

# 道路条件下车辆跟踪的鲁棒 $H_\infty$ 滤波算法

马海平, 阮谢永, 朱敏杰, 金宝根  
(绍兴文理学院物理与电子信息系, 浙江绍兴 312000)

**摘 要:** 为提高对车辆目标的跟踪效果, 本文提出了一种带道路约束条件的鲁棒  $H_\infty$  滤波算法. 注意到车辆在行驶过程中会受到道路的约束, 从而利用以道路抽象出的直线方程作为滤波的约束条件, 建立带道路约束的动态系统模型, 并推导出约束条件下的鲁棒  $H_\infty$  滤波方程. 实验仿真结果表明, 本文所提出的带约束条件的  $H_\infty$  滤波算法比不带约束的  $H_\infty$  滤波算法以及同等条件下的卡尔曼滤波算法具有更好的滤波性能和更高的跟踪精确度.

**关键词:** 车辆跟踪; 道路约束;  $H_\infty$  滤波; 鲁棒性

**中图分类号:** TN953 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 12-2363-04

## Robust $H_\infty$ Filter Algorithm for Vehicle Tracking under Road Situation

MA Hai ping, RUAN Xie yong, ZHU Min jie, JIN Bao gen

(Department of Physics and Electrical Engineering, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing, Zhejiang 312000, China)

**Abstract:** To enhance the quality for vehicle tracking, a robust  $H_\infty$  filter algorithm under road situation is proposed in this paper. It notices that the running vehicles are constrained by the road network. Using the road network as filtering constraint condition, a dynamical system model with road constraint is built and the corresponding robust  $H_\infty$  filtering equation is derived. The simulation results show that, the proposed algorithm has more tracking accuracy and better filtering performance than unconstrained  $H_\infty$  filter and Kalman filter algorithm.

**Key words:** vehicle tracking; road constraint;  $H_\infty$  filter; robustness

### 1 引言

地面目标区别于空中目标的突出特点是目标所处的环境大不相同, 其运动往往受到外部因素的制约, 这些因素包括道路网和变化的地形条件, 其中道路约束条件是最具吸引力的信息. 汽车在行驶过程中, 所行驶的道路对其存在着一些约束, 从而可以充分利用这些信息来提高车辆跟踪的精度. 常规卡尔曼滤波能够从随机干扰中实时地估计出最优状态, 且算法简单, 在目标跟踪领域中有广泛和成功的应用<sup>[1]</sup>. 但是卡尔曼滤波器要求对动态系统建立精确的模型, 并且需要准确地知道各种随机干扰的统计特性, 否则其滤波精度就会下降甚至出现滤波发散. 为了提高目标跟踪的精确性, 许多学者已经对其作了很多研究. 近年来,  $H_\infty$  滤波方法<sup>[2,3]</sup> 被提了出来, 但是在目标跟踪上的应用还比较少.  $H_\infty$  滤波是将鲁棒控制设计中引入的性能指标  $H_\infty$  范数应用于滤波, 以解决系统中存在的各种不确定性问题. 其设计思想是将噪声看成是能量有限的随机信号, 使系统的扰动输入到估计误差的传递函数的  $H_\infty$  范数小于给定正数  $\gamma$ , 确保在扰动输入最大的情况下最小化估计误差, 因

而, 对外界干扰具有很强的鲁棒性.

本文的目的是研究将约束条件引入到  $H_\infty$  滤波算法中<sup>[4,5]</sup>, 利用汽车所行驶的道路对汽车运动方向的约束来提高车辆跟踪的精度. 实验结果表明, 考虑道路约束条件后的  $H_\infty$  滤波算法具有很强的抗干扰性和自适应性, 有效地提高了车辆跟踪的精度.

### 2 算法设计

#### 2.1 $H_\infty$ 滤波

考虑以下随机线性离散时间系统:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k + d_k \\y_k &= C_k x_k + m_k \\z_k &= L_k x_k\end{aligned}\quad (1)$$

式中,  $x_k$  为系统的状态向量,  $y_k$  为系统的量测向量,  $z_k$  为待估计向量, 是状态向量的线性组合.  $A_k$ 、 $B_k$  分别为系统的状态转移矩阵和干扰输入矩阵,  $C_k$  为观测矩阵,  $L_k$  是给定的系数矩阵.  $w_k$ 、 $m_k$  分别为系统的过程噪声和量测噪声, 假定相互无关联, 且与系统的初始状态  $x_0$  无关的单位白噪声,  $d_k$  为系统的未知扰动.

设计如下形式的滤波器

$$\hat{z}_k = F_f(y_0, y_1, \dots, y_k) \quad (2)$$

其中  $\hat{z}_k$  表示在给定观测值  $\{y_k\}$  条件下对  $z_k$  的估计.

定义状态估计误差为

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (3)$$

设  $T_k(F_f)$  表示将未知干扰  $\{(x_0, \dot{x}_0), w_k, m_k\}$  映射至估计误差  $\{L_k e_k\}$  的传递函数, 则  $H_\infty$  滤波问题<sup>[6]</sup>可以描述为: 给定正数  $\gamma > 0$ , 寻找估计  $\hat{z}_k$ , 使得  $\|T_k(F_f)\|_\infty < \gamma$ , 既满足:

$$\inf_{F_f} \sup_{x_0, \dot{x}_0 \in h_2, m \in h_2} \frac{\|L_k e_k\|_2^2}{\|x_0 - \dot{x}_0\|_2^2 + \|w_k\|_2^2 + \|m_k\|_2^2} < \gamma^2 \quad (4)$$

## 2.2 带约束条件的 $H_\infty$ 滤波

已知对于系统存在约束条件:

$$D_k x_k = M_k \quad (5)$$

其中  $D_k$  为归一化满秩矩阵, 即满足  $D_k D_k^T = I$ .

因此, 带约束条件的  $H_\infty$  滤波就是寻找估计  $\hat{z}_k$  的同时, 要求状态估计  $\hat{x}_k$  满足条件  $D_k \hat{x}_k = M_k$ .

为了使滤波器的估计无偏差, 且具有预测修正结构, 则状态估计器应具备观测器的结构形式:

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + K_p(y_k - C_k \hat{x}_k) \quad (6)$$

其中  $K_p$  为状态估计器的增益矩阵.

同时, 为了满足系统扰动输入到估计误差的传递函数的  $H_\infty$  范数有界, 定义式(1)中的未知扰动  $d_k$  为

$$d_k = K_e(L_k(x_k - \hat{x}_k) + n_k) \quad (7)$$

其中  $K_e$  为待定的增益矩阵,  $n_k$  为与  $w_k, m_k$  无关的单位白噪声,  $L_k$  为根据扰动输入的可变系数矩阵, 当  $L_k = 0$  时, 其扰动输入变为统计特性已知的白噪声, 则  $H_\infty$  滤波可简化为卡尔曼滤波, 从而可以得到较好的均方估计误差性能.

将式(1)和(6)代入式(3), 同时结合式(7)得到状态估计误差为

$$e_{k+1} = (A_k - K_p C_k + K_e L_k) e_k + B_k w_k + K_p m_k - K_e n_k \quad (8)$$

假定噪声系统和无噪声系统均满足约束条件(5), 则有  $D_{k+1} A_k x_k = D_{k+1} x_{k+1} = M_{k+1}$ , 同理状态估计  $\hat{x}_k$  满足  $D_{k+1} A_k \hat{x}_k = M_{k+1}$ , 结合式(3)得  $D_{k+1} A_k e_k = 0$ , 令  $V_k = D_{k+1}^T D_k$ , 有

$$D_{k+1}^T D_{k+1} A_k e_k = V_{k+1} A_k e_k = 0 \quad (9)$$

将式(8)减去0, 即减去式(9)得到

$$e_{k+1} = ((I - V_{k+1}) A_k - K_p C_k + K_e L_k) e_k + B_k w_k + K_p m_k - K_e n_k \quad (10)$$

为避免当  $K_e$  增大时, 增加扰动输入  $d_k$ , 从而增大估计误差  $e_k$ , 令  $e_k = e_1(k) + e_2(k)$ , 其中

$$e_1(k+1) = ((I - V_{k+1}) A_k - K_p C_k + K_e L_k) e_1(k) + B_k w_k - K_p m_k, \quad e_1(0) = x_0 \quad (11)$$

$$e_2(k+1) = ((I - V_{k+1}) A_k - K_p C_k + K_e L_k) e_2(k)$$

$$+ K_e n_k, \quad e_2(0) = 0 \quad (12)$$

对于式(1)的系统, 为使式(4)的  $H_\infty$  范数存在, 定义如下性能指标函数<sup>[7]</sup>:

$$J(K_p, K_e) = \text{tr} \left[ \sum_{k=0}^N W_k E(e_1(k) e_1^T(k) - e_2(k) e_2^T(k)) \right] \quad (13)$$

其中  $W_k$  是任意正定加权矩阵. 如果性能指标函数式(13)存在极值, 则式(4)的  $H_\infty$  范数有界, 即式(4)的滤波问题转化为求性能指标函数式(13)的优化问题, 要求确定一个增益矩阵  $K_p$ , 使得性能指标函数  $J$  取极小值, 同时对扰动而言, 确定一个矩阵  $K_e$  使得性能指标函数  $J$  取极大值, 即  $J$  是关于  $K_e$  和  $K_p$  的函数, 其最优解  $K_p^*$  和  $K_e^*$  满足

$$J(K_p^*, K_e) \leq J(K_p^*, K_e^*) \leq J(K_p, K_e^*) \quad (14)$$

引理 1<sup>[7]</sup> 对式(13)的性能指标函数, 可表示为

$$J(K_p, K_e) \leq \text{tr} \left[ \sum_{k=0}^N W_k Q_k \right] \quad (15)$$

其中  $Q_k$  满足如下二次差分方程:

$$\begin{cases} Q_0 = E(x_0 x_0^T) \\ Q_{k+1} = F_k Q_k F_k^T + B_k B_k^T + K_p K_p^T - K_e K_e^T \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{其中 } F_k = (I - V_{k+1}) A_k - K_p C_k + K_e L_k \quad (17)$$

证明: 根据定义

$$Q_1(k) = E(e_1(k) e_1^T(k)), \quad Q_2(k) = E(e_2(k) e_2^T(k)) \quad (18)$$

将式(11)、式(12)代入式(18)即可得到

$$\begin{cases} Q_1(k+1) = F_k Q_1(k) F_k^T + B_k B_k^T + K_p K_p^T, \quad Q_1(0) = E(x_0, x_0^T) \\ Q_2(k+1) = F_k Q_2(k) F_k^T + K_e K_e^T, \quad Q_2(0) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

则  $Q_k = Q_1(k) - Q_2(k)$ , 引理证毕.

定理 1 假设  $\tilde{Q}_k$  和  $\Sigma_k$  是下列方程的非奇异解:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{k+1} = (I - V_{k+1}) A_k \Sigma_k A_k^T (I - V_{k+1}) + B_k B_k^T, \\ \tilde{Q}_0 = E(x_0, x_0^T) \end{cases} \quad (20)$$

$$\tilde{Q}_k (I - C_k^T C_k \Sigma_k) = (I - \tilde{Q}_k L_k^T L_k) \Sigma_k \quad (21)$$

且

$$I + C_k \tilde{Q}_k C_k^T > 0 \quad (22)$$

$$I - L_k \tilde{Q}_k L_k^T > 0 \quad (23)$$

则增益矩阵

$$\begin{cases} K_p^* = (I - V_{k+1}) A_k \Sigma_k C_k^T \\ K_e^* = (I - V_{k+1}) A_k \Sigma_k L_k^T \end{cases} \quad (24)$$

满足性能指标函数不等式(14), 即式(4)的  $H_\infty$  范数存在. 该定理的详细推导过程类似文献[7]中定理 1 的证明.

定理 2 如果存在增益矩阵式(24), 那么均方估计误差必定有上界, 满足

$$E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \leq \tilde{Q}_k \quad (25)$$

即在保证估计误差满足给定的扰动抑制度下, 使得估计误差  $H_2$  的范数有界, 实现系统的  $H_2/H_\infty$  滤波器. 其证明过程参见文献[7]中定理 4 的证明.

2.3 计算步骤

综上所述, 带约束条件的  $H_\infty$  滤波算法的主要步骤如下:

**Step1** 初始化条件. 令  $\hat{x}_0 = 0$ ,  $\tilde{Q}_0 = E(x_0, x_0^T)$ , 同时对  $D_k$  进行归一化, 满足  $D_k D_k^T = I$ .

**Step2** 选择合适的系数矩阵  $L_k$ . 当  $L_k = 0$  时, 假定过程噪声  $w_k$  为零均值的白噪声, 则  $H_\infty$  滤波简化为卡尔曼滤波. 当  $L_k$  取最大值时, 滤波器的鲁棒性最好, 但是均方估计误差不一定最小.

**Step3** 更新状态估计. 带约束条件的  $H_\infty$  滤波递推公式:

$$\begin{cases} V_{k+1} = D_{k+1}^T D_{k+1} \\ \Sigma_k = (\tilde{Q}_k C_k^T C_k - \tilde{Q}_k L_k^T L_k + I)^{-1} \tilde{Q}_k \\ \tilde{Q}_{k+1} = (I - V_{k+1}) A_k \Sigma_k A_k^T (I - V_{k+1}) + B_k B_k^T \\ K_p = (I - V_{k+1}) A_k \Sigma_k C_k^T \\ \hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + K_p (y_k - C_k \hat{x}_k) \end{cases} \quad (26)$$

**Step4** 检测  $H_\infty$  滤波器存在条件  $(I - L_k^T \tilde{Q}_k L_k) > 0$ . 如果条件满足, 则增大  $L_k$ , 重新迭代, 直到逼近  $H_\infty$  最优滤波解.

3 仿真实验及分析

为验证上述算法的有效性以及引入道路约束条件后滤波性能的改善程度, 考虑在道路上行驶的车辆, 通过车载 GPS 接收机, 可以获得其在二维平面坐标系中的位置信息[8]. 选取系统状态变量为

$$x = [s_x, v_x, s_y, v_y]^T \quad (27)$$

其中  $s_x, v_x$  和  $s_y, v_y$  分别为车辆在  $x$  轴和  $y$  轴方向上的位置和速度分量. 其状态方程和量测方程为:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ T \cos \theta \\ 0 \\ T \sin \theta \end{bmatrix} u_k + B_k w_k + d_k \quad (28)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + m_k \quad (29)$$

其中  $w_k$  为单位过程白噪声,  $d_k$  为未知扰动,  $u_k$  为给定的加速度,  $T$  为采样周期,  $\theta$  为导航角,  $m_k$  为量测白噪声, 假定大小为  $\sigma$ , 为使  $m_k$  满足单位白噪声, 应对量测方程式(29)进行归一化处理, 即  $y_k' = \sigma^{-1} y_k$ .

车辆在行驶过程中, 通常要沿着某条道路前行, 大部分的道路可以抽象为由若干条直线段连接而成的折

线. 显然, 直线方程就是车辆运动的约束条件, 表示为

$$\begin{cases} s_y = \tan \theta \cdot s_x + s_0 \\ v_y = \tan \theta \cdot v_x \end{cases} \quad (30)$$

写成矩阵的形式为:

$$D_k x_k = M_k \quad (31)$$

其中

$$D_k = \begin{bmatrix} -\tan \theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\tan \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_k = [s_0 \quad 0]^T \quad (32)$$

为满足  $D_k D_k^T = I$ , 使  $D_k = D_k \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$ .

假设车辆初始状态为  $x_0 = [100 \quad 0 \quad 58 \quad 0]^T$ , 其在  $x$  轴和  $y$  轴的观测噪声方差为  $30\text{m}$ , 加速度为  $\pm 1\text{m/s}^2$ , 采样周期为  $1\text{s}$ , 导航角为  $30\text{deg}$ , 参数矩阵  $L_k = I/\gamma$ , 取  $\gamma = 35$ . 将带约束条件的  $H_\infty$  滤波和不带约束条件的  $H_\infty$  滤波与带约束条件的卡尔曼滤波及不带约束条件的卡尔曼滤波进行比较, 通过 100 次的 Monte Carlo 仿真, 得出这四种算法的跟踪误差曲线如图 1、2 所示.

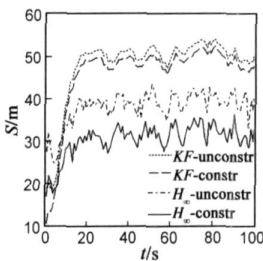


图1 目标车辆的位置均方根误差曲线

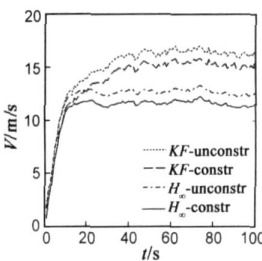


图2 目标车辆的速度均方根误差曲线

其中图 1 表示车辆的位置均方根误差, 从图中可以看出, 带约束条件的  $H_\infty$  滤波的跟踪精度明显好于其它的滤波算法, 其误差曲线完全包络在其它三种算法误差曲线内. 图 2 表示车辆的速度均方根误差, 其性能同位置误差曲线类似. 表 1 列出了四种算法的均方根误差比较, 可以看出带约束条件的  $H_\infty$  滤波算法整体性能有明显的提高, 跟踪目标的精确性要优于其它的滤波算法.

表 1 四种算法的均方根误差比较

	$H_\infty$ 滤波算法		卡尔曼滤波算法	
	带约束	不带约束	带约束	不带约束
位置/m	30.518	38.142	45.993	48.049
速度(m/s)	11.094	12.162	13.887	15.007

4 结论

针对道路条件下车辆跟踪问题, 提出了带道路约束的  $H_\infty$  滤波算法. 该算法利用地面目标的特点建立了带道路约束条件的系统模型, 并推导了相应的  $H_\infty$  滤波算法. 实验仿真结果表明, 本文所提出的带约束条件的  $H_\infty$  滤波算法比标准的  $H_\infty$  滤波算法以及同等条件下的

卡尔曼滤波算法具有更好的状态估计性能和更高的滤波精度, 对于在复杂环境下车辆跟踪具有现实意义.

#### 参考文献:

- [1] Simon D, Chia T. Kalman filtering with state equality constraints [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(1): 128–136.
- [2] Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. Linear estimation in krein spaces part II: applications[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(1): 34–49.
- [3] Yaesh I, Shaked U. Min max Kalman filtering[J]. Systems and Control Letters, 2004, 53(3): 217–228.
- [4] Hung Y, Yang F. Robust filtering with error variance constraints for discrete time varying systems with uncertainty[J]. Automatic, 2003, 39(7): 1185–1194.
- [5] Goodwin G, Dona J D, Seron M. Lagrangian duality between constrained estimation and control[J]. Automatic, 2005, 41(6): 935–944.
- [6] 付梦印, 邓志红, 张继伟. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 140–142.  
Fu Meng yin, Deng Zhi hong, Zhang Ji wei. Kalman Filtering Theory and Its Application in Navigation System[M]. Beijing:

Science Press, 2003: 140–142. (in Chinese)

- [7] Yaesh I, Shaked U. Game theory approach to state estimation of linear discrete time processes and its relation to optimal estimation[J]. International Journal of Control, 1992, 55(6): 1443–1452.
- [8] Kim J H, Oh J H. A land vehicle tracking algorithm using stand alone GPS[J]. Control Engineering Practice, 2000, 8(10): 1189–1196.

#### 作者简介:



马海平 男, 1981 年 10 月生于浙江省诸暨市, 现为绍兴文理学院物理与电子信息系讲师, 毕业于太原理工大学, 获工学硕士学位, 主要研究方向为目标跟踪, 非线性滤波, 信息融合等.  
E-mail: mhping1981@tom.com

阮谢永 男, 1963 年 3 月生于浙江省绍兴市, 现为绍兴文理学院物理与电子信息系教授, 毕业于华中科技大学, 获工学硕士学位, 主要研究方向为信号处理, 信息融合, 鲁棒控制等.

E-mail: ruanxieyong@zscas.edu.cn