

基于 Sh 相关系数的非线性系统状态粒子估计算法

梁 军, 彭喜元

(哈尔滨工业大学自动化测试与控制系, 黑龙江哈尔滨 150080)

摘 要: 本文提出一种适用于非线性系统状态的粒子估计算法——基于 Sh 相关系数的粒子估计(PE)算法. 该算法主要由预测、更新和平滑组成, 利用被估计状态观测值路径和粒子观测值路径之间的 Sh 相关系数来修正粒子权值. 仿真实验结果表明, 该算法在状态估计精度上优于序列重要性重采样(SIR)算法、辅助粒子滤波(APF)算法、正则化粒子滤波(RPF)算法、高斯粒子滤波(GPF)算法和高斯混合粒子滤波(GSPF)算法.

关键词: 非线性随机系统; 状态空间模型; 状态估计; 粒子滤波; Sh 相关系数

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 2A-165-04

Particle Estimation Algorithm Using Sh Correlation Coefficient for Nonlinear System State

LIANG Jun, PENG Xi-yuan

(Department of Automatic Test and Control, Harbin Institute of Technology, Harbin, HeiLongJiang 150001, China)

Abstract: This paper introduces a particle estimation algorithm using Sh correlation coefficient (PE) for nonlinear system state. It consists of prediction, update, and smoothing. It modifies the weights of the particles using the Sh correlation coefficient between the observations of the estimated state and the observations of the particles. The simulation results are presented to demonstrate the improved performance of the SCPF over those known particle filters including the sequential importance resampling algorithm, the auxiliary particle filter, the regularized particle filter, the Gaussian particle filter, and the Gaussian sum particle filter.

Key words: nonlinear stochastic systems; state space models; state estimation; particle filters; Sh correlation coefficient

1 引言

非线性系统状态估计一直受到国内外学者的广泛重视, 成为一个具有重要理论和使用价值的热点研究课题. 粒子滤波是近年来逐步兴起的一种适用于非线性系统状态估计的滤波方法, 其在统计信号处理、经济学、生物统计学、通信、目标跟踪、故障诊断、卫星导航和声纳定位等领域均有广泛的应用前景.

状态空间模型是一种描述系统特性的时域模型, 其中时间作为隐含的自变量, 它包括: (1) 系统模型, 用于描述系统状态随时间演变的过程; (2) 观测模型, 用于将系统输出和系统状态联系起来.

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) \quad (\text{系统模型}) \quad (1)$$

$$y_k = h(x_k, v_k) \quad (\text{观测模型}) \quad (2)$$

其中, $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 为已知函数, 系统噪声 u_{k-1} 和观测噪声 v_k 的概率密度已知, x_k 代表系统在 k 时刻的状态变量, y_k 代表 x_k 的观测值, u_{k-1} 和 v_k 相互独立且独立于系统状态.

上述状态空间模型的统计描述方式如下: 对应于系

统模型有系统状态转移概率密度 $p(x_k | x_{k-1})$; 对应于观测模型有系统状态的观测似然概率密度 $p(y_k | x_k)$.

递归贝叶斯状态估计方法通过预测和更新来得到状态的后验概率密度 $p(x_k | y_{1:k})$ (这里 $y_{1:k} = \{y_i : i = 1, \dots, k\}$). 若 $k-1$ 时刻状态的后验概率密度 $p(x_{k-1} | y_{1:k-1})$ 已经得到, 则 k 时刻状态的先验概率密度 $p(x_k | y_{1:k-1})$ 可由下式得到

$$p(x_k | y_{1:k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | y_{1:k-1}) dx_{k-1} \quad (3)$$

当 k 时刻状态观测值 y_k 获得后, k 时刻状态的后验概率密度 $p(x_k | y_{1:k})$ 可由式(4)得到

$$p(x_k | y_{1:k}) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} \quad (4)$$

$$\text{其中, } p(y_k | y_{1:k-1}) = \int p(y_k | x_k) p(x_k | y_{1:k-1}) dx_k \quad (5)$$

$$p(y_k | x_k) = \int \delta(y_k - h(x_k, v_k)) p(v_k) dv_k \quad (6)$$

这里, $\delta(\cdot)$ 是 Dirac delta 函数, $p(v_k)$ 是 v_k 的概率密度函数.

粒子滤波是上述递归贝叶斯状态估计的一种蒙特卡洛实现方法. 它定义了一些粒子(每个粒子指一个带有权值的状态样本), 让它们通过系统模型按时间顺序向前传播, 从而得到各时刻系统的状态样本, 并利用这些粒子来代表所求状态的后验概率密度. Gordon 等在 1993 年提出第一个粒子滤波算法——序列重要性重采样算法(SIR), 其执行过程如下^[1]:

(1) 预测: 从系统状态转移概率密度中抽取新粒子, 即 $x_k(i) \sim p(x_k | x_{k-1}(i)) (i = 1, 2, \dots, N)$;

(2) 更新: 计算各新粒子的归一化权值 $q_k(i)$,

$$q_k(i) = \frac{p(y_k | x_k(i))}{\sum_{j=1}^N p(y_k | x_k(j))} \quad (7)$$

从而得到一组粒子 $\{(x_k(i), q_k(i)), i = 1, 2, \dots, N\}$, 使 k 时刻状态变量 x_k 的概率密度 $p(x_k | y_{1:k})$ 可近似表示为

$$p(x_k | y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N q_k(i) \delta(x_k - x_k(i)) \quad (8)$$

可估计 x_k 如下:

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^N q_k(i) x_k(i) \quad (9)$$

(3) 粒子重采样

上述算法中的粒子重采样是为了缓解粒子退化现象. 粒子退化指算法经过若干次迭代后, 少数粒子的权值很大, 而大多数粒子的权值很小甚至于可以忽略不计. 这意味着大量计算工作将浪费在那些对状态估计几乎不起作用的粒子的更新上.

1999 年 Pitt 和 Shephard^[2] 提出辅助粒子滤波(APF)算法. 同 SIR 相比, APF 的重采样考虑了系统状态的最新观测值, 使下一时刻的预测粒子接近真实状态的可能性更高. 实际应用中当系统状态转移噪声较小时该算法好于 SIR 算法^[3]. 2001 年 Musso^[4] 提出正则化粒子滤波(RPF)算法. RPF 在一个连续分布上进行重采样, 克服 SIR 算法中存在的粒子多样性匮乏问题. 实际应用中该算法在粒子多样性匮乏问题较严重的情况下(例如, 当系统状态转移噪声较小时)好于 SIR 算法^[3]. 2003 年 Kotecha^[5] 提出高斯粒子滤波(GPF)算法. 该算法用一个高斯分布近似系统状态概率密度. 当高斯假设成立时该算法是渐进最优算法^[3]. 随后, Kotecha^[6] 等为了解决服从非高斯分布的状态估计问题, 提出了高斯混合粒子滤波(GSPF)算法. 该算法使用一批高斯分布的加权求和作为服从非高斯分布的系统状态的近似分布. 该算法在估计一个服从重尾非高斯分布的系统状态时取得了好于高斯混合滤波和 SIR 的效果. 2008 年我们^[7] 提出基于观测路径相似性的粒子估计算法. 算法由对当前时刻状态的滤波操作和对过去时刻状态的平滑操

作组成. 该算法利用皮尔逊相关系数或肯德尔相关系数来度量系统状态实际观测值路径和粒子观测值路径的相似度, 再利用该相似度修正粒子权值, 使状态估计精度远优于 SIR、APF、RPF 和 GPF^[7]. 虽然该算法中的平滑操作改善了状态估计精度, 但同时也降低了状态估计的实时性. 同年, 我们^[8] 提出基于观测路径相似性重采样的粒子滤波算法(PAP 算法和 PAA 算法). 该算法仍利用系统状态实际观测值路径和粒子观测值路径的相似度修正粒子权值, 算法中不存在平滑操作, 状态估计精度也优于 SIR、APF、RPF 和 GPF^[8].

2 基于 Sh 相关系数的粒子估计算法

当观测噪声较小时如果一个粒子的观测值路径靠近系统状态的观测值路径, 则该粒子的路径靠近系统状态的路径的可能性更高. 我们可以计算这两种观测值路径之间的相似程度, 当相似程度较高时表示该粒子接近系统状态的程度较高, 反之, 则表示该粒子接近系统状态的程度较低. 我们利用该相似程度值去修正粒子的权值, 以期望获得更高的非线性系统状态估计精度. 本文中我们利用 Sh 相关系数来度量上述两种观测值路径的相似程度. Sh 相关系数是一种基于形状的时间序列相似性度量参数, 其定义如下^[9]:

$$\text{Sh}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 - \frac{\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{\|\mathbf{X}\|_2 \|\mathbf{Y}\|_2} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^n$ 和 $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^n$ 是两个 n 维矢量, $\mathbf{X} = \{x_i - E(\mathbf{x})\}_{i=1}^n$, $\mathbf{Y} = \{y_i - E(\mathbf{y})\}_{i=1}^n$.

令 $X_k = \{\{x_j(i)\}_{j=k-L+1}^k\}_{i=1}^N$ 代表 $k-L+1$ 时刻到 k 时刻的全部 N 个粒子的路径, 其中, $L \leq k$ 是一个应被预先指定的常量. 令 $Y_k = \{\{y_j(i)\}_{j=k-L+1}^k\}_{i=1}^N$ 是这些粒子路径的观测值路径, 其中的 $y_j(i)$ 可以利用观测模型计算如下:

$$y_j(i) = h(x_j(i), 0) \quad (11)$$

令 $Y_k = \{y_j\}_{j=k-L+1}^k$ 代表 $k-L+1$ 时刻到 k 时刻实际观测得到的系统状态观测值路径. 这样, 我们计算这两种路径之间 Sh 相关系数如下:

$$sh_k(i) = \text{Sh}(\{y_j(i)\}_{j=k-L+1}^k, \{y_j\}_{j=k-L+1}^k) \quad (12)$$

其中, $sh_k(i)$ 代表从 $k-L+1$ 时刻到 k 时刻第 i 个粒子的观测值路径和系统状态观测值路径之间的相似程度. 考虑到 Sh 相关系数取值大于等于零和相似程度越高时其数值越小的特点, 我们利用下式来处理 $sh_k(i)$, 从而得到一个粒子权值修正因子 $s_k(i)$ 如下:

$$s_k(i) = e^{\alpha/sh_k(i) + \beta} \quad (13)$$

其中, α 和 β 在算法运行前需要预先设定, $s_k(i) > 0$. 这里, $\alpha > 0$ 是一个缩放比例因子; β 的取值范围一般为 $0 < \beta < 1$, 其作用仅是避免当 $sh_k(i) = 0$ 时 $\alpha/sh_k(i) \rightarrow \infty$.

分别计算各粒子在 k 时刻和 $k-L+l$ 时刻的权值 $q_k^*(i)$ 和 $q_{k-L+l}^*(i)$ 如下:

$$q_k^*(i) = s_k(i) \times p(y_k | x_k(i)) \quad (14)$$

$$q_{k-L+l}^*(i) = s_k(i) \times p(y_{k-L+l} | x_{k-L+l}(i)) \quad (15)$$

其中, $i=1, 2, \dots, N, l$ 是一个应被预先指定的常量, $1 \leq l < L$. 归一化权值 $q_k^*(i)$ 和 $q_{k-L+l}^*(i)$ 如下:

$$q_k(i) = \frac{q_k^*(i)}{\sum_{j=1}^N q_k^*(j)}, \quad q_{k-L+l}(i) = \frac{q_{k-L+l}^*(i)}{\sum_{j=1}^N q_{k-L+l}^*(j)} \quad (16)$$

这样, 使用 $\{x_k(i), q_k(i)\}_{i=1}^N$ 去近似 k 时刻的系统状态概率密度 $p(x_k | y_{1:k})$, 使用 $\{x_{k-L+l}(i), q_{k-L+l}(i)\}_{i=1}^N$ 去近似 $k-L+l$ 时刻的系统状态概率密度 $p(x_{k-L+l} | y_{1:k})$, 即

$$p(x_k | y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N q_k(i) \delta(x_k - x_k(i)) \quad (17)$$

$$p(x_{k-L+l} | y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N q_{k-L+l}(i) \delta(x_{k-L+l} - x_{k-L+l}(i)) \quad (18)$$

在 k 时刻系统状态 x_k 和 x_{k-L+l} 被同时估计, 对 x_k 的估计属于滤波操作, 对 x_{k-L+l} 的估计属于平滑操作. 基于 Sh 相关系数粒子估计算法的执行步骤如下:

(1) 预测: 该步骤同 SIR 粒子滤波一样;

(2) 更新: 计算上述权值 $q_k(i)$ 和 $q_{k-L+l}(i)$, 估计系统状态 x_k 和 x_{k-L+l} 如下:

$$x_k \approx \bar{x}_k = \sum_{i=1}^N q_k(i) x_k(i) \quad (\text{滤波}) \quad (19)$$

$$x_{k-L+l} \approx \bar{x}_{k-L+l} = \sum_{i=1}^N q_{k-L+l}(i) x_{k-L+l}(i) \quad (\text{平滑}) \quad (20)$$

上述步骤组成该算法的一次迭代过程. 与通常的粒子滤波算法不同, 该算法由预测、更新和平滑组成. 同高斯粒子滤波算法一样, 该算法无重采样步骤.

文献[10]中 Smith 和 Gelfand 的研究结果表明, 贝叶斯状态估计可以采用如下加权自助法实现: 假设样本 $\{x_k(i)\}_{i=1}^N$ 是从一个连续概率密度函数 $G(x)$ 中抽样得到的, 而欲求的概率密度与 $L(x)G(x)$ (其中函数 $L(x)$ 已知) 为常数比例关系, 则当样本数 $N \rightarrow \infty$ 时由 $\{x_k(i)\}_{i=1}^N$ 及其权值 $\{L(x_k(i))/\sum_{i=1}^N L(x_k(i))\}_{i=1}^N$ 组成的离散分布趋近于这个欲求的概率密度. 由式(4)可见, 欲求概率密度 $p(x_k | y_{1:k})$ 和状态观测似然函数与先验概率密度 $p(x_k | y_{1:k-1})$ 之间的乘积呈常数比例关系. 考虑到式(14)和式(15)等号右边所示的乘积实质上表示的就是状态观测似然函数值, 如果将上述 $L(x)$ 看作该状态观测似然函数, 将上述 $G(x)$ 看作先验概率密度 $p(x_k | y_{1:k-1})$, 显然本文算法是合理的.

3 仿真结果

我们采用如下二维单变量的例子来进行仿真实验:

$$x_k = \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{25x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + 8\cos(1.2k) + u_{k-1}$$

$$y_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k$$

其中, x_k 为系统在 k 时刻的状态, y_k 为系统状态 x_k 的状态观测值, u_{k-1}, v_k 分别为状态转换过程噪声和状态观测噪声. 我们选择该例是因为它已在很多文献中被多次使用^[1-8], 并且具有高度的非线性, 其观测似然函数具有的双峰特性使其状态估计问题更加困难^[5]. 我们采用 C 语言分别编制了 SIR、APF、RPF、GPF、GSPF、基于 sh 相关系数的粒子估计算法程序. 所有程序同时运行在一台处理器为速度是 1.7GHz 的 Intel Pentium、内存容量为 1G 的计算机上以进行仿真对比实验. 为了叙述简便, 以下我们将基于 sh 相关系数的粒子估计算法简写为 PE 算法.

首先, 我们采用同文献[5]一样的实验参数, 比较 SIR、APF、RPF、GPF 和 PE 算法的估计精度. 同文献[5]一样, 我们采用粒子总数 $N=100$, 系统噪声服从正态分布为 $u_{k-1} \sim N(0, 1)$, 观测噪声服从正态分布为 $v_k \sim N(0, 1)$, 系统初始状态 $x_0=0.1$, 进行 100 次仿真运行, 采用如下误差均方根值(Root Mean Squared Error, RMSE)反映估计精度:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{5000} \sum_{k=0}^{4999} (x_k - \hat{x}_k)^2} \quad (21)$$

其中, x_k 代表系统真实状态值, \hat{x}_k 代表系统状态估计值. 文献[5]中一次仿真运行的仿真时间为 500 个时间点, 本文采用一次仿真时间为 5000 个时间点以增强实验的充分性.

我们在 PE 算法中取 $L=5, l=2, \alpha=1.8$ 和 $\beta=0.000001$. RMSE 的实验结果显示在图 1 中, 其对应的平均值和方差值显示在表 1 中.

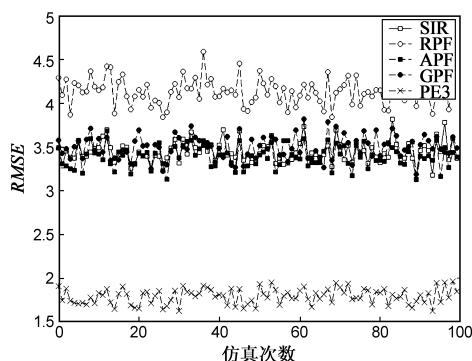


图1 SIR、APF、RPF、GPF和PE算法的RMSE

由图 1 可见, *PE* 算法在估计精度上明显优于 *SIR* 算法、*APF* 算法、*RPF* 算法和 *GPF* 算法. 由表 1 可见, *PE* 算法的 *RMSE* 平均值和 *RMSE* 方差均下降为这四种算法的 50% 左右.

表 1 各算法 *RMSE* 的平均值及其方法

	SIR	APF	RPF	GPF	PE
<i>RMSE</i> 平均值	3.485	3.461	4.170	3.566	1.825
<i>RMSE</i> 方差	0.019	0.014	0.025	0.023	0.007

文献[6]将其提出的高斯混合粒子滤波算法(*GSPF*)用于服从重尾非高斯分布的系统状态估计问题中,并以上述例子为例进行了实验仿真. 仿真结果显示该算法的有效性. 这里,我们也采用同文献[6]一样的实验参数进行仿真实验,即实验中系统噪声 u_k 服从如文献[6]所述的重尾非高斯分布,观测噪声服从正态分布为 $v_k \sim N(0,1)$,系统初始状态 $x_0 = 0.1$. 为增强实验的充分性,一次仿真时间为 5000 个时间点,共进行 100 次仿真运行,仍采用误差均方根值(*RMSE*)反映估计精度. 在 *PE* 算法中仍取 $L = 5$ 、 $l = 2$ 、 $\alpha = 1.8$ 和 $\beta = 0.000001$. 同文献[6]一样,在 *GSPF* 算法中采用高斯分布个数 $G = 16$,每个高斯分布使用的粒子个数 $N_j = 100$ ($j = 1, 2, \dots, G$),即在 *GSPF* 算法中使用粒子总数为 1600;而在 *PE* 算法中我们仅使用粒子总数 $N = 100$. *RMSE* 的实验结果显示在图 2 中,其对应的平均值和方差值显示在表 2 中.

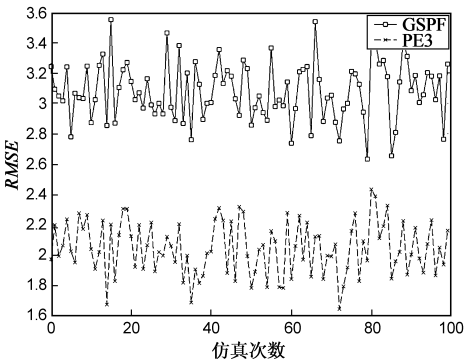


图2 *GSPF*和*PE*算法的*RMSE*

表 2 *GSPF* 算法和 *PE* 算法 *RMSE* 的平均值及其方差

	GSPF	PE3
<i>RMSE</i> 平均值	3.163	2.028
<i>RMSE</i> 方差	0.057	0.040

由图 2 可见, *PE* 算法在估计精度上明显优于 *GSPF* 算法. 由表 2 可见, *PE* 算法的 *RMSE* 平均值下降为 *GSPF* 算法的 64%, *RMSE* 方差略小于 *GSPF*. 值得一提的是,上述实验中 *GSPF* 算法使用的粒子总数为 1600,而 *PE* 算法使用的粒子总数仅为 100,是 *GSPF* 算法的十六分之一.

4 结论

本文利用被估计状态观测值路和粒子观测值路径之间的 *Sh* 相关系数来修正粒子权值,进而提出了基于 *Sh* 相关系数的粒子估计算法. 该算法适用于非线性系统的状态估计问题,在估计精度上明显优于 *SIR*、*APF*、*RPF*、*GPF* 和 *GSPF* 算法.

参考文献:

[1] Gordon N, Salmond D. Novel approach to non-linear and non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. Proc of Institute Electric Engineering, 1993, 140(2): 107 – 113.

[2] M Pitt, N Shephard. Filtering via simulation: Auxiliary particle filter[J]. Amer. Statist. Assoc, 1999, 94(446): 590 – 599.

[3] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, Clapp T. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(2): 174 – 188.

[4] Musso C, Oudjane N, Legland F. Sequential Monte Carlo Methods[M]. Springer-Verlag, 2001. 247 – 272.

[5] Kotecha J H, Djuric P M. Gaussian particle filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(10): 259 – 260.

[6] Kotecha J H, Djuric P M. Gaussian sum particle filtering[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(10): 2602 – 2612.

[7] J Liang, X Y Peng, Y T Ma. Particle estimation algorithm using correlation of observation for nonlinear system state[J]. IEE ELECTRONICS LETTERS, 2008, 44(8): 553 – 554.

[8] J Liang, X Y Peng. Improved particle filter for nonlinear system state[J]. IEE ELECTRONICS LETTERS, 2008, 44(21): 1275 – 1277.

[9] Zeng Fanzi, Yue Jianhai, Qiu Zhengding. Shape-based time series similarity metric and pattern discovery algorithm[J]. SIGNAL PROCESSING, 2004, 20(6): 548 – 551.

[10] Smith A F M, Gelfand A E. Bayesian statistics without tears: A sampling-resampling perspective[J]. Amer Stat, 1992, 46: 84 – 88.

作者简介:



梁 军 男, 哈尔滨工业大学自动化测试与控制系副教授, 博士. 主要研究方向为非线性系统状态估计和故障诊断.
E-mail: hitliangjun2004@126.com

彭喜元 男, 1961 年生于内蒙古自治区四子王旗, 哈尔滨工业大学自动化测试与控制系教授, 博士, 博士生导师. 主要研究方向为自动测试技术和智能故障诊断等.