

复 FIR 数字滤波器幅值约束 Chebyshev 设计

赵瑞杰, 赖晓平

(山东大学威海分校信息工程学院, 山东威海 264209)

摘 要: L. J. Karam 和 M. C. Clellan 最早得到了有关复数域 Chebyshev 逼近的复交错点组定理, 并提出了以此定理为基础的复 Remez 算法用于复 FIR 数字滤波器的 Chebyshev 设计. 本文首先给出并证明了复交错点组定理在带不等式约束条件下的扩展定理, 之后, 根据此扩展定理中对最优解极值频率点特性的描述, 提出了一种有效的算法来解决带幅值不等式约束的复 FIR 数字滤波器的 Chebyshev 设计问题. 这一新算法中还结合了复 Remez 算法及赖晓平提出的迭代 Remez 算法, 并且如果问题的解存在则保证收敛到此解. 作者把上述算法做成了 MATLAB 语言程序, 并进行了大量的实例设计实验, 仿真结果表明此算法有效而可靠.

关键词: 复 FIR 滤波器; 约束复交错点组定理; 复 Remez 算法; 迭代 Remez 算法; 约束复 Remez 算法

中图分类号: TN713 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 09-1694-06

Chebyshev Design of Complex FIR Digital Filters with Magnitude Constraints

ZHAO Ru-jie, LAI Xiao-ping

(School of Information Engineering, Shandong University at Weihai, Weihai, Shandong 264209, China)

Abstract The complex Alternation Theorem proposed by L. J. Karam and M. C. Clellan is the foundation of the complex Remez algorithm for Chebyshev design of complex FIR filters. Here in, the complex Alternation Theorem is extended to the case with inequality constraints, and then a new algorithm is presented for the design of Chebyshev FIR filters with magnitude inequality constraints. The new algorithm combines the complex Remez algorithm and the iterative Remez algorithm proposed by X. P. Lai and is guaranteed to converge to the optimal solution, if exists. A lot of design examples are to be given, and the results of simulation illustrate the performance of the algorithm.

Key words complex FIR filter; constrained complex Alternation Theorem; complex Remez algorithm; iterative Remez algorithm; constrained complex Remez algorithm

1 引言

近年来, 人们开始对复 FIR 数字滤波器的设计问题进行研究, 原因之一是当线性相位滤波器的阶数很高时会产生较大延迟, 而且阻带的线性相位是没必要的; 之二是非线性相位滤波器在一些领域有着广泛的应用, 如小波基为复值函数的小波变换^[1], 机载雷达或移动平台主动声纳中去除杂波的 V 形滤波器^[2], 能同时均衡幅值和相角的 FR 均衡器^[3], 波束形成问题以及语言信号处理中低延迟滤波器等. 但是, 由于复数域 Chebyshev 逼近问题的最优解不能像实数域中那样被确切的描述, 故复 FIR 滤波器的 Chebyshev 设计问题一直是滤波器设计中的难点. J. A. Barreto 等在^[4]中运用迭代重加权最小二乘法 (RLS) 设计复 Chebyshev FIR 滤波器, 由于此算法源于 Lawson 算法故收敛很慢. A. S. Akhauri 等^[5]把 P. P. Tang 文^[6]提出的一种复

Chebyshev 逼近的交换算法用于复 FIR 滤波器设计问题, 但是 P. P. Tang 的算法只适用于实系数情况. L. J. Karam 和 M. C. Clellan 在文献^[7]中把实数域的交错点组定理扩展到复数域, 并提出了高效的复 Remez 算法用于解决复 FIR 滤波器的 Chebyshev 设计问题. 然而由于此扩展定理仅是一个充分条件, 所以复 Remez 算法不能保证一定收敛到问题的最优解而往往只找到一个次优解 (在工程上这个解也是可以接受的). 在文献^[8]中他们对上述算法做了进一步的完善, 若复 Remez 算法找不到最优解, 则在找到的次优解的基础上用一种基于最速下降法的交换算法寻找最优解. 此算法已经做成了 MATLAB 程序 `cromez()`, 见 `signal` 工具箱. 完善后算法能收敛到复滤波器设计问题的最优解, 但最速下降法可能会消耗稍多的时间, 这与得到的次优解有关.

本文要讨论的是复 FIR 数字滤波器的幅值约束 Chebyshev 设计问题, 对于此问题, M. Lang 在他的博士论文

收稿日期: 2005-06-05 修回日期: 2006-03-24

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 60275006); 山东省自然科学基金项目 (No. Y2005G11)

[9]中用了迭代重加权最小二乘 (IRLS) 算法, 如上所述, 算法收敛慢. R. Vuerinckx^[10]则提出了带约束的 P. P. Tang 算法并用于滤波器设计, 当然也只能解决实系数滤波器的约束设计问题. Remez 算法及复 Remez 算法的高效性在于它们是根据最优误差函数极值点的交错特性而设计的, 遵循这一思想, 本文首先把复交错点组定理扩展到带不等式约束的情况, 也得到一个约束最优误差函数极值点的交错特性. 然后根据这一特性, 借鉴复 Remez 算法中点组交换规则及文献 [11] 中的算法, 提出了一种约束复 Remez 算法来求解带幅值不等式约束的复 FIR 滤波器 Chebyshev 设计问题. 虽然算法能很快收敛, 但和复 Remez 算法一样, 此算法也往往只能得到次优解, 所以需要进一步完善. 赖晓平在文献 [12]、[13] 中针对线性相位 FIR 滤波器的幅值不等式约束 Chebyshev 设计问题提出了迭代 Remez 算法, 此算法不仅能收敛到问题的最优解而且完全能够用于复 FIR 滤波器的设计. 由于迭代 Remez 算法反复调用文献 [7]、[8] 中的算法, 单纯用于求解复 FIR 滤波器的约束设计问题收敛会比较慢, 但是当我们用约束复 Remez 算法得到一个较好的次优解后, 再调用迭代 Remez 算法则往往可很快收敛.

作者把文中提出的算法做成了 MATLAB 程序, 本文最后给出了一些设计实例, 仿真分析说明, 此算法可靠而有效, 能较快收敛到问题的最优解.

2 问题描述与理论基础

长为 N 的因果的复 FIR 数字滤波器的频率特性函数可表达为:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad (1)$$

其中 $\{h(n)\}_{n=0}^{N-1}$ 为系统的单位脉冲响应 (为复数). 如果把式 (1) 的幅值和相角分离, 则得到:

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

$A(\omega)$, $\phi(\omega)$ 分别称为幅频特性和相频特性, 它们均是数字域频率 ω 的实函数. 所谓复 FIR 滤波器的 Chebyshev 设计问题就是寻找给定的期望频率特性 $D(e^{j\omega})$ 的 Chebyshev (最佳一致) 逼近函数 $H(e^{j\omega})$, 也即求解参数 $\{h(n)\}_{n=0}^{N-1}$.

本文要讨论的是带有幅值不等式约束的复 FIR 数字滤波器的 Chebyshev 设计问题, 其数学模型为:

$$\begin{aligned} \min_{\omega \in \tilde{\Omega}} & \max_{\omega \in \tilde{\Omega}} |W(\omega)| |H(e^{j\omega}) - D(e^{j\omega})| \\ \text{s.t.} & |H(e^{j\omega}) - D(e^{j\omega})| \leq \rho(\omega), \quad \omega \in \tilde{\Omega} \end{aligned}$$

其中 Ω 和 $\tilde{\Omega}$ 是 $[-\pi, \pi)$ 上不相交的闭子集, $W(\omega) > 0$ 为加权函数, 用于调整不同频段的误差比, $\rho(\omega) > 0$ 为幅值约束函数, 并假设期望频率特性 $D(e^{j\omega})$ 为 $[-\pi, \pi)$ 上的连续函数. 为简化模型, 令

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = e^{j\omega} H(\omega), \quad \tilde{D}(e^{j\omega}) = e^{j\omega} D(\omega)$$

则原问题可化为:

$$\min_{\omega \in \tilde{\Omega}} \max_{\omega \in \tilde{\Omega}} |W(\omega)| |\tilde{H}(\omega) - \tilde{D}(\omega)| \quad (2)$$

$$\text{s.t.} |\tilde{H}(\omega) - \tilde{D}(\omega)| \leq \rho(\omega), \quad \omega \in \tilde{\Omega} \quad (3)$$

若 N 是奇数, 则:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \alpha_n \cos n\omega + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \beta_n \sin n\omega \\ \text{其中:} &\begin{cases} \alpha_0 = h_e(0); \alpha_n = 2h_e(n), n \neq 0; \beta_n = -2h_0(n) \\ h_e(n) = [h(N_{\text{mid}} + n) + h(N_{\text{mid}} - n)]/2 \\ h_0(n) = [h(N_{\text{mid}} + n) - h(N_{\text{mid}} - n)]/2 \\ N_{\text{mid}} = (N-1)/2 \end{cases} \end{aligned}$$

若 N 是偶数, 则:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{(N-2)/2} [\alpha_n \cos(n+1/2)\omega + \beta_n \sin(n+1/2)\omega] \\ \text{其中:} &\begin{cases} \alpha_n = 2h_e(n); \beta_n = -2h_0(n) \\ h_e(n) = [h(N_{\text{mid}} + n) + h(N_{\text{mid}} - n - 1)]/2 \\ h_0(n) = [h(N_{\text{mid}} + n) - h(N_{\text{mid}} - n - 1)]/2 \\ N_{\text{mid}} = N/2 \end{cases} \end{aligned}$$

所以, 当 N 为奇数时, $H(\omega)$ 属于以 $\{1, \cos(n\omega), \sin(n\omega)\}_{n=1}^{(N-1)/2}$ 为基的 N 维线性复值函数空间 $V_{N\omega}$; 当 N 为偶数时, $H(\omega)$ 属于以

$$\{\cos(n+1/2)\omega, \sin(n+1/2)\omega\}_{n=0}^{(N-2)/2}$$

为基的 N 维线性复值函数空间 $V_{N\omega}$. 由函数 $H(e^{j\omega})$ 的定义知函数 $H(\omega)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上至多有 $N-1$ 个零点, 所以这两个空间在 $[-\pi, \pi)$ 上都满足 Haar 条件 (见附录 1). 关于问题 (2)、(3) 我们得到如下定理.

定理 1 (约束复交错点组定理) 设 $H^*(\omega)$ 属于 $V_{N\omega}$ 或 $V_{N\omega}$ 且满足约束条件 (3), 如果存在 (至少) $N+1$ 个按升序

排列的点 $\{\omega_k\}_{k=0}^N \subset \Omega \cup \tilde{\Omega}$ 满足下式:

$$\begin{cases} W(\omega_k) |H^*(\omega_k) - D(\omega_k)| = \delta^*, & \omega_k \in \Omega \\ |H^*(\omega_k) - D(\omega_k)| = \rho(\omega_k), & \omega_k \in \tilde{\Omega} \\ \arg H^*(\omega_k) - D(\omega_k) = \arg H^*(\omega_{k+1}) - D(\omega_{k+1}) + \pi \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$\delta^* = \max_{\omega \in \tilde{\Omega}} |W(\omega)| |H^*(\omega) - D(\omega)| \quad (5)$$

则 $H^*(\omega)$ 是问题 (2)、(3) 的唯一解.

证明 当 N 为奇数时 (N 为偶数时证明方法相同), 假设 $H^*(\omega)$ 不是问题 (2)、(3) 的解或唯一解, 必存在 $H(\omega) \in V_{N\omega}$ 满足约束条件 (3) 且使下式成立:

$$W(\omega) |H^\circ(\omega) - D(\omega)| \leq \delta^*, \quad \omega \in \Omega \quad (6)$$

为证明简便做如下记号:

$$H^*(\omega) = c^* \times H, \quad H^\circ(\omega) = c^\circ \times H$$

$$E^*(\omega) = [H^*(\omega) - D(\omega)], \quad E^\circ(\omega) = [H^\circ(\omega) - D(\omega)],$$

$$\bar{E}(\omega) = [E^*(\omega) - E^\circ(\omega)] = [H^*(\omega) - H^\circ(\omega)]$$

其中:

$$c^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \beta_1^*, \dots, \alpha_{(N-1)/2}^*, \beta_{(N-1)/2}^*),$$

$$c^\circ = (\alpha_0^\circ, \alpha_1^\circ, \dots, \beta_1^\circ, \dots, \alpha_{(N-1)/2}^\circ, \beta_{(N-1)/2}^\circ)$$

$H = (1, \cos\omega, \sin\omega, \dots, \cos(N-1)\omega/2, \sin(N-1)\omega/2)^T$.

再设 $E^*(\omega_0)$ 的相角为 $\arg(E^*(\omega_0)) = \theta$ 则有:

$$\begin{cases} W(\omega_k)E^*(\omega_k)e^{j\theta} = (-1)^k\delta, & \omega_k \in \Omega \\ E^*(\omega_k)e^{j\theta} = (-1)^k\rho(\omega_k), & \omega_k \in \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (7)$$

同时还可得到 ($\operatorname{Re}[z]$, $\operatorname{Im}[z]$ 表示复数的实部和虚部):

$$\operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{-j\theta}] = \operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{j\theta}] - \operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{j\theta}] \quad (8)$$

$$= \operatorname{Re}[H^*(\omega) - H^*(\omega)] \cos\theta + \operatorname{Im}[H^*(\omega) - H^*(\omega)] \sin\theta = \{\operatorname{Re}[c^* - c^0] \cos\theta + \operatorname{Im}[c^* - c^0] \sin\theta\} \times H$$

易见, $\operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{-j\theta}] \in V_{N+1}$ 且系数是实值的, 所以它在 $\Omega \cup$

$\tilde{\Omega}$ 上至多有 $N-1$ 个零点. 从 $\{\omega_k\}_{k=0}^N$ 中找出使 $\operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{-j\theta}] \neq 0$ 的点, 记为 $\{\bar{\omega}_l\}_{l=0}^L$. 由于 $H^*(\omega) \neq H^*(\omega)$, 所以 $\{\bar{\omega}_l\}_{l=0}^L$ 中至少有两个元素. 设在区间 $(\bar{\omega}_k, \bar{\omega}_{k+1})$ 上有 m 个属于 $\{\omega_k\}_{k=0}^N$ 的点, 当 m 为偶数或零时, 由式 (7) 知 $E^*(\bar{\omega}_k)E^*(\bar{\omega}_{k+1})e^{-2j\theta} < 0$ 再由式 (6) ~ (8) 可得 $E^*(\bar{\omega}_k)e^{j\theta}\operatorname{Re}[E^*(\bar{\omega}_k)e^{-j\theta}] > 0$ 从而有 $\operatorname{Re}[E^*(\bar{\omega}_k)e^{-j\theta}]\operatorname{Re}[E^*(\bar{\omega}_{k+1})e^{-j\theta}] < 0$ 然而, 由于函数 $\operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{-j\theta}]$ 对 ω 是连续可导的, 故当 $\operatorname{Re}[E^*(\bar{\omega}_k)e^{-j\theta}]\operatorname{Re}[E^*(\bar{\omega}_{k+1})e^{-j\theta}] < 0$ 时, 它在区间 $(\bar{\omega}_k, \bar{\omega}_{k+1})$ 上的零点应为奇数个 (重零点按重数计算), 所以 $\operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{-j\theta}]$ 在区间 $(\bar{\omega}_k, \bar{\omega}_{k+1})$ 上至少有 $m+1$ 个零点. 同理, 当 m 为奇数时也可推出 $\operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{-j\theta}]$ 在区间 $(\bar{\omega}_k, \bar{\omega}_{k+1})$ 上至少有 $m+1$ 个零点. 综上所述, $\operatorname{Re}[E^*(\omega)e^{-j\theta}]$ 在区间 $[\omega_0, \omega_N]$ 上至少有 N 个零点. 这是不可能的, 故 $H^*(\omega)$ 不存在, $H^*(\omega)$ 是问题 (2)、(3) 的唯一解.

这样就得到了关于约束复 Chebyshev 逼近问题最优解的特性的描述, 可见它的最优误差函数的极值点组也有类似无约束时的交错特征, 以此特征为依据我们提出了以下算法.

3 数值算法

在文献 [7] 中, L. J. Karam 和 M. C. Belian 提出了复 Remez 算法用于求解无约束复 FR 滤波器的 Chebyshev 设计问题 (2), 和实 Remez 算法相似, 此算法也是用 $N+1$ 个离散点上的最佳逼近函数去逼近原问题的解, 本文算法亦是如此. 所以有必要先回顾一下复 Remez 算法:

初始化: 任给 Ω 上的 $N+1$ 个点 $-p \leq \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_N < p$ 计算: 用如下方程组求解 $N+1$ 个点 $\{\omega_k\}_{k=0}^N$ 上 $D(\omega)$ 的加权最佳逼近函数 $H(\omega)$ 及未知量 δ

$$W(\omega_k)[H(\omega_k) - D(\omega_k)] = (-1)^{k+1}\delta \quad k=0, 1, \dots, N$$

更新: 如果有

$$|\delta| = \max_{\omega \in \Omega} |W(\omega)[H(\omega) - D(\omega)]|,$$

根据复交错点组定理可知找到了问题的解, 停止算法. 否则, 更新频率点组 $\{\omega_k\}_{k=0}^N$ 重复上步计算以使 $|\delta|$ 递增, 若不能再增大 $|\delta|$ 则找到了一个次优解, 停止算法.

由定理 1 可以发现, 如果 δ 和点组 $\{\omega_k\}_{k=0}^N$ 满足 (4)、(5), 则根据离散点上的 Chebyshev 逼近定理 [14] 有:

$$\delta = \min_{\omega \in \Omega} \max_{\omega \in \tilde{\Omega}} |W(\omega)[H(\omega) - D(\omega)]|$$

其中的加权函数定义为 (下同):

$$W(\omega, \delta) = \begin{cases} W(\omega), & \omega \in \Omega \\ \delta^{-1} \rho^1(\omega), & \omega \in \tilde{\Omega} \end{cases}$$

所以考虑用满足下面式 (9) 的点组 $\{\omega_k(l)\}_{k=0}^N$ 和序列 $\{\delta(l) > 0\}$ 去逼近 δ , 从而最终得到原问题的解.

$$\delta(l) = \min_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} \max_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} |W(\omega, \delta(l))[H(\omega) - D(\omega)]| \quad (9)$$

此处如果用复 Remez 算法对点组 $\{\omega_k(l)\}_{k=0}^N$ 进行更新, 可以证明存在满足 $\delta(l) < \delta(l+1) < \delta$ 的序列 $\{\delta(l)\}$. 但是, 和复交错点组定理一样, 定理 1 也只是一个充分条件而非充要条件, 所以有可能只得到次优解而非最优解. 对于这种情况可在得到的次优解的基础上应用迭代 Remez 算法继续求解, 其思想为用满足

$$\delta(l+1) = \min_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} \max_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} |W(\omega, \delta(l))[H(\omega) - D(\omega)]|$$

的序列 $\{\delta(l) > 0\}$ 逼近 δ , 这样将保证 $\{\delta(l)\}$ 一定收敛到 δ . 基于以上介绍的设计思想, 我们把本文的算法描述如下:

初始化: 给出 $\delta_0 > 0$ 和 $\Omega \cup \tilde{\Omega}$ 上的 $N+1$ 个点 $-p \leq \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_N < p$ 且满足:

$$\delta_0 \leq \min_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} \max_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} |W(\omega, \delta_0)[H(\omega) - D(\omega)]| \quad (10)$$

计算: 用如下方程组求解满足式 (9) 的 $N+1$ 个点 $\{\omega_k\}_{k=0}^N$ 上 $D(\omega)$ 的加权最佳逼近函数 $H(\omega)$ 及未知量 $\delta(l) > 0$

$$W(\omega_k, |\delta|)[H(\omega_k) - D(\omega_k)] = (-1)^{k+1}\delta \quad k=0, 1, \dots, N \quad (11)$$

其中 $|\delta|$ 就是 $\delta(l)$.

更新: 如果有

$$\delta(l) = \max_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} |W(\omega, \delta(l))[H(\omega) - D(\omega)]|$$

则根据定理 1 可知找到了问题的解, 停止算法. 否则, 用复 Remez 算法点组更新规则更新频率点组 $\{\omega_k\}_{k=0}^N$ 并重复上步计算以使 $\delta(l)$ 递增, 若不能再增大 $\delta(l)$ 则找到了一个次优解, 进入下一步.

完善: 用迭代 Remez 算法继续求解.

算法前三步可称为约束复 Remez 算法, 下面对上述算法做进一步的说明. 初始化中要求式 (10) 成立, 这能保证计算步中满足式 (9) 的 $\delta(l)$ 的存在. 为了做到这一点, 可选择极小的 δ_0 或是任意选取 $\delta_0(l) > 0$ 和 $\{\omega_k(l)\}_{k=0}^N$ 后运用文献 [11] 中的算法迭代, 即用下式更新 $\delta_0(l)$ 及点组 $\{\omega_k(l)\}_{k=0}^N$

$$\delta_0(l+1) = \min_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} \max_{\omega \in \Omega \cup \tilde{\Omega}} |W(\omega, \delta_0(l))[H(\omega) - D(\omega)]|.$$

实际中往往只需几次这样的迭代便可发现满足 (10) 的 δ_0 , 即使找不到这样的 δ_0 , 文献 [11] 中算法也能收敛到约束复 Remez 算法的解, 只是收敛速度稍慢.

对于计算步中离散点上 $D(\omega)$ 的加权最佳逼近函数 $H(\omega)$ 及未知的 $\delta(l)$ 的求解, 即方程组 (11) 的求解, 可先解出 δ 的值. 无论 N 为奇数或偶数 δ 有相同的计算式:

$$\delta = \frac{\sum_{k=0}^N |D(\omega_k)|}{\sum_{k=0}^N (-1)^k |W(\omega_k, |\delta|)|} \quad (12)$$

其中:

$$\lambda_k = \left[\prod_{l=0, l \neq k}^N \sin\left(\frac{\omega_k - \omega_l}{2}\right) \right]^{-1}, k=0, 1, \dots, N$$

解出 δ 之后再确定 N 个频率点 $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{N-1}$ 上 $H(\omega)$ 的值 ξ_k ,

$$\xi_k = D(\omega_k) - (-1)^k \delta / W(\omega_k, |\delta|), k=0, 1, \dots, N-1$$

用拉格朗日插值公式生成函数 $H(\omega)$, 无论 N 是奇数偶数插值公式是相同的:

$$H(\omega) = F(\omega) \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \lambda_k \sin\left(\frac{\omega_k - \omega_N}{2}\right) \sin^{-1}\left(\frac{\omega - \omega_k}{2}\right),$$

其中:

$$F(\omega) = \prod_{k=0}^{N-1} \sin\left(\frac{\omega - \omega_k}{2}\right)$$

现在让我们再来看如何根据式 (12) 求解 δ , 为记号简便令:

$$a = \sum_{k=0}^N \lambda_k D(\omega_k);$$

$$b = \sum_{k \in K} (-1)^k \lambda_k / W(\omega_k), K = \{k | \omega_k \in \Omega\};$$

$$c = \sum_{k \in \bar{K}} (-1)^k \lambda_k \rho(\omega_k), \bar{K} = \{k | \omega_k \in \bar{\Omega}\}.$$

则有:

$$\delta = a(b + c/|\delta|)^{-1}$$

求解可到两个 δ 的值:

$$\delta = a(|a| - c)(|a|b)^{-1} \text{ 或 } \delta = a(|a| + c)(|a|b)^{-1}.$$

再根据算法使 $\delta(l)$ 也即 $|\delta|$ 递增的原则对 δ 的取值进行确定, 当更新频率点组后, 由复 Remez 算法点组更新规则有:

$$|a(b + c/\delta(l-1))^{-1}| > \delta(l-1), \text{ 即 } |a| > |b\delta(l-1) + c|,$$

那么,

$$b > 0, -(|a| + c)b^{-1} < \delta(l-1) < (|a| - c)b^{-1};$$

$$b < 0, (|a| - c)b^{-1} < \delta(l-1) < -(|a| + c)b^{-1};$$

所以, $b > 0$ 当时取 $\delta = a(|a| - c)(|a|b)^{-1}$, 从而 $\delta(l) = (|a| - c)b^{-1} > \delta(l-1)$; $b < 0$ 时取 $\delta = a(|a| + c)(|a|b)^{-1}$, 从而 $\delta(l) = (|a| + c)b^{-1} > \delta(l-1)$. 需要补充的是, 若算法中得到 $b=0$ 则原问题 (2)、(3) 是无解的, 此处不再详细论述. 这样就得到了满足式 (9) 的 $H(\omega)$ 和 $\delta(l)$, 可以进入下一步进行点组更新了, 还要注意在更新点组中所用的加权函数为 $W(\omega, \delta(l))$.

4 系统仿真

作者把上节中的算法做成了 MATLAB 程序, 下面根据设计实例对算法进行分析, 以下数据都是在内存为 256M, CPU 为 2.6G 的计算机上得到的, 所用仿真软件为 MATLAB6.5.

例 1 设计带通复 FIR 滤波器, 通带为 $\Omega_p = [-0.4\pi, 0.4\pi]$, 阻带为 $\Omega_n = [-\pi, -0.5\pi]$ 和 $\Omega_s = [0.5\pi, \pi]$, 通带上的期望频率响应为 $e^{-j\omega}$, 要求阻带上幅值不大于 0.01, 滤波器长为 $N=30$.

表 1 给出了通带期望频率的群延迟 τ 取不同值时本

文算法所用时间、迭代次数及所得最优滤波器的通带最大幅值和相角误差. 由表中算法迭代次数及所用时间可见, 若约束复 Remez 算法找到了最优解, 则算法用时很少; 否则, 进入迭代 Remez 算法后用时较多. 根据相角误差, $\tau=14.5$ 时所设计的滤波器是线性相位滤波器, 其他则是非线性相位滤波器, 与同样长度的线性相位滤波器相比, 显然这些非线性相位滤波器有更小的且几乎为常数的群延迟, 而同阶数的线性相位滤波器不可能达到同样小的群延迟. 表 1 还显示, 当期望群延迟 τ 取某些值时 (如 $\tau=13$) 所得滤波器的通带最大误差有可能比线性相位滤波器 ($\tau=14.5$) 的更小.

表 1 例 1 中群延迟 τ 取不同值时算法所得数据

期望群延迟 τ	约束复 Remez 算法迭代次数	迭代 Remez 算法迭代次数	CPU 时间	通带最大幅值误差	通带最大相角误差
14.5	12	0	0.172s	7.1355×10^{-2}	0
13	9	3	7.219s	5.53216×10^{-2}	5.3806×10^{-2}
10	12	0	0.127s	8.6439×10^{-2}	7.5475×10^{-2}
7.5	12	1	1.781s	1.1127×10^{-1}	1.1111×10^{-1}
6.5	17	0	0.250s	1.2394×10^{-1}	1.2317×10^{-1}

图 1 至 3 给出了期望群延迟 $\tau=10$ 时所得最优滤波器的各种特性. 如图所示, 复 FIR 滤波器的幅值不具有线性相位滤波器的等波纹特性, 但是误差函数仍是等波纹的. 图 2 显示所得最优滤波器的幅值在阻带不大于 -40dB, 故满足约束条件. 图 3 描述了滤波器的通带相角误差, 表明此滤波器虽不是线性相位滤波器, 但它在通带有近似线性的相位特性.

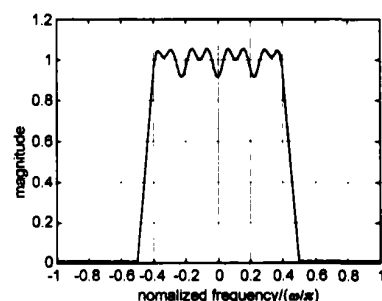


图 1 例 1 设计的滤波器的幅频特性 ($\tau=10$)

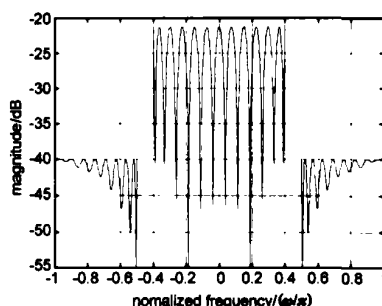


图 2 例 1 设计的滤波器的幅值误差 ($\tau=10$)

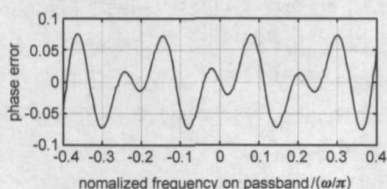


图3 例1设计的滤波器的通带相角误差 ($\tau=10$)

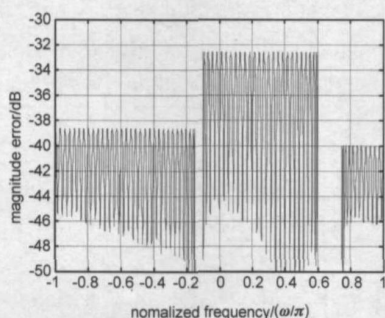


图4 例2设计的滤波器的幅值误差 ($N=70$)

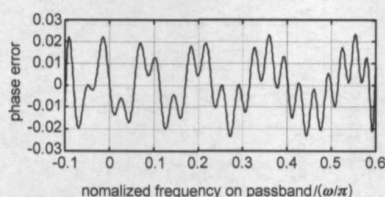


图5 例2设计的滤波器的通带相角误差 ($N=70$)

例2 设计带通复FIR滤波器, 通带为 $\Omega_p = [-0.1\pi, 0.6\pi]$, 阻带为 $\Omega_{s1} = [-\pi, -0.15\pi]$ 和 $\Omega_{s2} = [0.75\pi, \pi]$, 通带上的期望频率响应为 $e^{j(\omega - 20\pi)}$, 要求在 Ω_{s1} 和 Ω_{s2} 上最大幅值误差比为 1:2, Ω_{s2} 上幅值不大于 0.01

与例1不同, 例2中所选取的频带不再对称, 且通带的期望频率也不是线性相位的. 表2给出了滤波器长 N 取不同值时算法所得各种数据. 可以看出随着滤波器长度的增加, 算法所用时间也在增多, 非约束带 (如通带) 的最大幅值误差逐渐变小. 图4、5分别给出了滤波器长 $N=70$ 时算法所得最优滤波器的幅值误差和相角误差曲线.

表2 例2中滤波器长 N 取不同值时算法所得数据

滤波器长 N	约束复 Remez算法 迭代次数	迭代 Remez算法 迭代次数	CPU 时间	通带最大 幅值误差	通带最大 相角误差
55	9	0	0.438 s	4.1416×10^{-2}	4.1280×10^{-2}
70	9	1	2.657 s	2.3526×10^{-2}	2.3467×10^{-2}
85	9	0	0.718 s	1.4509×10^{-2}	1.4408×10^{-2}
93	11	1	8.297 s	1.1533×10^{-2}	1.1434×10^{-2}
110	12	0	2.062 s	7.3370×10^{-3}	7.3366×10^{-3}

5 结束语

本文首先证明了约束复 Chebyshev逼近定理, 并发现了最优误差函数极值点组的交错特征. 然后根据此交错特征, 借鉴复 Remez算法的设计思想, 作者首先提出了一种约束复 Remez算法. 把此算法与复 Remez算法及迭代 Remez算法结合就能够有效的解决复 FIR数字滤波器的幅值不等式约束 Chebyshev设计问题. 算法的设计思想和大量的仿真实验分别从理论和实践上说明了本算法的可靠性和有效性.

附录 1

Haar条件: 设 B 是实数轴上的一个紧集, $C(B)$ 表示定义在 B 上的所有连续函数组成的空间, 如果 $C(B)$ 的 (有限的) n 维线性子空间 V_n 的每一个不恒等于零的函数至多在 B 的 $n-1$ 个点上等于零, 就说 V_n 在 B 上满足 Haar条件. 与此等价的说法为: 对于 B 的每个由 n 个不同点 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 所组成的集与每个预先给定的向量 (y_1, y_2, \dots, y_n) 恰好存在唯一的 $v(x) \in V_n$, 使得:

$$v(x_i) = y_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

附录 2

复交错点组定理 设 V_n 是以连续实函数为基的 n 维线性复值函数空间, 且在实数轴一紧集 B 上满足 Haar条件, $h(x) \in V_n$, 如果至少存在 $n+1$ 个按升序排列的点 $\{x_k\}_{k=0}^n \in B$ 使误差函数 $\varepsilon(x) = f(x) - h(x)$ 满足:

$$\begin{cases} |\varepsilon(x_k)| = \max_{x \in B} |\varepsilon(x)|, & k=0, 1, \dots, n \\ \varepsilon(x_l) + \varepsilon(x_{l+1}) = 0 & l=0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

则 $h(x)$ 为 $f(x)$ 关于 V_n 的 B 上的最佳逼近.

参考文献:

- [1] X P Zhang, M D Desai, Y N Peng. Orthogonal complex filter banks and wavelets: Some properties and design[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1999, 47(4): 1039-1048.
- [2] A G Jaffer, W E Jones. Constrained least-squares design and characterization of affine phase complex FIR filters[J]. Signals Systems and Computers: Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on, 1993, 1: 685-691.
- [3] K Pnuss. On the design of FIR filters by complex Chebyshev approximation[J]. IEEE Trans Acoustics Speech and Signal Processing, 1989, 37(5): 702-712.
- [4] J A Barreto, C S Burrus. L_p -complex approximation using iterative reweighted least squares for FIR digital filters[A]. IEEE Int Conf Acoustics Speech and Signal Processing, 1994, 3: 545-548.
- [5] A S Akhauri, K G Christian, J S Lim. Design and characterization of optimal FIR filters with arbitrary phase[J]. IEEE

- Trans Signal Processing 1993, 41(2): 559–572
- [6] P P Tang A fast algorithm for linear complex Chebyshev approximations[J]. Math Comput 1988, 52(10): 721–739.
- [7] L J Karam, J H McClellan Complex Chebyshev approximation for FIR filter design[J]. IEEE Trans Circuits and Systems-II, 1995, 42(3): 207–216
- [8] L J Karam, J H McClellan Chebyshev digital FIR filter design[J]. Signal Processing 1999, 76(1): 17–36
- [9] M Lang Algorithms for the constrained design of digital filters with arbitrary magnitude and phase responses[D]. Austria Technische Universität Wien 1999
- [10] R Vuerinckx. Design of high-order Chebyshev FIR filters in the complex domain under magnitude constraints[J]. IEEE Trans Signal Processing 1998, 46(6): 1676–1681.
- [11] 赵瑞杰, 赖晓平. 带不等式约束的线性相位 FIR 数字滤波器的 Chebyshev 设计[J]. 信号处理, 2003, 19(增刊): 21–24
- R J Zhao X P Lai Chebyshev design of FIR filters with frequency inequality constraints[J]. Chinese Journal of Signal Processing 2003, 19(Supplement): 21–24 (in Chinese)
- [12] X P Lai Chebyshev design of FIR filters with frequency inequality constraints[J]. Circuits Systems and Signal Processing 2003, 22(3): 325–334
- [13] X P Lai Constrained Chebyshev design of FIR filters[J]. IEEE Trans Circuits and Systems-II, 2004, 51(3): 143–146
- [14] G Meinardus Approximation of function theory and numerical methods[M]. New York Springer-Verlag 1967.

作者简介:

赵瑞杰 男, 1978年生, 河北唐山人, 2004年毕业于山东大学数学与系统科学院运筹学与控制论专业, 理学硕士, 现为山东大学威海分校信息工程学院自动化系教师. 主要研究兴趣为 FIR 数字滤波器设计, 线性系统理论. E-mail zhao_rj@163.com

赖晓平 男, 1965年生, 江西省安远县人, 教授, 1988年于山东大学物理系取得硕士学位, 2000年于山东大学数学与系统科学学院取得博士学位, 主要研究方向有数字信号处理、优化方法、神经网络等. E-mail lixp@sdu.edu.cn