

# 基于分数阶傅里叶变换的正交频分 复用系统同步分析

王永学<sup>1</sup>, 陈芳炯<sup>2</sup>, 韦 岗<sup>2</sup>

(1. 深圳职业技术学院电信学院, 广东深圳 518055 2. 华南理工大学电子与信息学院, 广东广州 510640)

**摘 要:** 在基于分数阶傅里叶变换的正交频分复用系统中, 分析并讨论了载波频率误差、采样频率误差以及时间同步误差对系统性能的影响, 并传统的基于普通傅里叶变换的正交频分复用系统的同步性能进行了比较. 仿真结果表明: 当系统参数选择适当时, 基于分数阶傅里叶变换的正交频分复用系统在载波频率误差方面具有较好的同步性能.

**关键词:** 正交频分复用; 分数阶傅里叶变换; 同步基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60402014); 广东省自然科学基金 (No. 31390)

中图分类号: TN914 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2006) 09-1690-04

## Synchronization Analysis of OFDM System Based on Fractional Fourier Transform

WANG Yong-xue<sup>1</sup>, CHEN Fang-jiong<sup>2</sup>, WEI Gang<sup>2</sup>

(1. College of Electronics and Information, Shenzhen Polytechnic, Shenzhen, Guangdong 518055 China;

2. College of Electronics and Information, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640 China)

**Abstract** The synchronization performance of OFDM system based on fractional Fourier transform is studied. The influences of the carrier frequency offset, sample frequency offset and timing misalignment in the OFDM system with fractional Fourier transform are discussed and compared with traditional OFDM system with normal FFT/IFFT. Simulation results show that the OFDM system based on fractional Fourier transform with appropriate parameter has better synchronization performance when carrier frequency offset is discussed.

**Key words** OFDM; fractional Fourier transform; synchronization

## 1 引言

正交频分复用 (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) 技术能很好地抑制符号间干扰, 并可获得很高的频谱利用率, 已经成为下一代移动通信系统的核心技术. 通常, OFDM 系统采用傅里叶变换作为系统中的时频变换. 由于分数阶傅里叶变换是普通傅里叶变换的一般形式, 并且分数阶傅里叶变换可以采用快速算法实现, 其运算量与普通的快速傅里叶变换相近<sup>[1]</sup>, 因此, 基于分数阶傅里叶变换 (FRFT) 的 OFDM 系统正成为新的研究热点. 在快速时变信道中, 基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统具有比传统的基于普通傅里叶变换的 OFDM 系统更好的性能<sup>[2,3]</sup>.

由于 OFDM 系统对时间和频率偏移比较敏感, 同步技术是 OFDM 系统中最为关键的技术之一. 无论是基于普通傅里叶变换还是基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统, 对系统同步误差都比较敏感. 目前, 针对基于普通傅里叶变

换的 OFDM 系统同步问题的研究已比较成熟<sup>[4,5]</sup>; 而针对基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统的同步问题研究还比较少. 本文在基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统中, 分析并讨论了其同步性能, 包括载波频率误差、采样频率误差以及时间同步误差对系统性能的影响, 并传统的基于普通离散傅里叶变换的 OFDM 系统的同步性能进行了比较.

## 2 系统模型

假设基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统中有  $N$  个子载波,  $s_n$  表示系统在子载波  $n$  上要发送的调制符号, 并设 OFDM 符号的周期是  $T = T_s + T_g$ , 其中  $T_s$  表示  $N$  点时域样值的时间,  $T_g$  表示保护间隔的时间. 于是, 一个 OFDM 符号的时域值可表示为<sup>[2]</sup>:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n c_n(t), \quad t \in [0, T_s) \quad (1)$$

收稿日期: 2005-05-16 修回日期: 2006-02-18

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60402014); 广东省自然科学基金 (No. 31390)

其中  $c_{-\alpha}(t, n) = A_{-\alpha} e^{-j\pi[(t + (\frac{n}{T_s})^2) \cot \alpha - 2n\frac{t}{T_s} \csc \alpha]}$ ,

$$A_{-\alpha} = e^{-j\pi \operatorname{sgn}(\sin \alpha)/4 + j\alpha/2} / \sqrt{|\sin \alpha|},$$

$\alpha$  是与变换阶数相关的角度变量,  $\alpha = (\pi/2)a$ . 当  $a=1$  时, 式(1)可简化为:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_s}}, \quad t \in [0, T_s] \quad (2)$$

显然, 这是一个普通的傅里叶反变换. 这说明普通的傅里叶变换只是分数阶傅里叶变换的一个特例.

定义  $m$  时刻在子载波  $n$  上的频率响应为  $H_n(m)$ , 系统高斯噪声为  $n(t)$ , 可知  $m$  时刻 OFDM 系统接收的基带信号可以表示为:

$$r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} H_n[m] s_n[m] c_{-\alpha}(t, n) + n(t) \quad (3)$$

### 3 载波频率误差的 MAI 分析

假设系统接收端与发送端之间存在载波频率误差  $\Delta f$ . 于是,  $m$  时刻接收端在子载波  $i$  上的输出可以表示为:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{1}{T_s} \int_{mT}^{mT+T} r(t) c_{\alpha}(t, f_i) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{mT}^{mT+T} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} H_n[m] s_n[m] c_{-\alpha}(t - mT, f_n - \Delta f) \right\} \\ &\quad \cdot c_{\alpha}(t - mT, f_i) dt + N_i \\ &= D_i + \text{MAI} + N_i \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $D_i$  是  $s_i$  的作用项, 而 MAI 则表示子载波间干扰的总和,  $N_i$  是高斯噪声产生的. 设  $a \in (0, 1]$ , 即  $\alpha \in (0, \pi/2]$ , 于是可以推导出:

(1) 当  $a=1$ , 即  $\alpha = \pi/2$  时, 对应普通傅里叶变换, 系统的载干比可表示为<sup>[5]</sup>:

$$\text{SIR}_i = \frac{|H_i[m]|^2 |s_i[m]|^2}{\sum_{n=0, n \neq i}^{N-1} |H_n[m]|^2 |s_n[m]|^2 \left( \frac{\sin \pi T_s \Delta f}{\pi(n-i) - \pi T_s \Delta f} \right)^2} \quad (5)$$

(2) 当  $a \in (0, 1)$ , 即  $\alpha \in (0, \pi/2)$  时, 可推导出信号和干扰分别为:

$$D_i = H_i[m] s_i[m] e^{-j\pi(\frac{2i}{T_s} - \Delta f) \cot \alpha + j\pi T_s \Delta f \csc \alpha} \frac{\sin(\pi T_s \Delta f \csc \alpha)}{\pi T_s \Delta f} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{MAI} &= \sum_{n=0, n \neq i}^{N-1} H_n[m] s_n[m] e^{j\pi[(\frac{n}{T_s} - \Delta f)^2 - (\frac{i}{T_s})^2] \cot \alpha - j\pi T_s (\frac{n-i}{T_s} - \Delta f) \csc \alpha} \\ &\quad \times \frac{\sin(\pi T_s ((n-i)/T_s - \Delta f) \csc \alpha)}{\pi T_s ((n-i)/T_s - \Delta f)} \end{aligned} \quad (7)$$

进一步, 可以得到系统的载干比:

$$\begin{aligned} \text{SIR}_i &= \frac{|H_i[m]|^2 |s_i[m]|^2}{\sum_{n=0, n \neq i}^{N-1} |H_n[m]|^2 |s_n[m]|^2 \left( \frac{\sin(\pi(n-i - T_s \Delta f) \csc \alpha)}{\pi(n-i - T_s \Delta f) \csc \alpha} \right)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

为了具体分析不同参数下载波频率误差对载干比的

影响, 根据式(5)和式(8), 利用表 1 的参数, 通过仿真计算  $\csc \alpha$  为不同值时的载干比 ( $\csc \alpha = 1$  对应普通傅里叶变换). 结果如图 1 所示.

表 1 仿真参数

参数	参数值
$N$	64
$T_s$	3.2 $\mu\text{s}$

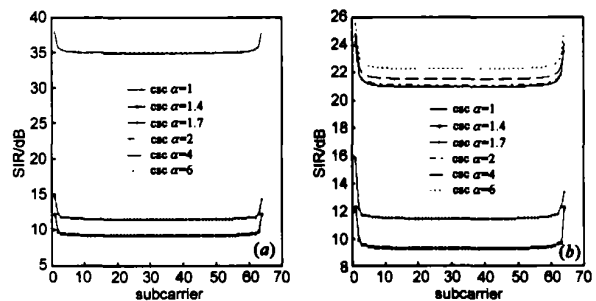


图 1 载波频率误差为 (a)  $\frac{1}{T_s} \times 1\%$ ; (b)  $\frac{1}{T_s} \times 5\%$  子载波间隔时的载干比

由图 1 可知:

(1)  $\csc \alpha$  为整数时, 对应的载干比性能远优于  $\csc \alpha$  不为整数时的情况;

(2)  $\csc \alpha$  为整数时, 系统的载干比随着载波频率误差的增大而减少. 当  $\Delta f$  由  $\frac{1}{T_s} \times 1\%$  增加到  $\frac{1}{T_s} \times 5\%$ , 对应的载干比减小了约 14 dB;

(3) 在  $\csc \alpha$  为整数的情况下, 在载波频率误差较小的情况下, 不同的  $\csc \alpha$  值对应几乎相同的载干比见图 1(a), 而当载波误差较大时, 系统的载干比随  $\csc \alpha$  的值增大而增大见图 1(b). 也就是说, 当  $\csc \alpha$  为大于 1 的整数时, 基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统的载干比要比传统的基于普通傅里叶变换的 OFDM 系统的载干比高.

### 4 采样频率误差的 MAI 分析

如果系统的接收端的采样频率与发送端的采样频率不一致, 也会带来误差. 设采样频率误差为  $\Delta f_s$ . 由于 OFDM 符号周期可以表示为:  $T_s = N/f_s$ , 从而可得  $f_s = n/T_s = (f_s/N)n$ . 其中  $f_s$  表示采样频率. 当采样频率出现误差时, 符号周期可表示为  $T'_s = N/(f_s + \Delta f_s)$ . 从而, 子载波  $n$  的频率  $f'_n = n/T'_s = (f_s + \Delta f_s)n/N$ . 于是根据式(3), 同样可以得到接收端子载波  $i$  上的信号:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{1}{T_s} \int_{mT}^{mT+T} r(t) c_{\alpha}(t - mT, f_i) dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{mT}^{mT+T} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} H_n[m] s_n[m] c_{-\alpha}(t - mT, f'_n) \right\} \\ &\quad \cdot c_{\alpha}(t - mT, f_i) dt + N_i \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{mT}^{mT+T} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} H_n[m] s_n[m] c_{-\alpha}(t - mT, \frac{f_s + \Delta f_s}{N} n) \right\} \\ &\quad \cdot c_{\alpha}(t - mT, f_i) dt + N_i \\ &= D_i + \text{MAI} + N_i \end{aligned} \quad (9)$$

(1) 当  $a=1$ , 即  $\alpha=\pi/2$  时, 对应普通傅里叶变换, 系统的载干比可表示为<sup>[5]</sup>:

$$SIR_i = \frac{|H_i[m]|^2 |s_i[m]|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |H_n[m]|^2 |s_n[m]|^2 \left( \frac{\sin \pi \left( (n-i) + \frac{n\Delta f_i}{f_s} \right)}{\pi \left( (n-i) + \frac{n\Delta f_i}{f_s} \right)} \right)^2} \quad (10)$$

(2) 当  $a \in (0, 1)$ , 即  $\alpha \in (0, \pi/2)$  时, 可推导出有用信号和干扰分别为:

$$D_i = H_i[m] s_i[m] e^{j\pi \left[ (2i_f + i\Delta f_i)/N \right] (i\Delta f/N) \cot \alpha - j\pi (i\Delta f/f_s) \csc \alpha} \frac{\sin(\pi(i\Delta f/f_s) \csc \alpha)}{\pi(i\Delta f/f_s)} \quad (11)$$

$$MAI = \sum_{n=0}^{N-1} H_n[m] s_n[m] \cdot e^{j\pi \left[ ((n+i)f_s + n\Delta f_i)/N \right] \left[ ((n-i)f_s + n\Delta f/N)/N \right] \cot \alpha - j\pi ((n-i) + n\Delta f/f_s) \csc \alpha} \times \frac{\sin(\pi((n-i) + n\Delta f/f_s) \csc \alpha)}{\pi((n-i) + n\Delta f/f_s)} \quad (12)$$

从而可以得到系统的载干比:

$$SIR_i = \frac{|H_i[m]|^2 |s_i[m]|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |H_n[m]|^2 |s_n[m]|^2 \left( \frac{\sin \left( \pi \left( (n-i) + \frac{n\Delta f_i}{f_s} \right) \csc \alpha \right)}{\pi \left( (n-i) + \frac{n\Delta f_i}{f_s} \right)} \right)^2} \quad (13)$$

根据式(10)和(13), 采用表1的仿真参数, 通过仿真可以得到图2.

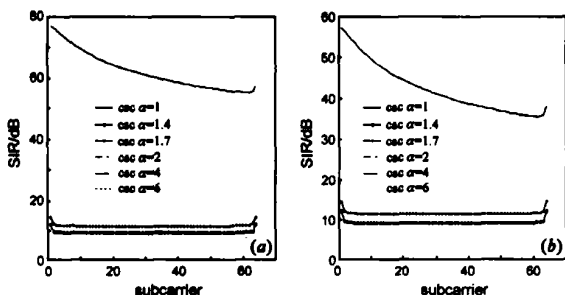


图2 采样频率误差为(a) 5 ppm; (b) 50 ppm时的载干比

由图2可知:

(1)  $\csc \alpha$  为整数时, 对应的载干比性能远优于  $\csc \alpha$  不为整数时的情况;

(2)  $\csc \alpha$  为整数时, 系统的载干比随着载波频率误差的增大而减少. 当采样频率误差由 5 ppm 增大到 50 ppm 时, 对应的载干比减小了约 20 dB;

(3) 在  $\csc \alpha$  为整数的情况下, 不同整数的  $\csc \alpha$  值具有相同的载干比. 也就是说, 当  $\csc \alpha$  为大于 1 的整数时, 基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统与基于普通傅里叶变换

( $\csc \alpha$  为 1) 的 OFDM 系统具有相同的载干比性能.

## 5 时间同步误差的 MAI 分析

假设系统的接收端与发送端存在时间同步误差  $\tau$ . 于是,  $m$  时刻接收端在子载波  $i$  上接收的输出可以表示为:

$$R_i = \frac{1}{T_s} \int_{mT}^{mT+T} r(t) c_a(t, i) dt \\ = \frac{1}{T_s} \int_{mT}^{mT+T} \left( \sum_{n=0}^{N-1} H_n[m] s_n[m] c_a(t - mT - \tau, n) + n(t) \right) c_a(t - mT, i) dt \\ = D_i + MAI + N_i \quad (14)$$

在式(14)中,  $D_i$  是  $s_i$  的作用项, 而 MAI 则表示子载波间干扰的总和,  $N_i$  是高斯噪声产生的. 设  $a \in (0, 1]$ , 即  $\alpha \in (0, \pi/2]$ , 由式(14)可得:

(1) 当  $a=1$ , 即  $\alpha=\pi/2$  时, 可以得到基于普通傅里叶变换的 OFDM 系统的接收信号为<sup>[5]</sup>:

$$R_i = H_i[m] s_i[m] e^{j\frac{2\pi}{T_s} \tau} + N_i \quad (15)$$

$$MAI = 0 \quad (16)$$

(2) 当  $a \in (0, 1)$ , 即  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  时, 推导可得:

$$D_i = jH_i[m] s_i[m] e^{j\pi \left[ \tau \cot \alpha + 2\tau T_s \csc \alpha \right] + j\pi \tau \cot \alpha T_s} \frac{\sin \pi \tau T_s \cot \alpha}{\pi \tau T_s \cot \alpha} \quad (17)$$

$$MAI = \sum_{n=0}^{N-1} H_n[m] s_n[m] e^{j\pi \left[ \frac{(n-i)\csc \alpha}{T_s} \cot \alpha + \tau \cot \alpha + 2\tau T_s \csc \alpha \right] + j\pi \left[ (n-i) \csc \alpha - T_s \cot \alpha \right]} \times \frac{\sin \pi \left[ (n-i) \csc \alpha - T_s \cot \alpha \right]}{\pi \left[ (n-i) - \tau T_s \cot \alpha \right]} \quad (18)$$

$SIR_i =$

$$\frac{|H_i[m]|^2 |s_i[m]|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |H_n[m]|^2 |s_n[m]|^2 \left( \frac{\sin \pi \left[ (n-i) \csc \alpha - T_s \cot \alpha \right]}{\pi \left[ (n-i) - \tau T_s \cot \alpha \right]} \right)^2} \quad (19)$$

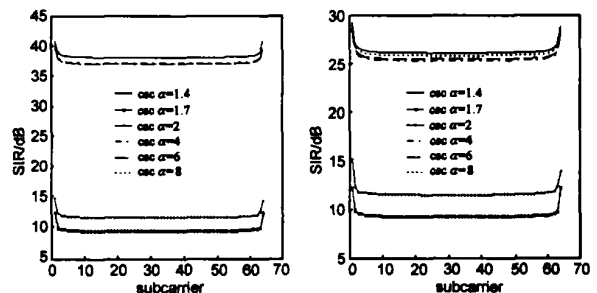


图3 时间同步误差为(a)  $\frac{T_s}{N} \times 5\%$ ; (b)  $\frac{T_s}{N} \times 20\%$  的载干比

同样, 根据式(19), 采用表一的仿真参数, 通过仿真可以得到图3.

由图3可知:

(1)  $\csc \alpha$  为整数时, 对应的载干比性能远优于  $\csc \alpha$  不

为整数时的情况:

(2)  $\csc\alpha$  为整数时, 系统的载干比随时间同步误差的增大而减小. 当时间同步误差由  $\frac{T_s}{N} \times 5\%$  增大到  $\frac{T_s}{N} \times 20\%$  时, 对应的载干比下降了 12dB 左右;

(3)  $\csc\alpha$  为 1 时, 对应普通傅里叶变换, 具有最好的载干比性能.

## 6 结论

本文通过推导, 分析并讨论了基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统中载波频率误差、采样频率误差以及时间同步误差对系统性能的影响, 并与传统的基于普通傅里叶变换的 OFDM 系统的同步性能进行了比较. 仿真结果表明, 基于特定参数 ( $\alpha \in \{\alpha | \csc\alpha \in Z\}$ ) 的分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统具有较好的同步性能. 与基于普通傅里叶变换 ( $\alpha \in \{\alpha | \csc\alpha = 1\}$ ) 的 OFDM 系统相比, 基于特定参数 ( $\alpha \in \{(\csc\alpha > 1) \cap (\csc\alpha \in Z)\}$ ) 的分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统对载波频率误差具有更好的抵抗力. 在采样频率误差方面, 两种方法有基本相同的性能. 在时间同步误差方面, 基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统的载干比性能略差于基于普通傅里叶变换的 OFDM 系统. 在这里, 要特别说明的是普通傅里叶变换是包含于分数阶傅里叶变换的, 它是分数阶傅里叶变换的一个特例.

由于分数阶傅里叶变换是普通傅里叶变换的一般形式, 如果把普通傅里叶变换中看作是一个时频平面 (时间轴旋转  $\pi/2$  得到频率轴) 的话, 那么分数阶傅里叶变换对应的时频平面就是普通傅里叶变换对应的时频平面旋转一个角度  $\alpha$  后得到的结果. 正是因为有了一个旋转角度  $\alpha$ , 信号在分数阶傅里叶变换的坐标轴上的投影同时包含了时间成分和频率成分, 因此分数阶傅里叶变换在快速衰落信道 (时间和频率选择性衰落) 中可以取得优于普通傅里叶变换的性能<sup>[2]</sup>. 在存在载波频率误差的 OFDM 系统中, 如果采用分数阶傅里叶变换, 显然可以通过选择适当的旋转角度, 以尽量减少载波频率误差对系统性能的影响. 相

当于在一个更大的集合内寻找使系统性能最好的参数, 这也是基于分数阶傅里叶变换的 OFDM 系统可以在载波频率误差方面取得比基于普通傅里叶变换的 OFDM 系统更好的性能的原因.

## 参考文献:

- [1] Ozaktas H M, Arkan O, Kutay M A, Bozdagt G. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Trans on Signal Processing 1996, 44(9): 2141–2150
- [2] Martone M. A multicarrier system based on the fractional Fourier transform for time-frequency-selective channels [J]. IEEE Trans on Communications 2001, 49(6): 1011–1020
- [3] Ju Y, Bakat B, Attallah S. Analysis of peak-to-average power ratio of a multicarrier system based on the fractional Fourier transform [A]. The Ninth International Conference on Communications Systems [C]. Singapore: NCCS, 2004. 165–168
- [4] Myonghee P, Kyunbyoung K, Hwasun Y, Daesik H. Performance analysis of OFDMA uplink systems with symbol timing misalignment [J]. IEEE Communications Letters 2003, 7(8): 376–378
- [5] EFTanany M S, Yiyang W, Hazy L. OFDM uplink for interactive broadband wireless: Analysis and simulation in the presence of carrier clock and timing errors [J]. IEEE Trans on Broadcasting 2001, 47(1): 3–19

## 作者简介:

王永学 男, 1975 年生于湖南郴州, 深圳职业技术学院电信学院讲师, 主要研究方向为无线通信系统中的信号处理和调制技术. E-mail: wyxjhu@163.com

陈芳炯 男, 1975 年生于广东澄海, 华南理工大学讲师, 主要研究方向下一代无线通信系统, 信道估计, 多用户检测.

韦 岗 男, 1963 年生于广西宾阳, 华南理工大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为现代数字信号处理.