

基于特征分析和二次规划的窄带 信号超分辨率频率估计

葛凤翔, 万 群, 刘申建, 彭应宁

(清华大学电子工程系高速信号处理和网络传输研究所, 北京 100084)

摘 要: 本文研究了窄带信号的超分辨率频率估计. 在单次实验数据和信号包络函数形式未知的条件下, 通过推广应用于分布源 DOA 估计的特征分析方法, 并利用最优化理论中的二次规划算法, 提出了一种窄带信号的超分辨率频率估计方法, 本文称之为 EQP 方法. 通过仿真分析, 将该方法和其它方法进行了比较, 同时还将估计结果的均方误差(MSE)的数值仿真结果和克拉美-罗界(CRB)作了比较, 都表明本文提出的方法有效实现了窄带信号的超分辨率频率估计.

关键词: 频率估计; 特征分析; 二次规划; 窄带信号

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 09-1266-04

Super-Resolution Frequency Estimation of the Sinusoidal Signals with Unknown Lowpass Envelopes Based on Eigenanalysis and Quadratic Programming

GE Feng-xiang, WAN Qun, LIU Shen-jian, PENG Ying-ning

(Dept. of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The problem concerned here is the frequency estimation for the sinusoidal signals with unknown lowpass envelope. Based on the eigenanalysis method applied to the parametric localization of distributed sources and quadratic programming, a super-resolution frequency estimator, called EQP method, is proposed. Here only single-experiment data are required to achieve the estimation. The EQP method, the nonlinear least-squares (NLS) estimator and the conventional MUSIC method are compared in terms of the super-resolution and computational complexity. The mean square errors (MSE) of frequency estimate of the EQP method, versus the sample numbers, signal-to-noise ratio (SNR) and distributed parameters are also presented, and these results are compared with the Cramer-Rao bound (CRB). The simulation results are shown to illustrate the good performance of the EQP method.

Key words: frequency estimation; eigenanalysis; quadratic programming; sinusoidal signals with unknown lowpass envelopes

1 引言

在雷达、声纳、通信、定位、生物医学工程等广泛领域, 大家对估计下列数学模型中信号的频率参数 f_i 一直非常感兴趣:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) e^{j2\pi f_i t} + n(t) \quad (1)$$

其中 N 表示信号分量(signal components)的数目, $\alpha_i(t)$ 为低通包络, 一般由多卜勒频率扩展造成, 是一高斯平稳随机过程. 是一加性白高斯噪声, 均值为 0, 方差为 σ_n^2 . Chen 等^[1] 运用常规 MUSIC 算法, 在假定低通包络函数变化非常缓慢的条件下实现了多卜勒频率 f_i 估计. Besson 等^[2] 指出, 在低通包络函数 $\alpha_i(t)$ 变化非常缓慢的条件下, 常规子空间基的特征分析方法, 如 MUSIC 和 ESPRIT 算法性能下降较小. 但在变化不是非常缓慢时, 上述方法的性能将随包络变化加剧而急剧恶化, 从

而需要通过模型修正来考虑这种由于包络起伏所带来的影响, 以改善估计性能. 之后他们提出了基于非线性最小二乘(NLS)的窄带信号频率估计方法^[3]. 一些基于 ARMA 模型、高阶谱和周期统计的窄带信号频率估计方法也相继被提出^[4-6]. 然而, 上述这些方法一般都只适合于单信号分量条件下(即: $N=1$)的频率估计.

实际上, 式(1)中的低通包络函数 $\alpha_i(t)$ 即反映了信号的频谱扩展. 正如空间信号处理中的分布源^[7], 这里的频率扩展可以看成是时间域上的分布式频率. 通过推广空间域分布源的 DOA 估计方法, 有望实现窄带信号的频率估计. 在分布源的 DOA 估计中^[7], 一般都假定包络形式已知, 并且能够实现多次快拍/实验数据. 但在窄带信号频率估计中, 由于式(1)中的低通包络函数 $\alpha_i(t)$ 典型的是由多卜勒频率扩展造成, 因此分布源 DOA 估计中的上述两个假设条件一般都不能成立, 需

收稿日期: 2002-02-28; 修回日期: 2002-07-20

基金项目: 清华大学信息学院基础创新研究基金(No. 2001416)

要发展新的有效的方法来实现超分辨率的带信号频率估计。

本文通过推广空间信号处理中分布源的 DOA 估计方法,并进一步利用单次快拍技术和最优化理论中常用的二次规划算法,在第 2 部分给出了低通包络函数 $\alpha_i(t)$ 形式未知条件下的窄带信号的超分辨率频率估计方法,本文称之为 EQP(Eigenanalysis and Quadratic Programming)方法。在第 3 部分将该方法和 NLS 方法、常规 MUSIC 方法做了仿真比较,相应估计结果均方误差(MSE)和 CRB 的数值仿真结果也一并给出。仿真结果表明,本文提出的方法能够有效实现窄带信号的超分辨率频率估计。

2 EQP 方法

为便于比较,本文我们使用由 Besson 和 Stoica 在文献[3]中给出的窄带信号数学模型(式(2a))来进行频率估计方法的讨论:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \gamma_i \beta_i(t) e^{j2\pi f_i t} + n(t), t=1, 2, \dots, M-1 \quad (2a)$$

其中 γ_i 是一个复值随机幅度, $\beta_i(t)$ 是一实值(real-valued)低通包络函数,典型的是由多卜勒频率扩展造成。 M 为观测信号长度。为了更清晰而简洁地说明本文提出的窄带信号超分辨率频率估计方法,我们这里假定 $\beta_i(t)$ 的理论功率谱有且只有一个谱峰。当然,若 $\beta_i(t)$ 存在二个或多个谱峰的话,我们可以将其看作二个或多个窄带信号来进行考虑,即总的信号分量的数目 N 增加了。这时可将其中每一个谱峰所对应的时域函数分别看作一个窄带信号分量的低通包络函数,通过相应方法^[15]确定出信源数目后,来完成相应的频率估计,并不影响最终的频率估计方法本身。本文我们将假定信源数目已知,而只考虑窄带信号的频率估计问题。式(2a)相应的矢量形可以表示为:

$$y = \Phi(f, \xi) \gamma + n \quad (2b)$$

其中 $y = [y(0), y(1), \dots, y(t), \dots, y(M-1)]^T$,

$$\Phi(f, \xi) = [\varphi_1(f_1, \xi_1), \varphi_2(f_2, \xi_2), \dots, \varphi_N(f_N, \xi_N)] \\ = [\Lambda(f_1) \beta_1, \Lambda(f_2) \beta_2, \dots, \Lambda(f_N) \beta_N]$$

$\varphi_i(f_i, \xi_i) = [\beta_i(0), \beta_i(1)e^{j2\pi f_i}, \dots, \beta_i(M-1)e^{j2\pi f_i(M-1)}]^T$, $\Lambda(f_i) = \text{diag}(e^{j2\pi f_i k}), k=0, 1, \dots, M-1$, 是一个 M 阶对角矩阵, $\beta_i = [\beta_i(0), \beta_i(1), \dots, \beta_i(M-1)]^T$, $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N]^T$, $i=1, 2, \dots, N$, f 表示频率位置参数, ξ 表示分布参数,上标 T 表示矩阵或向量的转置。

式(2)中表示的数学模型和相干分布源^[7]的数学模型非常类似。结合第 1 部分中对式(1)中数学模型的假设,并假定低通包络函数的形式已知,而只有相应的参数未知,则可以通过特征分解,并利用下列定理^{[7][13]},经相应的多维参数搜索来实现式(2)中窄带信号频率参数的估计:

$$\Phi^H G = 0 \quad (3a)$$

其中 G 表示对应于观察矢量 y 的协方差矩阵($R_y = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^H)$)的噪声子空间。上标 H 表示 Hermitian 转置, $E(\cdot)$ 表示数学期望。将式(3a)表示成参数估计的形式,即:

$$(f_i, \xi_i) = \arg \min_{(f, \xi)} \|\varphi^H(f, \xi) G\|^2 \quad (3b)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数。

然而,在窄带信号的频率估计中,低通包络函数由于其形成原因,如由于目标自身的运动,或者其所在的随机性散射环境等,我们一般不可能确切知道其函数形式。另外在这种场合,由于相类似的原因,实现多次快拍/实验数据一般是不现实的。因此必须发展新的方法以实现在低通包络函数形式未知,并且是单次实验数据条件下的窄带信号频率估计。同时方法的超分辨率特性也是我们为实际应用所必须考虑的。下面我们将基于特征分析和二次规划,给出一种被本文称作 EQP 的窄带信号超分辨率频率估计方法。

(1)首先,将观察矢量重新组合,生成下列新的矩阵 Y :

$$Y = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(M-P) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(M-P+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(P-1) & y(P) & \cdots & y(M-1) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$= [y_{\text{sub}}^0, y_{\text{sub}}^1, \dots, y_{\text{sub}}^{l-1}, \dots, y_{\text{sub}}^{M-P}]$$

其中 $(M+1)/2 > P > 2N^{[8][13]}$

$y_{\text{sub}}^l = [y(l), y(l+1), \dots, y(l+P-1)]^T (l=1, 2, \dots, M-P)$ 是第 l 个子向量, P 是子向量的长度。则根据对式(1)和(2)中数学模型的合理假设,用于后续特征分解的协方差矩阵 $R_{f_{\text{sub}}}$ 为:

$$R_{f_{\text{sub}}} = \frac{Y Y^H}{M-P+1} = \frac{1}{M-P+1} \sum_{i=0}^{M-P} y_{\text{sub}}^i (y_{\text{sub}}^i)^H \quad (5)$$

(2)在实际的应用场合, $\beta_i(t)$ 一般为低通包络函数,也即 $\beta_i(t)$ 本身的相干性较强。在假定相干的条件下,基于子空间基类方法的本质^[11-12],将式(3b)中所示的参数估计方法近似表示为:

$$(f_i, \xi_i) = \arg \min_{(f, \xi)} \{ \beta_{\text{sub}}^H(\xi) \Lambda_{\text{sub}}^H(f) G_{\text{sub}} G_{\text{sub}}^H \Lambda_{\text{sub}}(f) \beta_{\text{sub}}(\xi) \} \quad (6)$$

其中 $\beta_{\text{sub}} = [\beta(l), \beta(l+1), \dots, \beta(l+P-1)]^T$ 是实值低通包络子向量, $\Lambda_{\text{sub}}(f) = \text{diag}(e^{j2\pi f q}) (q=0, 1, \dots, P-1)$ 是一个 P 阶对角矩阵, G_{sub} 是对应于 $R_{f_{\text{sub}}}$ 的噪声子空间。考虑到 $\beta_i(t)$ 作为低通包络函数的实值特性,并由特征分析理论中特征值和特征向量的性质^[10],有:

$$\begin{aligned} & [\beta_{\text{sub}}^H(\xi) \Lambda_{\text{sub}}^H(f) G_{\text{sub}} G_{\text{sub}}^H \Lambda_{\text{sub}}(f) \beta_{\text{sub}}(\xi)] \\ &= [\beta_{\text{sub}}^T(\xi) \Lambda_{\text{sub}}^H(f) G_{\text{sub}} G_{\text{sub}}^H \Lambda_{\text{sub}}(f) \beta_{\text{sub}}(\xi)] \\ &= \frac{1}{2} \{ [\beta_{\text{sub}}^T(\xi) \Lambda_{\text{sub}}^H(f) G_{\text{sub}} G_{\text{sub}}^H \Lambda_{\text{sub}}(f) \beta_{\text{sub}}(\xi)] \\ &\quad + [\beta_{\text{sub}}^T(\xi) \Lambda_{\text{sub}}^H(f) G_{\text{sub}} G_{\text{sub}}^H \Lambda_{\text{sub}}(f) \beta_{\text{sub}}(\xi)] \} \\ &= \beta_{\text{sub}}^T(\xi) \text{Re}[\Lambda_{\text{sub}}^H(f) G_{\text{sub}} G_{\text{sub}}^H \Lambda_{\text{sub}}(f)] \beta_{\text{sub}}(\xi) \\ &= \beta_{\text{sub}}^T(\xi) \Theta(f) \beta_{\text{sub}}(\xi) \end{aligned}$$

且有:

$$\beta_{\text{sub}}^T(\xi) \Theta(f) \beta_{\text{sub}}(\xi) \geq 0 \quad \forall \beta_{\text{sub}}(\xi) \in R^P$$

另外,将子向量经归一化处理后有 $\sum_{t=0}^{P-1} \beta_{\text{sub}}(t) = 1$, 则式(6)中的参数估计问题转化为如下的约束最优化问题。

$$\begin{cases} (f_i, \xi_i) = \arg \min_{(f, \xi)} \{ \beta_{\text{sub}}^T(\xi) \Theta(f) \beta_{\text{sub}}(\xi) \} \\ \sum_{t=0}^{P-1} \beta_{\text{sub}}(t) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{w}^T \beta_{\text{sub}} = 1 \\ \beta_{\text{sub}} \geq 0 \Leftrightarrow \beta_{\text{sub}} \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\Theta(f) = \text{Re}[\Lambda_{\text{sub}}^H(f) G_{\text{sub}} G_{\text{sub}}^H \Lambda_{\text{sub}}(f)]$ 是一个非负定的

Hermitian 矩阵, $\text{Re}(\cdot)$ 表示取一个复数(复向量或复矩阵)的实部, $\mathbf{w} = [1, 1, \dots, 1]^T$. 式(7)中所表示的问题是一个典型的带约束条件的二次规划问题. 基于最优化理论和算法^[9], 我们首先找到对应于每一个频率 f 处 $\{\boldsymbol{\beta}_{\text{sub}}^T(\xi)\boldsymbol{\Theta}(f)\boldsymbol{\beta}_{\text{sub}}(\xi)\}$ 的最小值 $\eta_{\min}(f)$, 然后通过比较不同频率 f 处相应的 $\eta_{\min}(f)$ 值, 就可以估计出相应的频率位置参数 f_i . 上述过程用数学形式可简单表示为:

$$\eta_{\min}(f) = \min_{(\xi)} \{\boldsymbol{\beta}_{\text{sub}}^T(\xi)\boldsymbol{\Theta}(f)\boldsymbol{\beta}_{\text{sub}}(\xi)\} \quad (8a)$$

$$\hat{f}_i = \arg \min_f \{\eta_{\min}(f)\} \quad (8b)$$

(3) 由于式(7)中对低通包络函数本身的约束不够, 通过仿真, 我们发现 $f_{\text{SUM-}ij} = (f_i + f_j)/2$, ($i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j$) 也满足式(3)和(6), 因此, 在频率 $f_{\text{SUM-}ij}$ 处出现了伪峰. 其相应的低通包络子向量为:

$$\boldsymbol{\beta}_{\text{SUM-}ij1} = \boldsymbol{\Lambda}^H(f_{\text{DIF-}ij})\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\Lambda}(f_{\text{DIF-}ij})\boldsymbol{\beta}_j \quad (9a)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{\text{SUM-}ij2} = \boldsymbol{\Lambda}^H(f_{\text{DIF-}ij})\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\Lambda}(f_{\text{DIF-}ij})\boldsymbol{\beta}_j \quad (9b)$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 和 $\boldsymbol{\beta}_j$ 分别是窄带信号频率参数 f_i 和 f_j 所对应的低通包络子向量, $f_{\text{DIF-}ij} = (f_i - f_j)/2$, ($f_j > f_i$). 上述这种伪峰现象在文献[13]中同样出现, 这儿我们提供一种简单的解决方法. 假如观察矢量满足:

$$(f_{\text{DIF-}ij} \cdot P) > 0.5 \Rightarrow (f_j - f_i) \cdot P/2 > 0.5 \quad (10)$$

虽然式(9)中的低通包络子向量仍可以通过归一化处理来近似满足式(7)中的约束条件 $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}_{\text{sub}} = 1$. 但它们将不可能满足约束条件 $\boldsymbol{\beta}_{\text{sub}} \geq 0$, 从而可以有效去除在频率 $f_{\text{SUM-}ij}$ 处的伪峰, 仿真结果也证明了这一点(图4). 式(10)所提出的对观察矢量的要求在实际问题中一般较易满足, 即使该条件不满足. 在许多情况下, 式(10)和约束条件 $\boldsymbol{\beta}_{\text{sub}} \geq 0$ 之间的矛盾也能保证大大减少伪峰的数目.

3 性能分析

Besson 和 Stoica^[3]提出的 NLS 频率估计方法是利用下式去估计频率:

$$\begin{aligned} (f_0, \xi_0) &= \arg \max_{\substack{(f, \xi) \\ \|\boldsymbol{\beta}\|=1}} |\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Lambda}^H(f) \mathbf{y}|^2 \\ &= \arg \max_{\substack{(f, \xi) \\ \|\boldsymbol{\beta}\|=1}} |\boldsymbol{\beta}^T \text{Re}[\boldsymbol{\Lambda}^H(f) \mathbf{y} \mathbf{y}^H \boldsymbol{\Lambda}(f)] \boldsymbol{\beta}| \end{aligned} \quad (11a)$$

经化简后, 有

$$\hat{f}_0 = \arg \max_{(f)} \left| \sum_{t=0}^{M-1} y^2(t) e^{-j4\pi f t} \right|^2 \quad (11b)$$

常规的 MUSIC 方法是利用下面的表达式来进行频率估计:

$$f_i = \arg \max_{(f)} \|\mathbf{a}^H(f) \mathbf{G}\|^2 \quad (12)$$

其中 $\mathbf{a}(f) = [1, e^{j2\pi f}, \dots, e^{j2\pi f(M-1)}]^T$. 由于当低通包络函数起伏加大时, 阵列流形 $\mathbf{a}(f)$ 和噪声子空间 \mathbf{G} 之间会因为模型失配而基本不再正交, 所以用式(12)去进行窄带信号的频率估计, 必然导致估计性能的恶化.

通过分析式(3)和(10), 并根据子空间基类统一框架的思想^[11-12], 我们可以确定 EQP 方法和 NLS 频率估计方法在单信号分量、单次实验数据条件下, 它们的渐近均方误差(MSE)

性能应该是等效的. 在多信号分量、单次实验数据条件下, 为了能够有效实现多信号分量的频率估计, 一般会采用单次快拍技术^[8]以保证子空间基类方法的有效性, 而由于式(6)中采用相干假设的原因, 将导致 EQP 方法的性能随低通包络函数相干性减弱(即表现为低通包络起伏加大或功率谱展宽, 对应于本文下面仿真分析中的分布参数增大)而下降, 但这种性能的下降会由于 EQP 方法中采用了匹配于窄带信号的数学模型而大大减弱. 相应的数值仿真结果示于图3和图4.

在高信噪比和单信号分量的条件下, 式(1)和(2)数学模型中频率参数估计的 CRB^[14]为:

$$\text{CRB} = \frac{1}{M^3 \text{SNR}} \quad (13)$$

其中 SNR 表示观察矢量的信噪比, 定义为 $\text{SNR} = E\{|\alpha_i(t)|^2\}/\sigma_n^2$.

由式(11)可以看出, NLS 方法可以借助 FFT 算法来快速实现频率估计. 而本文提出的方法由于涉及特征分解和优化迭代及搜索, 和常规的基于特征分析的方法(如: 常规 MUSIC 方法)一样, 运算量较大, 因此快速算法是我们今后有效工程实现该方法的努力方向. 但是我们注意到本文提出的 EQP 方法(式(3))用噪声子空间 \mathbf{G} 替代了 NLS 频率估计方法中的直接观察矢量 \mathbf{y} , 由于有效利用了噪声子空间和信号子空间之间的正交性, 从而使窄带信号频率估计方法的分辨率得到了明显的改善(图4), 实现了超分辨率频率估计.

4 仿真结果

为验证本文提出的 EQP 方法的性能, 在单次实验数据、单信号分量的条件下, 我们进行了 500 次 Monte-Carlo 仿真试验, 估计器采用了单次快拍技术. 针对不同的样本数目、SNR 和分布参数, 相应频率估计结果的均方误差(MSE)的数值仿真结果分别示于图1、2、3, 其它参数也已一并示于图中. 同时作为比较, 据式(13)及其相应参数计算的 CRB 也已图中一并给出.

EQP 方法的分辨率优势以及和 NLS 频率估计方法、常规 MUSIC 方法的仿真比较结果示于图4. 由图4可以看出, EQP 方法有效避免了伪峰, 且将两个分量的窄带信号的频率位置 f_i 有效地分辨开, 实现了窄带信号的超分辨率频率估计. 而 NLS 方法和常规 MUSIC 方法分别由于方法本身和模型失配的

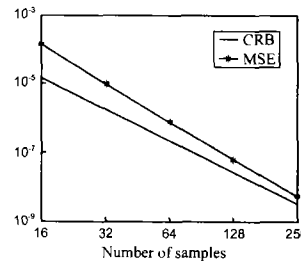


图1 不同样本数目条件下的 RB 和 MSE
($f_i = 0.18$, $\xi_n = 0.025$,
 $\text{SNR} = 20\text{dB}$, $P = M/2$)

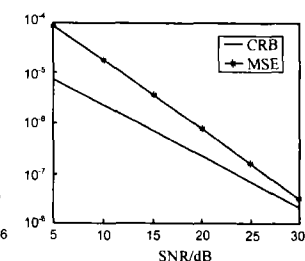


图2 不同 SNR 条件下的 CRB 和 MSE
($f_i = 0.18$, $\xi_n = 0.0$
 25 , $M = 64$, $P = 32$)

原因,没能实现窄带信号的超分辨率的频率估计,且由此导致了性能的恶化.在仿真中,我们采用如下功率谱为高斯型(钟形)谱^{[1][7]}的低通包络函数:

$$g_B(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi_f^2}} \exp\left(-\frac{f^2}{2\xi_f^2}\right) \quad (14)$$

其中 ξ_f 表示分布参数,即对应于低通包络功率谱的标准方差.

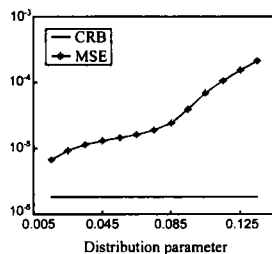


图 3 不同分布参数条件

下的 CRB 和 MSE
($f_1 = 0.18$, $SNR = 20\text{dB}$
 $M = 32$, $P = 16$)

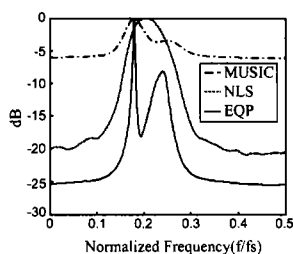


图 4 不同的窄带信号
频率估计方法

($f_1 = 0.18$, $\xi_{f1} = 0.015$,
 $f_2 = 0.24$, $\xi_{f2} = 0.035$,
 $SNR = 20\text{dB}$, $M = 40$,
 $P = 20$)

5 结论

本文研究了存在于广泛应用领域的窄带信号的超分辨率频率估计.通过推广空间信号处理中分布源的 DOA 估计方法,并将其应用于窄带信号的频率估计,在单次实验数据和信号低通包络函数形式未知的条件下,进一步利用单次快拍技术及最优化理论中带约束条件的二次规划理论和算法,提出了一种基于特征分析和二次规划的窄带信号超分辨率频率估计方法.有关性能的数值仿真结果以及和 CRB 的比较, EQP 方法和其他窄带信号频率估计器在超分辨率特性方面的比较也已在文中给出,都表明本文提出的 EQP 方法有效实现了窄带信号的超分辨率频率估计.

参考文献:

- [1] W Chen, G Zhou, G B Giannakis. Velocity and acceleration estimation of Doppler weather radar/lidar signals in colored noise [A]. Proc I-CASSP95 [C]. Detroit MI USA: 1995. 2052 - 2055.
- [2] O Besson, P Stoica. Analysis of MUSIC and ESPRIT frequency estimates for sinusoidal signals with lowpass envelopes [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1996, 44 (9): 2359 - 2364.
- [3] O Besson, P Stoica. Nonlinear least-squares approach to frequency estimation and detection for sinusoidal signals with arbitrary envelope [J]. Digital Signal Processing, 1999, 9(1): 45 - 56.
- [4] O Besson, F Castanie. On estimating the frequency of a sinusoid in autoregressive multiplicative noise [J]. Signal Processing, 1993, 30(1): 65 - 83.

- [5] R F Dwyer. Fourth-order spectra of Gaussian amplitude-modulated sinusoids [J]. J Acoust Soc Amer, 1991, 90: 918 - 926.
- [6] G Zhou, B Giannakis. Harmonics in multiplicative and additive noise: parameter estimation using cyclic statistics [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1995, 43(9): 2217 - 2221.
- [7] S Valae, B Champagne, P Kabal. Parametric location of distributed sources [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1995, 43(9): 2144 - 2153.
- [8] P Stoica, A Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound [J]. IEEE Trans on Acoustic Speech and Signal Processing, 1989, 37(5): 720 - 741.
- [9] 袁亚湘. 非线性规划数值方法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1993.
- [10] J H Wilkinson. The Algebraic Eigenvalue Problem [M]. London: Oxford University Press, 1965.
- [11] M Viberg, B Ottersten. Sensor array processing based on subspace fitting [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1991, 39(5): 1110 - 1121.
- [12] 张贤达. 信号处理中的线性代数 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [13] F X Ge, Q. Wan, X T Wang, Y N Peng. Frequency estimation of the sinusoidal signals with lowpass envelopes based on the eigenanalysis [A]. 2002 IEEE Radar Conference [C]. Long Beach, CA USA: 2002. 453 - 458.
- [14] J M Francos, B Friedlander. Bounds for estimation of multicomponent signals with random amplitude and deterministic phase [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1995, 43(5): 1161 - 1172.
- [15] 刘德树, 罗景青, 张剑云. 空间谱估计及其应用 [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1997.

作者简介:



葛凤翔 男, 1974 年 7 月生于江苏溧阳. 分别于 1996 年 7 月和 1999 年 4 月在哈尔滨工程大学水声工程专业获学士和硕士学位. 现在清华大学电子工程系攻读博士学位. 主要研究方向为检测与估计理论、现代谱估计、时频分析、阵列信号处理、自适应信号处理和无线定位技术等.

万 群 男, 1971 年生于江西, 于 1993 年在南京大学获学士学位, 分别于 1996 年和 2000 年在电子科技大学获硕士和博士学位. 现在清华大学电子工程系做博士后研究工作. 主要研究方向为阵列信号处理、定位技术等.

刘申建 男, 1975 年生于湖北, 于 2000 年在哈尔滨工程大学获硕士学位. 现在清华大学电子工程系攻读博士学位, 主要研究方向为定位算法和信号建模研究等.

彭应宁 男, 1939 年生于四川, 分别于 1962 年和 1965 年在清华大学无线电系获学士和硕士学位. 现为清华大学电子工程系教授, 博士生导师. 清华大学研究生培养委员会委员, 电子工程系高速信号处理和网络传输研究所所长, 电子工程系学位委员会主席. 主要研究方向是谱估计, 自适应滤波, 阵列信号处理、雷达信号处理、微光图像信号处理、定位技术等.