

# 基于神经网络的任意幅频响应二维 FIR 线性相位 数字滤波器的优化设计

王小华<sup>1,2</sup>, 何怡刚<sup>2</sup>

(1. 长沙理工大学电气与信息工程学院, 湖南长沙 410077; 2. 湖南大学电气与信息工程学院, 湖南长沙 410082)

**摘 要:** 本文提出了一种用神经网络算法来设计任意幅频响应二维 FIR 线性相位数字滤波器的新方法, 其主要思想是使频率响应平方误差函数最小化. 根据给定的任意幅频响应指标, 按该算法可直接获得滤波器系数. 为保证该算法的稳定性, 提出并证明了该算法的收敛定理. 文中给出了滤波器优化设计实例, 计算机仿真结果表明由该方法设计的任意幅频响应二维数字滤波器波动小, 算法收敛速度快, 稳定性强.

**关键词:** 二维数字滤波器; 线性相位; 神经网络; 收敛定理; 优化设计

**中图分类号:** TP183 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2005) 05-0950-04

## Optimal Design of 2-D FIR Linear-Phase Digital Filters with Arbitrary Amplitude-Frequency Responses Using Neural-Networks

WANG Xiao-hua<sup>1,2</sup>, HE Yi-gang<sup>2</sup>

(1. Electrical And Information Engineering College, Changsha University of science & technology, Changsha, Hunan 410077, China;

2. Electrical And Information Engineering College, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

**Abstract:** This paper provides a novel neural networks algorithm (NNA) for the design of 2-D FIR linear-phase digital filters with arbitrarily shaped amplitude-frequency responses, the main idea is to minimize the squared-error function in the frequency-domain. By using the NNA, the coefficients of the designed filter can be obtained directly from the specified amplitude-frequency response. The convergence theorem is presented and proved to illustrate the stability of the NNA. The result of the optimal design example show that the ripple of the filter is tiny, and the proposed approach is of fast convergence and powerful stability.

**Key words:** 2-D digital filters; linear-phase; neural network; convergence theorem; optimal design

## 1 引言

在过去的三十年里, 二维数字滤波器的设计受到了研究人员的广泛重视, 并被应用于图象处理、生物医学图象处理、地震数据处理、卫星图象处理及天文学等领域. 与一维数字滤波器比较, 由于人类的视觉相对于人类的听觉对二维数字滤波器的相位响应引起的波形失真更为敏感, 二维数字滤波器通常要求满足期望的幅度和相位响应特性. 因此, 保证二维数字滤波器的线性相位显得非常重要. 二维 FIR 数字滤波器主要采用窗函数法、McClellan 变换法及最优化方法实现. 虽然窗函数法<sup>[1]</sup>具有设计简单、方便等特点, 但设计精度不高, 且难以确定最优的窗函数. McClellan 变换法<sup>[2]</sup>对某些频率响应的滤波器具有很好的逼近效果, 但对任意幅度响应的滤波器设计, 变换法难以奏效, 特别在应用高阶变换时存在的系数标称化问题使得变换法的应用受到限制. 最优化方法能得到在  $l_p$  范数意义上最优的滤波器系数, 基于  $l_2$  范数逼近的加权最小

二乘法<sup>[3~5]</sup>被认为是一种行之有效的优化设计方法, 然而在加权最小二乘法中不可避免要进行高阶矩阵的求逆运算, 而且矩阵的阶数与滤波器的阶数的平方成正比. 解析最小二乘法<sup>[6]</sup>虽然不要进行高阶矩阵的求逆运算, 但可能导致设计的滤波器不稳定. 而文献[7]采用半定规划 (semidefinite programming) 设计算法仅仅设计了第一象限对称二维滤波器, 且计算量较大; 文献[8]采用奇异值分解算法也仅解决了中心对称二维滤波器的设计.

本文提出一种新的基于神经网络的任意幅频响应二维 FIR 线性相位数字滤波器优化设计方法. 其基本思想是使神经网络的输出与期望二维滤波器的幅频响应之间的全局误差平方和最小化. 文中分析了任意幅频响应二维 FIR 线性相位数字滤波器的频率响应特性, 提出并证明了该神经网络算法的收敛定理, 给出了由该方法设计的任意幅频响应二维 FIR 线性相位数字滤波器优化设计实例.

收稿日期: 2004-05-08; 修回日期: 2005-01-14

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 50277010); 高校博士点基金 (No. 20020532016); 湖南省教育厅科研项目 (No. 04C073); 湖南省科技计划项目 (No. 03GKY3115, No. 04H2003); 湖南省杰出青年基金 (No. 03JJ Y1010); 教育部新世纪优秀人才支持计划和湖南大学精英计划

## 2 任意幅频响应 FIR 线性相位滤波器幅频特性

设一个二维 FIR 滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{L-1} h(m, n) e^{-j(\omega_1 m + \omega_2 n)}$$

其中  $(L, L)$  为二维滤波器的阶数,  $h(m, n)$  为二维滤波器的单位脉冲响应. 对于任意形状幅频响应的滤波器,  $h(m, n)$  必定为复序列, 即  $h(m, n) = h_r(m, n) + j h_i(m, n)$ . 不难验证, 若  $h(m, n)$  满足  $h(m, n) = h^*(L-1-m, L-1-n)$ , 则该滤波器为二维 FIR 线性相位滤波器, 其频率响应可表示为

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = e^{-j\frac{L-1}{2}(\omega_1 + \omega_2)} H_1(\omega_1, \omega_2)$$

当  $L$  为奇数时, 令  $N = (L-1)/2$ , 则有二维 FIR 线性相位滤波器的幅频响应

$$\begin{aligned} H_1(\omega_1, \omega_2) = & \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a(m, n) \cos(m\omega_1) \cos(n\omega_2) \\ & + \sum_{m=0}^N \sum_{n=1}^N b(m, n) \cos(m\omega_1) \sin(n\omega_2) \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{n=0}^N c(m, n) \sin(m\omega_1) \cos(n\omega_2) \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N d(m, n) \sin(m\omega_1) \sin(n\omega_2) \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} a(0, 0) = h_r(N, N) \\ a(m, n) = 2h_r(N-m, N-n), (m=0 \text{ 或 } n=0) \\ a(m, n) = 2h_r(N-m, N-n), (m=0, n=0) \\ \quad + 2h_r(N-m, N+n) \\ b(0, n) = -2h_i(N, N-n) \\ b(m, n) = -2h_i(N-m, N-n), (m=0) \\ \quad + 2h_i(N-m, N+n) \\ c(m, 0) = -2h_i(N-m, N) \\ c(m, n) = -2h_i(N-m, N-n), (n=0) \\ \quad - 2h_i(N-m, N+n) \\ d(m, n) = -2h_r(N-m, N-n) \\ \quad + 2h_r(N-m, N+n) \end{cases} \quad (2)$$

令

$$\begin{aligned} A &= [a(0, 0), \dots, a(0, N); \dots; a(N, 0), \dots, a(N, N)] \\ B &= [b(0, 1), \dots, b(0, N); \dots; b(N, 1), \dots, b(N, N)] \\ C &= [c(1, 0), \dots, c(1, N); \dots; c(N, 0), \dots, c(N, N)] \\ D &= [d(1, 1), \dots, d(1, N); \dots; d(N, 1), \dots, d(N, N)] \\ c_i(\omega_i) &= [1, \cos \omega_i, \dots, \cos N\omega_i]^T \\ s_i(\omega_i) &= [\sin \omega_i, \sin 2\omega_i, \dots, \sin N\omega_i]^T, i=1, 2 \end{aligned} \quad (3)$$

则二维线性相位 FIR 数字滤波器的幅频响应可表示为

$$H_d(\omega_1, \omega_2) = c_1^T(\omega_1) A c_2(\omega_2) + c_1^T(\omega_1) B s_2(\omega_2) + s_1^T(\omega_1) C c_2(\omega_2) + s_1^T(\omega_1) D s_2(\omega_2) \quad (4)$$

因此, 二维 FIR 线性相位数字滤波器的设计问题可转化为使全局误差平方和最小化的优化问题.

## 3 神经网络模型

由式(4)可建立如图 1 所示神经网络模型, 其中输入层至

隐层各神经元的权值恒为 1, 隐层各神经元的激活函数分别为

$$\begin{aligned} Af_{ij} &= \cos(\omega_1) \cos(\omega_2), 0 \leq i \leq N, j \leq N \\ Bf_{ij} &= \cos(\omega_1) \sin(\omega_2), 0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N \\ Cf_{ij} &= \sin(\omega_1) \cos(\omega_2), 1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N \\ Df_{ij} &= \sin(\omega_1) \sin(\omega_2), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (5)$$

输出层的权值分别为  $A_{ij}$ 、

$B_{ij}$ 、 $C_{ij}$ 、 $D_{ij}$ . 如果获得矩阵

$A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ , 由式(2)、(3)

即可获得二维 FIR 线性相

位数字滤波器的系数.

图 1 神经网络模型

### 3.1 神经网络算法

神经网络输出如式(4), 误差函数:

$$e[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)] = M_d[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)] - H_d[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)] \quad (6)$$

其中  $t_1 = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$ ,  $t_2 = 0, 1, 2, \dots, m_2 - 1$ ,  $m_1, m_2$  分别为  $\omega_1, \omega_2$  的训练样本数,  $M_d[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)]$  为期望输出,  $H_d[\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)]$  为神经网络输出.

性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t_1=0}^{m_1-1} \sum_{t_2=0}^{m_2-1} e^2(\omega_1(t_1), \omega_2(t_2)) \quad (7)$$

权值调整: 设  $t$  对应训练样本  $t_1, t_2$ ,  $t+1$  对应下一个训练样本, 由式(4)、(6)、(7)有

$$\begin{aligned} A(t+1) &= A(t) + e(t) c_1(t_1) c_2^T(t_2) \\ B(t+1) &= B(t) + e(t) c_1(t_1) s_2^T(t_2) \\ C(t+1) &= C(t) + e(t) s_1(t_1) c_2^T(t_2) \\ D(t+1) &= D(t) + e(t) s_1(t_1) s_2^T(t_2) \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\eta$  为学习率, 且  $0 < \eta < 1$ .

### 3.2 神经网络收敛性定理

定理 1 当学习率取为  $0 < \eta < 2/(N^2 + 2N + 2)$  时, 该神经网络算法是收敛的.

证明 设  $t$  对应训练样本  $t_1, t_2$ ,  $t+1$  对应下一个训练样本, 并设

$$\begin{aligned} AF(t) &= [Af_{00}, \dots, Af_{0N}, \dots, Af_{N0}, \dots, Af_{NN}]^T \\ BF(t) &= [Bf_{01}, \dots, Bf_{0N}, \dots, Bf_{N1}, \dots, Bf_{NN}]^T \\ CF(t) &= [Cf_{10}, \dots, Cf_{1N}, \dots, Cf_{N0}, \dots, Cf_{NN}]^T \\ DF(t) &= [Df_{11}, \dots, Df_{1N}, \dots, Df_{N1}, \dots, Df_{NN}]^T \\ A1 &= [A_{00}, \dots, A_{0N}, \dots, A_{N0}, \dots, A_{NN}]^T \\ B1 &= [B_{01}, \dots, B_{0N}, \dots, B_{N1}, \dots, B_{NN}]^T \\ C1 &= [C_{10}, \dots, C_{1N}, \dots, C_{N0}, \dots, C_{NN}]^T \\ D1 &= [D_{11}, \dots, D_{1N}, \dots, D_{N1}, \dots, D_{NN}]^T \end{aligned} \quad (9)$$

则式(4)、(6)、(7)、(8)可改写为

$$H_d(t) = A1^T AF(t) + B1^T BF(t) + C1^T CF(t) + D1^T DF(t) \quad (10)$$

$$e(t) = M_d(t) - H_d(t) \quad (11)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{m_1 m_2 - 1} e^2(t) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A1}(t+1) &= \mathbf{A1}(t) + e(t) \mathbf{AF}(t) \\ \mathbf{B1}(t+1) &= \mathbf{B1}(t) + e(t) \mathbf{BF}(t) \\ \mathbf{C1}(t+1) &= \mathbf{C1}(t) + e(t) \mathbf{CF}(t) \\ \mathbf{D1}(t+1) &= \mathbf{D1}(t) + e(t) \mathbf{DF}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

取 Lyapunov 函数为  $V(e) = (1/2) e^2(t)$ , 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{A1} &= -e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{A1}}, \quad \mathbf{B1} = -e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{B1}}, \\ \mathbf{C1} &= -e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{C1}}, \quad \mathbf{D1} = -e(t) \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{D1}}, \end{aligned}$$

于是有  $e(t) = -e(t)$

$$\left\{ \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{A1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{B1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{C1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{D1}} \right\|^2 \right\}$$

其中  $\|\cdot\|^2 = |\cdot|^2$ , 称为 Euclid 范数的平方. 因此

$$\begin{aligned} V(e) &= \frac{1}{2} e^2(t+1) - \frac{1}{2} e^2(t) = \frac{1}{2} [e(t) + e(t)]^2 - \frac{1}{2} e^2(t) \\ &= \left( \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{A1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{B1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{C1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{D1}} \right\|^2 \right) \\ &\quad \cdot e^2(t) \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{A1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{B1}} \right\|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{C1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{D1}} \right\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

因  $e(t) > 0$ , 由式(14)可知, 要使神经网络收敛, 必须有

$$0 < -2 / \left( \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{A1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{B1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{C1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{D1}} \right\|^2 \right) \quad (15)$$

由式(5)、(9)、(10)、(11)有

$$\begin{aligned} &\left( \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{A1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{B1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{C1}} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial e(t)}{\partial \mathbf{D1}} \right\|^2 \right) \\ &= \mathbf{AF}(t)^2 + \mathbf{BF}(t)^2 + \mathbf{CF}(t)^2 + \mathbf{DF}(t)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{(N+1)(N+1)-1} |A F_n(t)|^2 + \sum_{n=0}^{(N+1)N-1} |B F_n(t)|^2 \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N(N+1)-1} |C F_n(t)|^2 + \sum_{n=0}^{NN-1} |D F_n(t)|^2 \\ &= N^2 + 2N + 2 \end{aligned}$$

因此, 由式(15)有: 当学习率  $\eta$  满足  $0 < \eta < 2 / (N^2 + 2N + 2)$  时, 有  $V(e) < 0$ , 因此该神经网络算法是收敛的.

因为 Lyapunov 函数  $V(e) = 0 (e = 0)$ , 且  $V(e) > 0 (e \neq 0)$ , 因此  $V(e)$  是正定的; 且

$$\frac{V(e)}{t} = \frac{V(e)}{t+1-t} = V(e)$$

前已证明当  $0 < \eta < 2 / (N^2 + 2N + 2)$  时,  $V(e) < 0$ , 故  $V(e)/t$  是负定的, 因此由 Lyapunov 稳定性定理知该神经网络渐近稳定于  $e = 0$ . 证毕.

#### 4 应用实例

为验证本文设计方法的有效性, 我们对大量滤波器进行了设计. 在此, 设要设计的滤波器的幅频响应如图 2 所示, 图中用 PB、SB 和 TB 分别表示滤波器的通带、阻带和过渡带. 滤波器的通带由  $\omega_1 = 0.55$ 、 $\omega_2 = -0.55$  和  $\omega_1 - \omega_2 = 0.1$  三

条直线围成的三角形区域, 过渡带带宽为 0.15, 通带的幅值为 1, 阻带的幅值为 0, 过渡带的幅值由 1 线性变化到 0.

用本文所介绍的方法设计阶数为  $(L, L) = (23, 23)$  的 FIR 线性相位滤波器, 取学习率  $\eta = 1 / (N^2 + 2N + 2)$ , 对  $\omega_1, \omega_2$  期望滤波器的幅频特性均匀取样  $26 \times 26$  个点, 并送神经网络训练, 经 4 次训练后神经网络收敛, 并获得神经网络权值 A、B、C 和 D, 从而获得滤波器系数. 该算法的 MATLAB 实现 (CPU 为 Pentium4) 所需时间为 0.420 秒, 所设计滤波器的通带与阻带最大波动分别为 0.0455、0.0426. 图 3 为设计滤波器的幅频响应.

设计结果表明, 用本文的神经网络算法设计任意幅频响应的二维 FIR 线性相位滤波器, 得到的滤波器系数明显优于窗函数法和变换设计法, 且当学习率取为  $\eta = 1 / (N^2 + 2N + 2)$  时, 该神经网络算法收敛速度极快, 计算量极小, 与基于加权的最小二乘设计法<sup>[3~5]</sup>及半定规划设计法<sup>[7]</sup>相比, 所用计算量少一个数量级以上, 尤其在设计高阶滤波器时, 这种优越性更加明显.

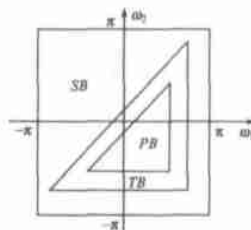


图 2 滤波器的幅频响应指标

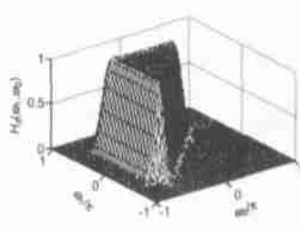


图 3 设计滤波器的幅频响应

#### 5 结论

本文提出一种有效的基于神经网络的任意幅频响应二维 FIR 线性相位数字滤波器优化设计方法. 用该方法可以设计出任意幅频响应特性的二维 FIR 线性相位数字滤波器, 且设计的滤波器通带和阻带波动小; 如果学习率满足本文提出的收敛定理, 则可以保证该神经网络算法稳定, 如学习率的值选择适当 (如选择  $\eta = 1 / (N^2 + 2N + 2)$ ), 该神经网络算法收敛速度极快 (一般只需训练几次到十几次即收敛), 故算法所需计算量非常小.

#### 参考文献:

- [1] Speake T C, et al. A note on the use of windows for 2-D filter design [J]. IEEE Trans, 1981, ASSP-29(2): 125 - 127.
- [2] Merserau R M, et al. McClellan transformations for 2-D digital filtering [J]. IEEE Trans, 1976, CAS-3(7): 405 - 413.
- [3] Algazi V R, et al. Design of almost minimax FIR filters in one and two dimensions by WLS techniques [J]. IEEE Trans, 1986, CAS-33(6): 590 - 596.
- [4] Hsieh C H, et al. Design of two-dimensional FIR digital filters by a two-dimensional WLS technique [J]. IEEE Trans, 1997, CAS-44(5): 348 - 412.
- [5] Charalambous C. The performance of an algorithm on minimax design of two-dimensional linear phase FIR filters [J]. IEEE Trans, 1985, CAS-

- 32(10):1016 - 1028.
- [ 6 ] Zhu W P, et al. A closed form solution to the least square design problem of 2-D linear phase FIR filters[J]. IEEE Trans, 1997, CAS IF-12 (44):1032 - 1039.
- [ 7 ] Lu W S. A unified approach for the design of 2-D digital filters via semidefinite programming[J]. IEEE Trans, 2002, CAS F-49 (6):814 - 825.
- [ 8 ] Deng T B. Efficient design of SVD-based 2-D digital filters using specification symmetry and order-selecting criterion[J]. IEEE Trans, 2003, CAS F-50(2):217 - 225.

#### 作者简介:



王小华 男,1968 年生于湖南常德,长沙理工大学电气与信息工程学院副教授,硕士,湖南大学在读博士生,主要研究方向为数字滤波器设计,信号检测与信号处理、神经网络理论与应用等. E-mail: cslgwsh@163.com.



何怡刚 男,1966 年生于湖南邵阳,湖南大学电气与信息工程学院教授,博士,博士生导师,主要研究方向为模数集成电路设计、模数电路故障诊断、信号处理、神经网络理论与应用等.