d \left\{ \lim_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R(t_2 + \alpha, t_2) e^{j t_2^2 \cot \alpha} dt_2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

根据分数阶相关函数和分数阶 Fourier 变换的定义, 得到:

$$P(u) = A \cdot F[\bar{R}_{.1}(\alpha)](u) e^{-j \frac{u^2}{2} \cot \alpha} \quad (10)$$

类似的, 根据式(6), 令 $t_2 = t_1 - \alpha$, 可以得到:

$$P(u) = A \cdot F[\bar{R}_{.2}(\alpha)](-u) e^{j \frac{u^2}{2} \cot \alpha} \quad (11)$$

至此, 我们得到分数阶功率谱和分数阶相关函数的关系. 可以看出, 当变换角度 $\alpha = \pi/2$ 时, 式(10)和(11)退化为随机信号的功率谱密度同相关函数的关系: 随机信号的功率谱密度是相关函数时间平均的 Fourier 变换; 当输入又是平稳随机信号时, 进一步退化为传统的 Wiener-Khinchine 定理. 从分数阶功率谱的定义可以看出, 随机信号的分数阶 Fourier 变换的模平方只是分数阶功率谱的估计. 式(10)和(11)表明, 通过分数阶相关函数也可以估计分数阶功率谱. 结合分数阶功率谱的定义可以看出, 这里定义的分数阶功率谱是针对随机信号的, 本质上反映了随机信号功率谱密度在分数阶 Fourier 域的变化和分布. 对于随机信号的分数阶 Fourier 域分析, 不再是分数阶 Fourier 频谱, 而是功率谱. 对于随机信号的每一个具体实现, 首先计算其在分数阶 Fourier 域的平均功率, 然后对各次实现求时间平均得到随机信号的分数阶功率谱密度函数. 同时, 式(10)和(11)表明, 分数阶功率谱也可以定义为分数阶相关函数的分数阶

Fourier 变换,是传统理论在分数阶 Fourier 域的广义形式.

根据式(10)和(11)可以看出,分数阶功率谱估计也可以通过分数阶相关函数做分数阶 Fourier 变换间接得到.通过不同估计长度的分数阶相关函数,可以得到不同长度的分数阶功率谱估计.在实际应用上,一方面可以计算较少点数的分数阶相关函数,然后只需做相同点数的分数阶 Fourier 变换以降低计算量;另一方面对得到的分数阶相关函数可以先乘以一个窗函数,然后再做分数阶 Fourier 变换,这样就对估计的分数阶功率谱起到了平滑的作用.

类似地,分数阶互相关函数,分数阶互功率谱定义为:

$$\bar{R}_{,1}(\tau) = R(t_2 + \tau, t_2) e^{j\frac{\alpha}{2}\tau^2} \quad (12)$$

$$\bar{R}_{,2}(\tau) = R(t_1, t_1 - \tau) e^{j\frac{\alpha}{2}\tau^2} \quad (13)$$

其中 $R(t_2 + \tau, t_2)$ 和 $R(t_1, t_1 - \tau)$ 为随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数;

$$P(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|x(t_2 + u) - x(t_2)|^2]}{2T} \quad (14)$$

相应地,可以得到分数阶互功率谱和分数阶互相关函数的关系:

$$P(u) = A_{,1} \cdot F[\bar{R}_{,1}(\tau)](u) e^{-j\frac{\alpha}{2}u^2} \quad (15)$$

$$P(u) = A_{,2} \cdot F[\bar{R}_{,2}(\tau)](-u) e^{-j\frac{\alpha}{2}u^2} \quad (16)$$

同时,令 $\tau = 0$,由式(6)得到:

$$\bar{R}_{,1}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|x(t_2)|^2] \quad (17)$$

再结合式(10)得到:

$$\bar{R}_{,1}(0) = P(u) du \quad (18)$$

从上面两式可以看出,上面给出了分数阶功率谱的定义是合适的.

3.2 分数阶 Fourier 域滤波器输入输出分数阶功率谱的关系

由于分数阶 Fourier 域滤波比传统频域滤波更加灵活,尤其针对非平稳信号可以获得更好的滤波性能.因此有必要分析分数阶 Fourier 域滤波器 $H(u)$ 的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 谱关系.

根据分数阶 Fourier 域滤波器的时域输入输出关系,得到 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互相关函数为:

$$R(t_1, t_2) = E[x(t_1) \cdot y^*(t_2)] = E\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(u) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_1 - u)^2} du \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(u) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_2 - u)^2} du\right]^*\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(u) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_1 - u)^2} R(t_1 - u, t_2 - u) du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(u) e^{-j\frac{\alpha}{2}u^2} \left[R(t_1 - u, t_2) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_2 - u)^2} \right] du \quad (19)$$

根据分数阶相关函数的定义,得到 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的分数阶互相关函数为:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{,1}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(u) e^{-j\frac{\alpha}{2}u^2} \left[R(t_2 + \tau - u, t_2) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_2 - u)^2} \right] du\right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{h}(u) \left[R(t_2 + \tau - u, t_2) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_2 - u)^2} \right] du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(u) \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{ R(t_2 + \tau - u, t_2) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_2 - u)^2} \right\} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(u) \cdot \bar{R}_{,1}(\tau - u) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_2 - u)^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\alpha}{2}\tau^2} \left\{ \tilde{h}(\tau) * [\bar{R}_{,1}(\tau) e^{j\frac{\alpha}{2}\tau^2}] \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

对上式应用分数阶卷积定理,并结合分数阶 Fourier 域滤波器和分数阶功率谱的定义可以得到:

$$P(u) = H(u) \cdot P(u) \quad (21)$$

同时, $x(t)$ 的分数阶自相关函数可以写做:

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E\left\{x(t_1) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(v) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_2 - v)^2} dv\right]^*\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}^*(v) e^{-j\frac{\alpha}{2}(t_2 - v)^2} \cdot R(t_1, t_2 - v) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}^*(v) e^{-j\frac{\alpha}{2}v^2} \cdot R(t_1, t_2 - v) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}^*(v) e^{j\frac{\alpha}{2}(t_2 - v)^2} dv \quad (22) \end{aligned}$$

把上式带入 型分数阶相关函数定义,得到:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{,2}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{R(t_1, t_1 - \tau) e^{j\frac{\alpha}{2}\tau^2}\right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}^*(v) e^{-j\frac{\alpha}{2}v^2} \cdot R(t_1, t_1 - \tau - v) dv \right\} e^{j\frac{\alpha}{2}\tau^2} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}^*(v) \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{R(t_1, t_1 - \tau - v) e^{j\frac{\alpha}{2}(\tau - v)^2}\right\} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}^*(v) \cdot \bar{R}_{,2}(\tau - v) e^{j\frac{\alpha}{2}(\tau - v)^2} dv \quad (23) \end{aligned}$$

做变量代换 $v = v$, 并利用分数阶卷积定理得到:

$$\bar{R}_{,2}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}^*(v) \cdot \bar{R}_{,2}(\tau - v) e^{j\frac{\alpha}{2}(\tau - v)^2} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{j\frac{\alpha}{2} \cot(\cdot)} \left\{ \tilde{h}^*(v) [\bar{R}_{-2}(\cdot) e^{j\frac{\alpha}{2} \cot(\cdot)}] \right\} \right] \quad (24)$$

注意到 $\tilde{h}^*(v)$ 可以写为:

$$\begin{aligned} \tilde{h}^*(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} H^*(u) e^{ju \cot(\cdot)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H^*(-u) e^{ju \cot(\cdot)} du \end{aligned} \quad (25)$$

再利用分数阶卷积定理,可以看出,式(24)是角度的分数阶卷积,因此有:

$$F^{-1}[\bar{R}_{-2}(\cdot)](u) = H^*(-u) \cdot F^{-1}[\bar{R}_{-2}(\cdot)](u) \quad (26)$$

再根据分数阶功率谱的定义,得到:

$$P(u) = H^*(u) \cdot P(u) \quad (27)$$

再利用式(21)进一步可以得到:

$$P(u) = |H(u)|^2 \cdot P(u) \quad (28)$$

式(21)和式(28)为分数阶 Fourier 域滤波器的输入输出分数阶功率谱的关系,可以看出,当 $\alpha = \pi/2$ 时,式(21)和式(28)退化为传统的结论。需要注意的是,这里输入输出不再是平稳信号,但是输入输出分数阶功率谱依然保持着简单的关系。和传统的功率谱输入输出关系的作用类似,式(21)和(28)可以用于分数阶功率谱估计,分数阶系统辨识等方面。注意到,分数阶 Fourier 域滤波器实际上是一个线性时变系统,而由于在分数阶 Fourier 域分析输入输出关系,就转化为传统的 Fourier 域分析方法,对分数阶 Fourier 域滤波器系统函数的估计就可以采用传统针对线性时不变系统的估计方法,避免了复杂的线性时变操作。

4 仿真

仿真 1: 分数阶功率谱估计

我们考察含有加性高斯白噪声的 chirp 信号估计。其随机信号模型为:

$$x(t) = e^{j\frac{1}{2}0.16 \cdot t^2 + j u_1 t} + e^{j\frac{1}{2}0.16 \cdot t^2 + j u_2 t} + n(t) \quad (29)$$

其中 $n(t)$ 为复高斯白噪声,信噪比为 -6.5dB。采样点数为 $N = 512$, 采样周期为 $T = \sqrt{2}/N$, 待估计参数为

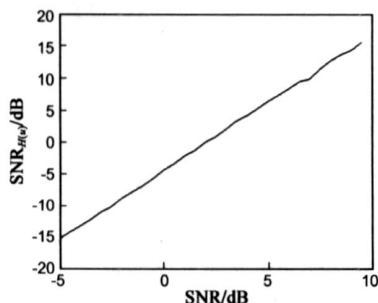


图 4 应用分数阶功率谱方法进行分数阶系统辨识

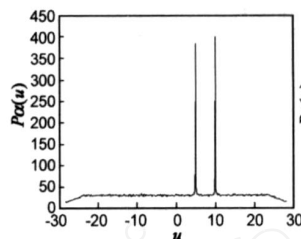


图 2 分数阶功率谱估计的模平方方法

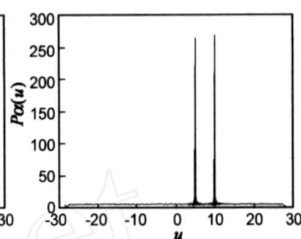


图 3 分数阶功率谱估计的相关函数方法

$u_1 = 5, u_2 = 10$.

根据分数阶 Fourier 变换的性质,待检测 chirp 信号在 $\alpha = \cot^{-1}(0.16) = 9/20$ 呈现能量聚集,因此我们估计 $\alpha = \cot^{-1}(0.16) = 9/20$ 的分数阶功率谱。根据前面的推导,采用两种方法进行估计,信号的分数阶 Fourier 变换的模平方方法和信号的角度的分数阶相关函数方法。采用 500 次的 Monte Carlo 仿真,得到的这两种分数阶功率谱估计的仿真见图 2 和图 3。

从仿真结果可以看出,两种分数阶功率谱估计的方法都可以有效地估计出 chirp 信号的参数。而采用分数阶功率谱估计的相关函数方法,由于可以对相关函数加窗然后做分数阶 Fourier 变换,所以应用起来更加灵活。

仿真 2: 分数阶系统辨识

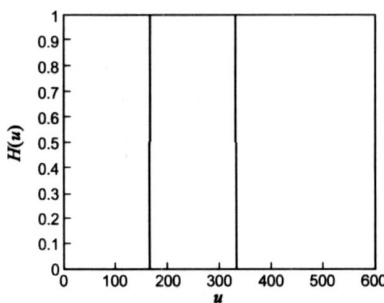
观测信号 $\tilde{x}(t)$ 由分数阶 Fourier 域滤波器输出 $x(t)$ 和加性高斯白噪声 $v(t)$ 构成:

$$\tilde{x}(t) = x(t) + v(t) \quad (30)$$

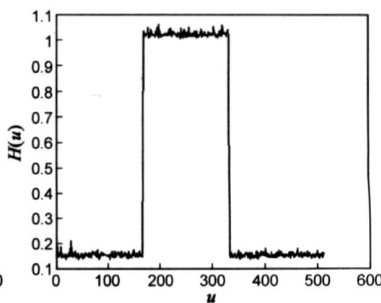
这里需要辨识的分数阶系统由 $\alpha = 0.28$ 的分数阶 Fourier 域滤波器转移函数表征,分数阶 Fourier 域滤波器的激励信号为 $x(t)$ 和观测噪声 $v(t)$ 统计独立的白噪声 $x(t)$ 。转移函数 $H(u)$ 的估计利用式(21),有:

$$H(u) = \frac{P^{-1}(u)}{P(u)} \quad (31)$$

图 4 为分数阶 Fourier 域转移函数辨识结果的信噪比相对于输出观测噪声信噪比的均值曲线,共进行了 500 次仿真。作为一个例子,图 5 显示了所采用的真实分数阶 Fourier 域系统函数和估计出的分数阶 Fourier 域系统函数曲线,信噪比为 10dB。



(a) 原始分数阶系统函数



(b) 分数阶系统辨识结果

图 5 系统辨识实例, 信噪比为 10dB

从仿真结果可以看出,利用分数阶 Fourier 域滤波器的输入输出关系,可以很好地估计出分数阶 Fourier 域滤波器的系统函数.

5 结论

本文定义了针对随机信号的分数阶相关函数和分数阶功率谱,并得到了它们之间的关系.接着推导了分数阶 Fourier 域滤波器的输入输出分数阶功率谱关系.研究表明,尽管分数阶 Fourier 域滤波器是线性时不变操作,其输入输出分数阶功率谱关系依然保持着简单的关系.仿真证明了理论推导,并表明分数阶功率谱估计可以用于 chirp 信号的检测和估计,以及分数阶系统辨识.

参考文献:

- [1] Cadzow J A. Spectral estimation: an overdetermined rational model equation approach[J]. Proc IEEE, 1982, 70(9): 907 - 939.
- [2] Key S M, Marple S L. Spectrum analysis—a modern perspective [J]. Proc IEEE, 1981, 69(11): 1380 - 1420.
- [3] Robinson E A. A historical perspective of spectrum estimation [J]. Proc IEEE, 1982, 70(9): 885 - 907.
- [4] Ozaktas H M, Barshan B, et al. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relationship to chirp and wavelet transforms[J]. J Opt Soc Amer A, 1994, 11(2): 547 - 559.
- [5] Kutay M A, Ozaktas H M, et al. Optimal filtering in fractional Fourier domain [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1997, 45(5): 119 - 1143.
- [6] Pei S C, Ding J J. Simplified fractional Fourier transforms [J]. J Opt Soc Amer A, 2000, 17(12): 2355 - 2367.
- [7] Erden M F, Kutay M A, et al. Repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains and its application to signal restoration[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1999, 47(5): 1458 - 1462.
- [8] Zalevsky Z, Mendlovic D. Fractional Wiener filter [J]. Appl Opt, 1996, 35: 3930 - 3936.
- [9] Tao R, Li B Z, Wang Y. Spectral Analysis and Reconstruction for Periodic Non-uniformly Sampled Signals in Fractional Fourier Domain [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2007, 55(7): 3541 - 3547.
- [10] 陶然, 邓兵, 等. 分数阶 Fourier 变换在信号处理领域的研究进展[J]. 中国科学 F 辑, 2006, 49(1): 1 - 25.

Tao R, Deng B, et al. Research progress of the fractional Fourier transform in signal processing [J]. Science in China, Ser F, 2006, 49(1): 1 - 25. (in Chinese)

- [11] 齐林, 陶然, 等. DSSS 系统中基于分数阶 Fourier 变换的扫频干扰抑制算法[J]. 电子学报, 2004, 32(5): 799 - 802. Qi L, Tao R, et al. Frequency sweeping interference suppressing in DSSS system using fractional Fourier transform[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(5): 799 - 802. (in Chinese)
- [12] 陶然, 齐林, 王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. 1 - 180. Tao R, Qi L, Wang Y. Theory and Applications of Fractional Fourier Transform [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 1 - 180. (in Chinese)
- [13] Ozaktas H M, Arkan O, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44(9): 2141 - 2150.
- [14] Almeida L B. The fractional Fourier transform and time-frequency representations [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(11): 3084 - 3091.
- [15] Zayed A I. A convolution and product theorem for the fractional Fourier transform [J]. IEEE Trans Signal Processing Lett, 1998, 5(5): 101 - 103.

作者简介:



张 峰 男, 1981 年 4 月生于河南省新乡市, 现为北京理工大学博士研究生. 主要研究方向是非平稳信号处理, 分数阶 Fourier 变换理论及其应用, 数字水印等. E-mail: oUo@bit.edu.cn



陶 然 男, 1964 年 11 月生于安徽省南陵县. 现任北京理工大学信息科学技术学院副院长, 信息安全与对抗研究中心主任, 信息安全与对抗学科首席教授, 博士生导师, 电子学会会士, Senior Member of the IEEE. 2000 年获教育部“高校青年教师奖”, 2003 年获“中国兵工青年科技奖”. 2006 年获得国家杰出青年科学基金, 2007 入选新世纪百千万人才工程国家级人选. 还获部

级科技进步一等奖 2 项, 部级科技进步二等奖 2 项. 发表论文被 SCI 收录 20 余篇, EI 收录 80 余篇. 近三年以第一作者在国际著名学术刊物发表论文 8 篇, 出版信号处理领域著作教材 2 部, 获发明专利 10 项, 软件著作权 8 项. E-mail: rantao@bit.edu.cn