

# 多形态稀疏性正则化的图像超分辨率算法

孙玉宝<sup>1,2</sup>, 韦志辉<sup>1</sup>, 肖 亮<sup>1</sup>, 张峥嵘<sup>1</sup>, 吕战强<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学计算机科学与技术学院模式识别与智能系统实验室, 江苏南京 210094;

2. 中国人民解放军总参谋部第六十研究所训练科研处, 江苏南京 210016)

**摘 要:** 如何设计更加高效并能保持图像几何和纹理结构的多幅图像超分辨模型和算法是目前该领域有待解决的难点问题. 针对图像的几何、纹理结构形态, 分别建立符合类内强稀疏而类间强不相干的几何结构和纹理分量稀疏表示子成份字典, 形成图像的多形态稀疏表示模型, 进而提出一种新的基于多形态稀疏性正则化的多帧图像超分辨凸变分模型, 模型中的正则项刻画了理想图像在多成份字典下的稀疏性先验约束, 保真项度量其在退化模型下与观测信号的一致性, 采用交替迭代法对该多变量优化问题进行数值求解, 每一子问题采用前向后向的算法分裂法进行快速求解. 针对可见光与红外图像序列进行了数值仿真, 实验结果验证了本文模型与数值算法的有效性.

**关键词:** 超分辨率; 稀疏表示; 多成份字典; 多结构形态; 前向后向算子分裂

**中图分类号:** TP391      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2010) 12-2898-06

## Multimorphology Sparsity Regularized Image Super-Resolution

SUN Yu-bao<sup>1,2</sup>, WEI Zhi-hui<sup>1</sup>, XIAO Liang<sup>1</sup>, ZHANG Zhen-rong<sup>1</sup>, LÜ zhan-qiang<sup>2</sup>

(1. Lab of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, Institute of Computer Science and Technology,

Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;

2. Scientific Research Department of Military Training, 60th Research Institute of General Staff Department,

Chinese People's Liberation Army, Nanjing, Jiangsu 210016, China)

**Abstract:** It is difficult to design an effective image super-resolution model and algorithm that can preserve the geometric structures and texture. Two incoherent geometry and texture sub-dictionaries are constructed, which can provide sparse representations of geometry and texture structures respectively. Thus, a multi-morphology sparse representation model is established. Furthermore, a convex variational model is proposed for multi-frame image super-resolution with multi-morphology sparsity regularization. The regularization term constrains the underlying image to have a sparse representation in a multi-component dictionary. The fidelity term restricts the consistency with the measured image in terms of the data degradation model. An alternate minimization iteration algorithm is proposed to solve it numerically and proximal forward-backward operator splitting method is adopted for each sub-problem. Numerical experiments for optics and infrared images are presented and the experimental results demonstrate that our super-resolution model and numerical algorithm are both effective.

**Key words:** super-resolution; sparse representation; multi-component dictionary; morphological diversity; forward-backward operator splitting

## 1 引言

红外、可见光等成像系统获取数字图像是一个复杂的过程, 受到诸如运动变形、光学模糊、低采样率、随机噪声等多种退化因素的影响, 最终获取的往往是退化的低分辨率图像, 不能满足实际应用的需要. 超分辨率 (Super-Resolution, SR) 重建是一种由低分辨率 (Low-Resolution, LR) 退化图像 (或图像序列) 重建一幅 (或序列) 高分辨率 (High-Resolution: HR) 清晰图像的二代复原技

术<sup>[1]</sup>, 在航空、制导、探测、遥感、医学、等众多领域具有广泛应用前景. 在设计 SR 重建算法前, 首先需要建立准确的数据退化模型, 这对有效的 SR 重建至关重要. 给定包含  $K$  帧大小为  $n_1 \times n_2$  的 LR 退化图像序列  $\{\mathbf{g}_k | k = 1, \dots, K\}$ , 假设  $\mathbf{u}$  为  $q_1 n_1 \times q_2 n_2$  的高分辨率清晰图像, 其中  $q_1, q_2$  分别为水平方向和垂直方向的分辨率提高因子. 记  $L = n_1 n_2$ ,  $N = q_1 n_1 q_2 n_2$ , 退化模型采用矩阵-向量表达如下:

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{B}_k \mathbf{F}_k \mathbf{u} + \mathbf{v}_k, k = 1, 2, \dots, K \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{g}_k \in R^L$  表示第  $k$  帧低分辨率图像,  $\mathbf{u} \in R^N$  表示原始的高分辨率清晰图像,  $\mathbf{v}_k \in R^L$  表示加性随机噪声,  $\mathbf{F}_k \in R^{N \times N}$  表示  $\mathbf{g}_k$  相对  $\mathbf{u}$  的运动变形矩阵,  $\mathbf{B}_k \in R^{N \times N}$  表示光学模糊矩阵,  $\mathbf{D}_k \in R^{L \times N}$  为下采样矩阵. 令  $\mathbf{H}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{B}_k \mathbf{F}_k$ , 则式(1)可简写为:

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{u} + \mathbf{v}_k, k = 1, 2, \dots, K \quad (2)$$

多幅图像 SR 重建的目标是从多帧低分辨率图像  $\{\mathbf{g}_k\}_{k=1, \dots, K}$  重建高分辨率图像  $\mathbf{u}$ , 涉及图像配准、运动估计、去噪、去模糊、盲恢复、图像建模等多种图像处理任务, 是当前国际上图像处理、计算机视觉和计算调和与分析等多学科领域众多研究者关注的热点问题. 一般情形下由于信息量不足, SR 重建是一个不适定的反问题, 因此图像的先验模型对于 SR 重建至关重要, 很大程度上决定了算法的成败. 近些年以“统计建模方法”和“正则化几何方法”为代表的图像模型在 SR 重建算法中得到了广泛应用, 演绎出了一系列经典的正则超分辨率复原算法, 主要有: 迭代反投影 (IBP) 法<sup>[2]</sup>、凸集投影 (POCS) 法<sup>[3]</sup>、Normalized Convolution (NC)<sup>[4]</sup>、最大似然 (ML)/最大后验概率 (MAP) 估计法<sup>[5,6]</sup> 和混合 ML/MAP/POCS 法, 基于全变分 (Total Variation) 正则化的变分偏微分方程 (PDE) 方法 (简记为: TVSR)<sup>[7]</sup> 等等. 其中, Normalized Convolution (NC) 一种基于多项式的核函数回归方法, 对配准后非均匀采样图像进行融合, 从而生成 HR 图像. 为了保持恢复图像的边缘结构, TVSR 方法将图像建模理论中广泛研究的全变分模型用于 SR 重建. 尽管超分辨率的研究已经取得了丰富的成果, 但如何设计既能够保持边缘与纹理结构又具有较低计算复杂度的多幅图像超分辨算法是当前该领域有待解决的难点问题.

稀疏表示理论认为图像在合适的过完备字典下总存在稀疏的表示, 即大部分表示系数为零, 只有很少的大系数. 图像的这一稀疏表示模型能够刻画其内在结构和先验属性, 在图像去噪、去模糊、源分离、修补等反问题中已经得到了广泛的应用, 并且都获得了出色的实验结果<sup>[8,9]</sup>, 然而图像是包含边缘、轮廓、纹理等多种结构形态的复杂信号, 为了对其形成稀疏表示, 应构建一个与图像中多种结构形态相匹配的多成份字典, 同时子成份字典间应满足不相干性 (Incoherence), 从而形成图像的多形态稀疏表示模型. 基于此模型, 本文提出了一种新的基于多形态稀疏性正则化的多帧图像超分辨凸变分模型, 模型中的正则项刻画了理想图像在多成份字典下的多形态稀疏性先验约束, 保真项度量其在退化模型下与观测信号的一致性.

进一步, 本文给出了求解该 SR 重建模型的数值算法. 前向后向算子分裂法采取一种分而治之的策略, 能

够将复杂问题分解为一系列简单的子问题的迭代求解, 是凸分析中一种经典而高效的凸优化算法, 并具有完备的收敛性分析结论<sup>[10]</sup>. 当前该数值优化算法在图像处理中得到了广泛的应用, 事实上, 当前的许多新兴的数值算法如迭代阈值收缩法、TwIST 算法均可统一在此算法框架中<sup>[11]</sup>. 因此, 本文基于前向后向算子分裂法给出了求解该 SR 重建模型的不动点迭代数值算法, 每一次迭代分解为仅对保真项的前向 (显式) 步与仅对正则项的后向 (隐式) 步, 从而可大幅度降低超分辨重建的计算复杂性. 针对可见光与红外图像序列进行了数值仿真, 实验结果验证了本文模型与数值算法的有效性, 能够有效地保持边缘、轮廓、纹理等结构形态.

## 2 图像的多形态稀疏表示模型

依据计算调和和分析理论, 图像  $\mathbf{u} \in R^N$  可表示为一组原子  $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq M}$  的线性组合, 将原子作为列向量形成字典  $\Phi \in R^{N \times M}$ , 从而图像  $\mathbf{u}$  可表示为:

$$\mathbf{u} = \Phi \alpha \quad (3)$$

其中  $\alpha \in R^M$  为表示系数, 当  $M > N$  时字典  $\Phi$  是过完备的或冗余的. 稀疏表示理论认为图像在合适的字典下总存在稀疏的表示方式, 即大部分表示系数为零, 只有少数的非零大系数.

自然图像为包含多种结构形态的复杂信号, 为了对其形成稀疏表示, 字典中原子应能匹配图像中的多种局部结构形态, 增加字典中原子种类数, 可提高匹配的灵活性, 有利于形成对图像这类复杂信号的稀疏表示. 为此, 分别建立适合于表示图像中每一结构成份的子成份字典  $\Phi_j$ , 多成份字典应满足类内稀疏性与类间不相干性, 即不同子成份字典只最优匹配图像中特定的结构形态, 对与其匹配的图像结构类型能够形成很稀疏的表示, 而对其它结构则不能形成稀疏表示, 可将这些子字典相互组合为一个大的多成份字典 (MCD: Multi-Component Dictionary):

$$\Phi = \bigcup_{j=1}^n \Phi_j \quad (4)$$

$n$  为子成份字典个数, 从而多个子成份字典相互补充, 能够匹配图像中的多个重要结构, 从而对自然图像形成更为稀疏的表示.

2001 年 Meyer 首次提出卡通纹理模式的图像分解模型<sup>[12]</sup>, 将图像建模为边缘卡通成份  $\mathbf{u}_c$  (包括平滑与边缘轮廓等几何结构) 和纹理成份  $\mathbf{u}_t$  的“和”:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_t \quad (5)$$

其中“+”代表图像中含有这两种结构成份. 该模型能够较好地逼近真实的图像信号. 根据此图像分解模型, 需要建立两个子字典  $\Phi_c, \Phi_t$ , 分别对应图像成份  $\mathbf{u}_c, \mathbf{u}_t$ , 依据多成份字典的构造要求, 这两个子字典对图像

的几何结构和纹理分量应是类内强稀疏而类间强不相干的. 基于多成份字典的图像多形态稀疏表示数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min & \|\alpha_c\|_1 + \|\alpha_t\|_1 \\ \text{s.t.} & \mathbf{u} = \Phi_c \alpha_c + \Phi_t \alpha_t \end{aligned} \quad (6)$$

这里选择凸的  $l_1$  范数作为稀疏性度量标准. 借助于子字典对图像结构形态的分类稀疏表示能力, 求解此模型在对图像形成稀疏表示的同时能够将其分解为卡通成份与纹理成份.

### 3 多形态稀疏性正则化超分辨模型

稀疏表示使信号能量只集中于较少的原子, 具有非零系数的原子揭示了信号的主要特征与内在结构, 同时通过分类稀疏表示子成份字典能够分离图像中的几何结构和纹理成份, 提供了良好的自适应处理机制, 从而为几何结构和纹理保持的多幅图像超分辨率奠定良好的基础. 基于理想高分辨率图像在多成份字典  $\Phi_c$  与  $\Phi_t$  下的稀疏表示, 图像退化模型式(2)可表示为:

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{H}_k(\Phi_c \alpha_c + \Phi_t \alpha_t) + \mathbf{v}_k, k = 1, 2, \dots, K \quad (7)$$

根据上式的数据退化模型, 为了超分辨重建高分辨率图像, 自然地可建立一个关于稀疏表示系数  $\alpha_c$  与  $\alpha_t$  的变分问题, 对理想图像的先验约束转化为对系数的多形态稀疏性先验约束. 当退化模型式(2)中噪声  $\mathbf{v}_k$  为独立同分布的高斯白噪声时, 根据正则化理论, 基于图像的多形态稀疏表示模型(6), 数学上多形态稀疏性正则化的超分辨重建可建模为如下变分问题:

$$\begin{aligned} (\alpha_c^*, \alpha_t^*) = \arg \min_{\alpha_c, \alpha_t} & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{H}_k(\Phi_c \alpha_c + \Phi_t \alpha_t) - \mathbf{g}_k\|_2^2 \\ & + \lambda_c \|\alpha_c\|_1 + \lambda_t \|\alpha_t\|_1 \end{aligned} \quad (8)$$

目标泛函中综合了关于字典系数的多形态稀疏性先验(约束)与在数据退化模型下的保真信息, 其中,  $\lambda_c$ ,  $\lambda_t$  为正则化参数, 权衡恢复图像在退化模型下与观测信号的一致性与在多成份字典下表示系数的稀疏性. 最小化能量目标泛函(式(8)), 可恢复出高分辨率图像:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_c + \bar{\mathbf{u}}_t = \Phi_c \alpha_c^* + \Phi_t \alpha_t^* \quad (9)$$

对上述多形态稀疏性正则化的超分辨模型(Multi-morphology Sparsity Regularized Super-Resolution Reconstruction), 本文简记为: MSRSR. 本文的 MSRSR 模型通过分类稀疏表示字典  $\Phi_c$  与  $\Phi_t$  将图像分解为“几何结构分量”、“纹理分量”, 提供了良好的图像结构、纹理自适应的处理和分离机制, 从而有利于保持 SR 重建图像的几何结构与纹理成份, 同时能够将重建图像分解为卡通成份与纹理成份.

本文模型的一个关键问题是选择与设计有效的子成份字典  $\Phi_c$ ,  $\Phi_t$ , 使得图像的几何结构和纹理分量在

此字典下具有稀疏表示, 同时两者应是不相干的. 如果同时具备快速的分解与重建算法则可降低模型数值求解的复杂度. 总体而言, 正交系统具有快速的分解与重建算法, 但稀疏性不足. 冗余的过完备字典虽然具有很好的稀疏逼近性能, 但分解过程过于复杂. 紧框架系统(Tight Frame)可具有快速的分解与重建算法, 在稀疏逼近性能与复杂度间做出了较好的权衡. 因此选取紧框架系统作为本文的子成份稀疏表示字典. 进一步综合考虑现有各紧框架系统中原子的形态结构特征, 为了对图像中的卡通与纹理结构形成稀疏表示, 对于卡通成份可采用 Curvelet、Contourlet、Bandlet 等几何多尺度变换, 纹理成份可以较好地由 Wave-Atom、局部 DCT、Gabor 框架来表征. 在本文的数值试验部分(见第 5 节)将分别选取 Curvelet 与 Wave-Atom 作为几何结构和纹理成份子字典.

### 4 交替迭代收缩数值算法

MSRSR 模型为关于  $\alpha_c$ ,  $\alpha_t$  的双变量优化问题, 本文采用交替最小化策略进行求解, 基本思想是轮流固定某一变量, 交替求解关于另一变量的单变量优化问题. 为此对于第  $n$  次迭代, 原问题可分解为如下两个子问题的迭代求解:

(1) 固定  $\alpha_t$ , 求解变量  $\alpha_c$ , 令  $\mathbf{u}_t^n = \Phi_t \alpha_t^n$  (常量)

$$\alpha_c^{n+1} = \arg \min_{\alpha_c} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \|\mathbf{H}_k(\Phi_c \alpha_c + \mathbf{u}_t^n) - \mathbf{g}_k\|_2^2 + \lambda_c \|\alpha_c\|_1 \quad (10)$$

(2) 固定  $\alpha_c$ , 求解变量  $\alpha_t$ , 令  $\mathbf{u}_c^{n+1} = \Phi_c \alpha_c^{n+1}$  (常量)

$$\alpha_t^{n+1} = \arg \min_{\alpha_t} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{H}_k(\Phi_t \alpha_t + \mathbf{u}_c^{n+1}) - \mathbf{g}_k\|_2^2 + \lambda_t \|\alpha_t\|_1 \quad (11)$$

不难看出, 子问题(1)与(2)均为单变量的凸优化问题, 可通过迭代重加权的最小二乘、内点法、二阶锥规划、活动集等等算法进行迭代求解, 然而在大尺度情形下这些算法非常耗时, 并不可行, 需要采取更为有效的算法. 前向后向算子分裂法是凸分析中一种非常高效的算法, 为了最小化凸函数  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ), 算子分裂法将  $f(\mathbf{x})$  分解为两个(或多个)简单凸函数的和  $f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})$ , 进一步采取分治之的策略, 将原问题转化为仅对  $f_1(\mathbf{x})$  的前向(梯度下降)步与仅对  $f_2(\mathbf{x})$  的后向(邻近算子)步的迭代求解, 具体的不动点迭代公式如下:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \text{prox}_{\gamma_n f_2}(\mathbf{x}^n - \gamma_n \nabla f_1), \forall n \geq 0 \quad (12)$$

其中,  $n$  为迭代次数,  $\lambda_n > 0$  取适当的值时可保证数值算法收敛.  $\nabla f_1$  表示凸函数  $f_1$  的梯度,  $\text{prox}_{\lambda_n f_2}(\mathbf{x})$  为函数  $f_2$  的邻近算子, 定义为:

$$\text{prox}_{\gamma_n, f_2} \mathbf{x} : \mathbf{x} \rightarrow \arg \min_{\mathbf{y} \in K^n} f_2(\mathbf{y}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2^2 / (2\gamma_n) \quad (13)$$

迭代公式(12)由两个分离的子步骤组成,第一步为仅对  $f_1$  的前向步:  $\mathbf{x}^{n+1/2} = \mathbf{x}^n - \gamma_n \nabla f_1$ ;第二步为仅对  $f_2$  的后向步:  $\mathbf{x}^{n+1} = \text{prox}_{\gamma_n, f_2}(\mathbf{x}^{n+1/2})$ ;从数值线性代数的角度看,第一步是显式的迭代格式,比较容易计算,但对迭代步长具有严格的要求;而第二步采用全隐式的迭代格式,具有很好的收敛性,通常情况下具有较高的计算复杂度.算子分裂法是一个有效的折中方法,能够有效利用隐式方法的优点,同时无需求解整个目标函数的邻近算子,从而大幅度降低问题复杂度.因此选取该算法快速求解本文的 MSRSR 模型,可有效降低 SR 重建算法的复杂度.

由上面的分析,对于每一个子问题(见式(10)与式(11)),由前向后向的算子分裂法建立的不动点迭代格式如下:

$$\begin{cases} \alpha_c^{m+1/2} = \alpha_c^m + \gamma_m \sum_{k=1}^K \Phi_c^T H_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{H}_k (\mathbf{u}_i^n + \Phi_c \alpha_c^m)) \\ \alpha_c^{m+1} = \text{prox}_{\gamma_m \lambda_c \|\cdot\|_1} (\alpha_c^{m+1/2}) \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \alpha_i^{m+1/2} = \alpha_i^m + \gamma_m \sum_{k=1}^K \Phi_i^T H_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{H}_k (\mathbf{u}_c^{n+1} + \Phi_i \alpha_i^m)) \\ \alpha_i^{m+1} = \text{prox}_{\gamma_m \lambda_i \|\cdot\|_1} (\alpha_i^{m+1/2}) \end{cases} \quad (15)$$

式中  $m$  为前向后向算子分裂法的迭代次数.同时还需要确定稀疏性惩罚函数  $l_1$  范数的邻近算子,结果如下:

$$\text{prox}_{\gamma, \lambda \|\cdot\|_1} \alpha_i = \text{sign}(\alpha_i) \max\{|\alpha_i| - \gamma\lambda, 0\}, 1 \leq i \leq M \quad (16)$$

可以发现,该公式即为著名的软阈值收缩.因此将本文的数值算法命名为:交替迭代收缩算法(Alternate Iterated Shrinkage: AIS).按照文献[13]的收敛性分析,对于每一个子问题(见式(10)与式(11)),目标泛函为凸的,保真项是可微的且具有 Lipschitz 连续梯度,从保证满足前向后向分裂(迭代收缩)算法是收敛的.可以看出,交替迭代收缩的每一步计算量主要在于字典  $\Phi_c, \Phi_i$  及其伴随与向量的乘积.当两者具有快速变换与重建算法时,该步骤可较为容易实现,例如对 Curvelet 与 Wave-Atom 变换,复杂度仅为  $O(N \log N)$ ,  $N$  为信号维数.而当稀疏表示字典为一般的过完备字典不具有快速变换算法时,可采用匹配追踪、正交匹配追踪、基追踪等等算法计算  $\Phi_c^T, \Phi_i^T$ ,从而获得图像在一般过完备字典下的稀疏表示,但该步骤具有较高的计算复杂度,且通常需要在内存中显式存储字典,具有较高的时间与空间复杂度.本文采用问题变量的相对误差作为迭代算法的停止标准,完整的交替迭代收缩数值算法(伪代码)如下:

算法名称:多形态稀疏性正则化图像超分辨率算法

Step 1:输入:多帧的低分辨率图像  $\{\mathbf{g}_k\}_{1 \leq k \leq K}$ ,设置正则化参数  $\lambda_c, \lambda_i$ ,最优性参数  $\xi_{\text{stop}}$ ;

Step 2:选择初始点  $\alpha_c^0, \alpha_i^0, n = 0$ ;

Step 3:重复执行;

Step 4:更新  $\mathbf{u}_i = \Phi_i \alpha_i^n$ ,固定  $\alpha_i$ ,依据式(14)计算  $\alpha_c^{n+1}$ ;

Step 5:更新  $\mathbf{u}_c = \Phi_c \alpha_c^{n+1}$ ,固定  $\alpha_c$ ,依据式(15)计算  $\alpha_i^{n+1}$ ;

Step 6:  $n = n + 1$ ;

Step 7:直到如下条件不成立:  $\|\alpha_c^n - \alpha_c^{n-1}\| / \|\alpha_c^n\| \leq \xi_{\text{stop}}$  与  $\|\alpha_i^n - \alpha_i^{n-1}\| / \|\alpha_i^n\| \leq \xi_{\text{stop}}$ ;

Step 8:算法输出:SR 重建图像  $\mathbf{u}_c + \mathbf{u}_i$ .

## 5 实验结果与分析

下面本文将通过一系列仿真实验来验证本文 SR 模型及其数值算法的有效性,并同文献[7]中通过梯度下降法求解的 TV 超分辨重建模型(简记为:TVSR)、文献[4]的 Normalized Convolution 算法(简记为:NCSR)进行比较分析.将分别从重建图像的视觉效果、峰值信噪比(PSNR)来评价 SR 重建算法的性能.仿真实验中,根据式(1)退化模型,原始高分辨图像分别经过水平方向和垂直方向分别平移 1,2,3,4 个像素、标准方差为 0.5 的  $3 \times 3$  高斯模糊、4 倍率的下采样和方差分别为 5 与 20 的高斯白噪声退化后生成 9 帧低分辨率图像,将其用作仿真实验的样本数据;

第二代离散 Curvelet 紧框架是继小波变换之后,更匹配图像属性的一种多尺度、多方向性变换,能够有效地稀疏表示图像中的边缘与轮廓结构,对于具有  $C^2$  阶曲线奇异性的光滑图像能够形成近似最优的逼近,同时具有快速的变换算法,对于  $n_1 \times n_2$  图像,算法复杂度仅为  $N \log_2 N (N = n_1 \times n_2)^{[14]}$ .波原子 Wave-Atom 对振荡函数(如纹理结构)具有近似最优的稀疏表示性,并具备快速算法.两者间满足类内强稀疏与类间强不相干性.因此实验中本文分别选取 Curvelet 变换构成字典  $\Phi_c$ , Wave-Atom 变换构成字典  $\Phi_i$ ,并统一采用  $l_1$  范数作为每一框架系数的稀疏性度量标准.针对此具体问题,由交替迭代收缩数值算法,关于系数  $\alpha_c$  的不动点迭代公式如下:

$$\begin{cases} \alpha_c^{m+1/2} = \gamma_m \sum_{k=1}^K \Phi_c^T F_k^T B^T D^T (\mathbf{g}_k - DBF_k (\mathbf{u}_i^n + \Phi_c \alpha_c^m)) + \alpha_c^m \\ \alpha_c^{m+1} = \text{prox}_{\gamma_m \lambda_c \|\cdot\|_1} (\alpha_c^{m+1/2}) \end{cases} \quad (17)$$

由于 Curvelet 为有界线性变换,只需对融合后的图像作一次变换即可,从而每一次迭代只需作一次 Curvelet 变换与反变换.根据实验条件,高斯模糊算子  $B$

与平移算子  $F_k$  具有线性空间不变特性,在周期边界条件下对应循环矩阵,两者间的乘积具有可交换性,从而有  $F_k^T B^T = B^T F_k^T$  以及  $B F_k = F_k B^{[15]}$ ,根据上面的分析,式(17)中第一个子式最终可简化为:

$$\alpha^{m+1/2} = \gamma_m \Phi_c^T B^T \sum_{k=1}^K F_k^T D^T (g_k - D F_k B (u_i^n + \Phi_c \alpha^m)) + \alpha^m \quad (18)$$

使得每一次迭代只需作二次高斯模糊,可进一步降低卷积的运算次数.对于  $\alpha_i$  简化后的迭代公式与式(18)相类似,不再详细列出.由式(16)计算  $l_1$  范数的邻近算子,只具有线性复杂度,从而每一迭代步的运算量主要由第一个梯度下降子步决定.数值试验中,选取  $\alpha_c$  的初值为:

$$\alpha_c^0 = \frac{\Phi_c^T B^T}{K} \sum_{k=1}^K F_k^T D^T g_k, \text{ 而 } \alpha_i \text{ 的初值取为: } \alpha_i^0 = 0.$$

图1、2,分别展示了噪声方差为5时,本文模型(MSRSR)以及NCSR、TVSR对原始  $256 \times 256$  高分辨图像可见光 Women(图1(a)),红外 Infrared Person(图2(a))的SR重建结果.实验中,本文模型采取交替迭代收缩算法(AIS)进行数值求解,具体的不动点迭代公式按上节所列公式执行,同时应用梯度下降法求解TVSR模型;图1(b),图2(b)列出了TVSR模型经400次梯度下降迭代后的重建图像,图1(c),图2(c)为NCSR算法的重建结果,图1(f),图2(f)则给出了本文模型经AIS算法仅迭代30次后的重建图像.表1列出了噪声方差为5与20时,各算法的超分辨重建图像的PSNR.

表1 各算法超分辨重建图像的PSNR比较

实验参数		TVSR	NCSR	本文
图像	噪声方差	PSNR	PSNR	PSNR
Women	5	22.08	22.74	24.70
Women	20	21.82	22.44	24.56
Person	5	31.85	32.23	37.15
Person	20	30.04	31.12	36.55

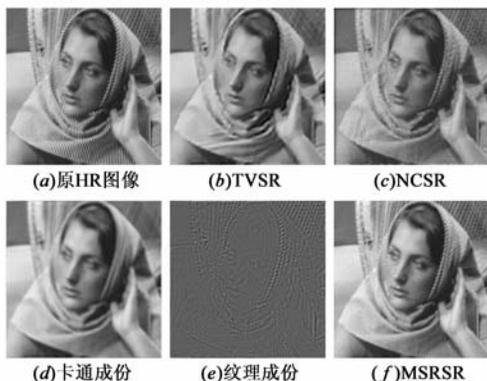


图1 本文MSRSR重建结果及其与TVSR的比较(Women图像)

从实验结果看,TV模型超分辨重建尽管能够很好保持图像中的大尺度边缘、轮廓结构,但可以看出在平

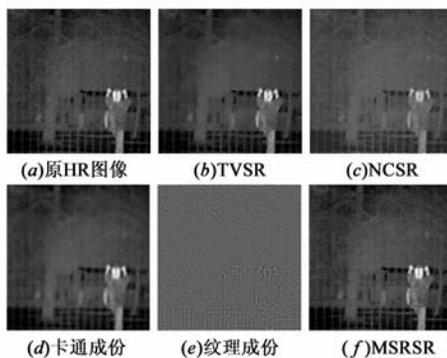


图2 本文MSRSR重建结果及其与TVSR的比较(Infrared Person图像)

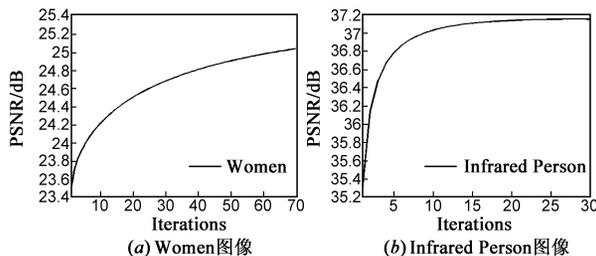


图3 本文MSRSR重建图像峰值信噪比(PSNR)随迭代次数的函数图形

坦以及纹理区域产生了阶梯效应,同时纹理结构等小尺度损失严重.NCSR算法尽管能够保留一定的细节信息,但在细小的边缘轮廓处出现了Gibbs振铃效应.本文算法在重建大尺度局部几何结构的同时,能够更加有效地保持纹理等小尺度细节内容,对Women图像PSNR提高了大约2dB,Infrared Person图像提高了大约5dB.同时从表1可以看出,当噪声强度变大(为20)时,本文MSRSR模型仍保持较高的PSNR,这是由于本文的过完备多形态字典能够有效鉴别边缘、纹理结构,对噪声扰动具有较好的稳健性.由于Curvelet变换与Wavelet变换能够分别对图像中的卡通成份与纹理成份形成稀疏表示,有利于保持重建图像中的几何结构与纹理,同时又具有不相干性,能够对SR重建图像形成有效的成份分解,图1(d)、1(e)、图2(d)、2(e)分别给出了相应的卡通成份与纹理成份的分解结果.图3(a)、3(b)则给出了本文算法(MSRSR)针对像图1(a)、图2(a)的SR重建性能指标PSNR随迭代次数的函数曲线,可以看出,只需迭代较少的次数即可获得高质量的重建图像,具有较低的时间复杂度.

## 6 结论

利用图像在多成份字典下的稀疏表示模型,本文提出了多结构形态稀疏性正则化的图像超分辨模型(MSRSR),能够有效保持超分率重建图像的几何结构与纹理,同时能够将重建图像分解为卡通成份与纹理成份.采用交替迭代法求解本文模型,每一子问题由前向后向的算法子分裂法快速求解,每一步只需计算矩阵

与向量的乘积即可,大幅度降低了算法的复杂度。

#### 参考文献:

- [1] Park S C, Park M K, Kang M G. Super-resolution image reconstruction—A technical overview [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 20(3): 21–36.
- [2] M Irani, S Peleg. Improving resolution by image registration [J]. Graphical Models and Image Processing, 1991, 53(3): 231–239.
- [3] Patti J, Sezan M, Tekalp A M. High-resolution image reconstruction from a low-resolution image sequence in the presence of time-varying motion blur [A]. IEEE Int Conf on Image Processing [C]. Austin: IEEE Computer Society Press, 1994. 343–347.
- [4] Tuan Q Pham, Lucas J van Vliet, Klammer Schutte. Robust fusion of irregularly sampled data using adaptive normalized convolution [J]. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2006, 2006(10): 236–247.
- [5] 邵文泽, 韦志辉. 基于各向异性 MRF 建模的多帧图像变分超分辨率重建 [J]. 电子学报, 2009, 37(6): 1256–1263.  
Shao Wen-ze, Wei Zhi-hui. Multi-frame super resolution reconstruction based on anisotropic Markov random field modeling [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(6): 1256–1263. (in Chinese)
- [6] 宋锐, 吴成柯, 封颖, 等. 一种新的基于 MAP 的纹理自适应超分辨率图像复原算法 [J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1124–1129.  
Song Rui, Wu Cheng-ke, Feng Ying, et al. A new MAP based texture adaptive super-resolution image reconstruction algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1124–1129. (in Chinese)
- [7] Capel D, Zisserman A. Super-resolution enhancement of text image sequences [A]. Proceedings of 15th International Conference on Pattern Recognition [C]. Washington DC: IEEE Computer Society Press, 2000. 1600–1605.
- [8] M J Fadili, J L Starck, F Murtagh. Inpainting and zooming using sparse representations [J]. The Computer Journal, 2009, 52(1): 64–79.
- [9] J Bobin, J L Starck, J Fadili, et al. Morphological component analysis: an adaptative thresholding strategy [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(11): 675–2681.
- [10] G B Passty. Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space [J]. J Math Anal Appl, 1979, 72(7): 383–390.
- [11] J M Bioucas-Dias, M A T Figueiredo. A new TwIST: two-step iterative shrink-age/thresholding algorithms for image restoration [J]. IEEE Trans on Image Proc, 2007, 16(12): 2992–3004.

- [12] Meyer Y. Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equation [M]. Boston: American Mathematical Society, 2001. 35–46.
- [13] P L Combettes, V R Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting [J]. SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(4): 1168–1200.
- [14] E J Candes, L Demanet, D L Donoho. Fast discrete curvelet transforms [J]. Multiscale Model Simul, 2006, 5(3): 861–899.
- [15] Michael Elad, Yacov Hel-Or. A fast super-resolution algorithm for pure translational motion and common space-invariant blur [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(8): 1187–1193.

#### 作者简介:



孙玉宝 男, 1983 年 9 月出生, 南京理工大学博士研究生, 主要研究领域为图像的稀疏表示, 超分辨, 分布式仿真, 网络虚拟环境设计与开发。

E-mail: syb8692833@126.com



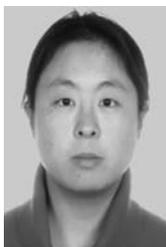
韦志辉(通信作者) 男, 1963 年 11 月出生, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为基于人类感知的稀疏编码理论及应用。

E-mail: gswei@mail.njst.edu.cn



肖亮 男, 1976 年 2 月出生, 副教授, 主要研究方向为变分偏微分方程在图像处理中的应用, 三维医学图像处理等。

E-mail: xtxiaoliang@163.com



张峥嵘 女, 1977 年 10 月出生, 南京理工大学讲师、在读博士研究生, 主要研究领域为图像多尺度分析与图像恢复等。

E-mail: zhengrongzhang6@hotmail.com