

基于 Curvelet 域的图像复原和分解模型

江玲玲^{1,2}, 冯象初¹, 殷海青¹

(1. 西安电子科技大学理学院, 陕西西安 710071; 2. 中国石油大学数学与计算科学学院, 山东东营 257061)

摘 要: 第二代 Curvelet 变换是继小波变换之后, 能更适合图像处理特点的一种多尺度变换, 它能同时获得对图像平滑区域和边缘部分的稀疏表示, 且具有很强的方向性. 针对它的优点, 提出了一种基于第二代 Curvelet 阈值的图像复原和分解的新模型. 本文首先在负指数 Hilbert-Sobolev 空间推广了 Daubechies-Teschke 模型, 接着对推广的模型在 Curvelet 域上进行处理. 实验结果表明该模型不仅可以很好地分解图像、去除噪声, 而且可以去模糊, 使图像有较好的视觉效果.

关键词: 第二代 Curvelet; 负指数 Hilbert-Sobolev 空间; 图像分解; 图像复原; 图像去模糊

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 09-1790-05

Image Restoration and Decomposition Based on Curvelet Domain

JIANG Ling-ling^{1,2}, FENG Xiang-chu¹, YIN Hai-qing¹

(1. School of Science, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;

2. College of Mathematics and Computational Science, China University of Petroleum, Dongying, Shandong 257061, China)

Abstract: The Curvelet is more suitable for image processing than the wavelet and able to represent smooth and edge parts of image with sparsity. Based on the advantages of curvelet, we present a novel method for image restoration and decomposition via curvelet shrinkage. The new model can be seen as generalizations of Daubechies-Teschke's model. By writing the problem in a curvelet framework, we obtain elegant curvelet shrinkage schemes. Various numerical results on denoising, deblurring and decomposition of images are presented and they show that the model is valid.

Key words: the second generation of curvelet; negative Hilbert-Sobolev space; image decomposition; image restoration; image deblurring

1 引言

图像分解是数学方法处理图像中新近涌出的一项重要、具有挑战性的任务, 可以把它归结为数学上的反问题范畴. 通常认为把一幅已知的图像 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 可以分解为两个组成部分 u 和 v (即 $f = u + v$), 其中, u 是 f 的图像结构表示, 包含了图像主要的几何特征信息; v 是纹理信息或噪声.

这项任务首次被 Meyer 从理论的角度进行阐明, 建立了基于 $\text{ROF}^{[1]}$ 全变差极小化框架下的振荡函数建模理论^[2]. 该理论认为有界变差函数空间 (简称 BV 空间) 对纹理图像不是理想的函数空间, 必须通过与 BV 空间在一定意义上的对偶空间来对纹理进行建模. 然而, 由于 Meyer 的这种理论模型没有标准的 Euler-Lagrange 方程, 因此在实际应用中很难直接求解. 2002 年, Vese-Osher 在文章^[3]中第一次提出了逼近 Meyer 理论模型的方法 (简称 VO 模型):

$$\inf_{u, g_1, g_2} \{ G(u, g_1, g_2) = \int |\nabla u|^2 + \int |f - (u + \text{div } g)|^2 + \mu \int |g|^p \} \quad (1)$$

式中, $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla \cdot g \in L_2(\mathbb{R}^2)$, $g = (g_1, g_2)$, $g_1, g_2 \in L_p(\mathbb{R}^2)$. 同时, Osher 等人继续拓展 VO 模型, 建议用 H^{-1} 范数来刻画 v (简称 OSV 模型)^[4], 假设 $p=2$, 则 v 可用下式表达:

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = (\int |\nabla(\cdot)^{-1} v|^2)^{1/2} = \|v\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} \quad (2)$$

接着, Lieur-Vese^[5]提出用更一般的 H^{-s} 范数刻画 v :

$$(\int (1 + |\cdot|^2)^{-s} |v|^2)^{1/2} = \|v\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^2)}, s > 0 \quad (3)$$

由式(2)的假设, 式(1)可简化为:

$$\inf_{u, v} G_p(u, v) = \int |\nabla u|^2 + \int |f - (u + v)|^2 + \mu \int \|v\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)}^p \quad (4)$$

但是,遗憾的是这些模型的极小化通常要求解复杂的非线性偏微分方程(PDE).因此,为了降低数值复杂度,Daubechies-Teschke 建议在小波域中求解问题(4)^[6](简称 DT 模型):即用 Besov 半范数 $\| \cdot \|_{B_{1,1}^1(\cdot)}$ 来取代全变差范数 $\| \nabla u \|$,有

$$\inf_{u,v} F_f(u,v) = \| f - K(u+v) \|_{L_2(\cdot)}^2 + \| v \|_{H^{-1}(\cdot)}^2 + 2 \| u \|_{B_{1,1}^1(\cdot)} \quad (5)$$

扩展式(5)的应用范围:用式(3)的 H^{-s} 范数代替 H^{-1} 范数,有:

$$\inf_{u,v} F_f(u,v) = \| f - K(u+v) \|_{L_2(\cdot)}^2 + \| v \|_{H^{-s}(\cdot)}^2 + 2 \| u \|_{B_{1,1}^1(\cdot)} \quad (6)$$

其中, s 和 λ 是调整参数, $s > 0$.

式(6)是在小波域中求解变分问题.但是,利用小波对图像进行多分辨率分解时,存在着两个主要问题:(1)二维小波基具有正方形的支撑区间,用小波逼近奇异曲线最终表现为用“点”来逼近“线”的过程,为满足一定的精度,必须采用更多的小波系数来表示奇异曲线,而采用 Curvelet 来逼近奇异曲线时,只需要少数几个系数就可以达到所需要的精度.(2)对于二维图像,常用的二维小波是一维小波的张量积,而二维小波基是“各向同性”的,因此无法精确地表达边缘的方向.解决这个问题途径之一是寻找更适合图像分析的多分辨率分解与重构方法,其中之一是 Curvelet 框架. Curvelet 变换^[7](第一代 Curvelet 变换)是由 Candès 等人提出的,其变换的核心是 Curvelet 基支撑区间满足 $\text{width} \sim \text{length}^2$,也就是说 Curvelet 基支撑区间表现为“长条形”,其实际是“方向性”的一种体现,从而使得用更少的 Curvelet 变换系数来逼近奇异曲线.本文研究的是二代 Curvelet 变换^[8],它比一代 Curvelet 形式上更简单,更容易实现.众所周知,小波扩展的稀疏性可以用 Besov 空间的光滑模来度量,但是, Curvelet 的频域分解不同于小波的二进分解,因此 Curvelet 扩展的稀疏性不能在经典的光滑空间(Besov)里描述.本文根据文献[9]中定义的分解空间 $G_{p,q}$ 和 Besov 空间之间的嵌入关系,以及 Curvelet 系数的稀疏性可以在空间 $G_{p,q}$ 上刻画这个性质,将变分问题(6)在 Curvelet 域下研究,提出了一种新模型,克服了 DT 模型出现的图像边缘模糊的不足.

整篇文章是按照下面的结构组织的.在第二节中,给出了二代 Curvelet 的构造以及它所对应的稀疏空间.第三节主要是提出了一种基于 Curvelet 阈值的变分图像复原和分解方法.在第四节中,用新模型给出了图像分解、去噪和去模糊的实验结果,并且将新方法与传统分解方法作了比较.最后,在第五节中给出了结论.

2 二代 Curvelet 和光滑空间

假设 v 是一个偶的、光滑的窗函数,它的支撑区间

在 $[-1, 1]$. 当 $l \in [0, 2^{-j}]$, 它满足:

$$|v(\cdot)|^2 + |v(\cdot - l)|^2 = 1$$

当 $j \geq 0, l = 0, 1, \dots, 2^{j/2} - 1$ 时,定义 $v_{j,l}(\cdot) = v(2^{j/2}(\cdot - l))$. 假设 w 是一个光滑的紧支撑函数,满足

$$|w_0(t)|^2 + \sum_{j \geq 0} |w(2^{-j}t)|^2 = 1, t \in \mathbb{R}$$

其中 w_0 是一个支撑在原点邻域的光滑函数. 当 $j \geq 2, l = 0, 1, \dots, 2^{j/2} - 1$, 令

$$k_{j,l}(\cdot) = w(2^{-j}|\cdot|)(v_{j,l}(\cdot) + v_{j,l}(\cdot + l)) = |\cdot| e^i$$

定义 $\mu = (j, l, k) : j \geq 0$ 为尺度参数; $l = 0, 1, \dots, 2^{j/2} - 1$ 为方向参数; $k = (k_1, k_2), k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 为平移参数. 令指标集 $J = (j, l)$, 旋转角 $\theta_j = \pi/2^{j/2}$. 当 $j \geq 2$ 时, $w(2^{-j}|\cdot|)(v_{j,l}(2^{j/2}(\cdot - l)))$ 的支撑区间包含在一个矩形 $R_j = I_{1j} \times I_{2j}$ 里,

$$I_{1j} = [t_j - 1, t_j + 1], I_{2j} = [2^{-j/2} - 2^{-j/2}, 2^{-j/2} + 2^{-j/2}]$$

其中: $t_j = 2^{-j}$, $l_j = 2^{-j/2}$. 设 $\tilde{I}_{1j} = \pm I_{1j}$, 定义 $\tilde{R}_j = \tilde{I}_{1j} \times I_{2j}$, 则 $L_2(\tilde{R}_j)$ 的正交基为:

$$u_{j,k}(\cdot) = \frac{2^{-3j/4}}{2 \sqrt{1/2}} \cdot e^{i(k_1 + 1/2)2^{-j} \cdot} \cdot e^{ik_2 2^{-j/2} \cdot}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

最后,定义:

$$\hat{\phi}_\mu(\cdot) = k_j(\cdot) u_{j,k}(R_j^T \cdot), \mu = (j, l, k)$$

其中: $\mu := (j, l, k) : j \geq 2, l = -2^{j/2}, \dots, 2^{j/2} - 1, k \in \mathbb{Z}$, R_j 为角度 θ_j 的旋转矩阵. 令 $\hat{\phi}_\mu(\cdot) = 2^{-k_1}(\cdot) u_k(\cdot)$, 其中: $\mu_1 := (1, 0, k) : k \in \mathbb{Z}$, $k_1^2(\cdot) = w_0^2(|\cdot|) + w^2(|\cdot|) + w^2(|\cdot|/2)$, $u_k(\cdot) = (2^{-k_0})^{-1} \cdot e^{i(k_1 \cdot / 2 + k_2 \cdot / 2)}$, $k_0 > 0$ 为常数.

对任意函数 $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, 有下面的等式成立:

$$\|f, \hat{\phi}_\mu\|_{\mu}^2 = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (7)$$

因此 Curvelet 系统 $\{\hat{\phi}_\mu\}_\mu$ 是 $L_2(\mathbb{R}^2)$ 上的一个紧框架, 并且有重构公式 $f = \sum_\mu \langle f, \hat{\phi}_\mu \rangle \hat{\phi}_\mu$.

在文[9]中, Borup-Nielsen 重构了一类 Curvelet 类型的紧框架, 这类紧框架形成了 Curvelet 类型的分解空间 $G_{p,q}$ 的原子分解. 值得注意的一点是这类紧框架与二代 Curvelet 非常相似, 它们相对应的稀疏空间是相同的, 因此 Curvelet 系数的稀疏性可以在分解空间 $G_{p,q}$ 上刻画:

$$f \in G_{p,q} \iff \left(\sum_{(j,l)} 2^{jq(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \left(\sum_k |f, \hat{\phi}_{j,l,k}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} < \infty \quad (8)$$

其中: $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty, R = \mathbb{R}^2$.

众所周知, Besov 空间是用一个适应二进频率带 $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2^j \leq |x| < 2^{j+1}\}$ 的单位分割定义的, 而 Curvelet 频率空间的分割可看作是 Besov 空间的一个改进, 下面给

出这两个空间之间的嵌入关系:

引理 1^[9] 对于 $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ 和 $R > 0$, 有下面的嵌入关系式成立

$$B_{p,q}^{+,s}(R^2) \subset G_{p,q}(R^2)$$

其中 $s = 1/(2q)$. 同样地,

$$G_{p,q}(R^2) \subset B_{p,q}^{-,s}(R^2)$$

其中 $s = (\max(1, 1/p) - \min(1, 1/q))/2$.

由泛函空间的知识知: 当 $p = q = 2$ 时, Besov 空间 $B_{2,2}(\cdot)$ 就是 Bessel 势位空间 $H(\cdot)$. 类似于 Bessel 势位空间 $H(\cdot)$ 的特殊情况, Besov 空间 $B_{p,p}(\cdot)$ 在 $p < 0$ 时可以看作是 $B_{p,p}(\cdot)$ 的对偶空间, 其中, $p = -1/(p+1/p) = 1$. 本文我们所感兴趣的空間是 $B_{1,1}^1(\cdot)$ 和 $H^{-s}(\cdot) = B_{2,2}^{-,s}(\cdot)$. 由引理 1 可得出这两个空间与分解空间 $G_{p,q}$ 之间的嵌入关系: $G_{1,1}^1(\cdot) \subset B_{1,1}^1(\cdot) \subset G_{1,1}^{1/2}(\cdot)$ 以及 $G_{2,2}^{s-1/4}(\cdot) \subset B_{2,2}^{-,s}(\cdot) \subset G_{2,2}^{s-1/4}(\cdot)$.

3 新模型——Curvelet 域上的变分问题

因为空间 $G_{1,1}^{1/2}$ 和 $G_{2,2}^{s-1/4}$ 比空间 $B_{1,1}^1$ 和 H^{-s} 大, 并且有较弱的范数, 所以在这里用空间 $G_{1,1}^{1/2}$ 和 $G_{2,2}^{s-1/4}$ 分别代替空间 $B_{1,1}^1$ 和 $H^{-s}(\cdot)$, 得到 Curvelet 框架下的变分问题:

$$\inf_{u,v} F_f(u,v) = \|f - K(u+v)\|_{L_2(\cdot)}^2 + \|v\|_{G_{2,2}^{s-1/4}(\cdot)}^2 + 2\|u\|_{G_{1,1}^{1/2}(\cdot)} \quad (9)$$

下面分两种情形对式(9)进行求解: (1) K 为恒等算子 (2) K 不是恒等算子.

3.1 K 为恒等算子的 Curvelet 变分问题

当 K 为恒等算子时, 式(9)转化为:

$$\inf_{u,v} F_f(u,v) = \|f - (u+v)\|_{L_2(\cdot)}^2 + \|v\|_{G_{2,2}^{s-1/4}(\cdot)}^2 + 2\|u\|_{G_{1,1}^{1/2}(\cdot)} \quad (10)$$

因此有下面的命题成立:

命题 1 假设给定函数 $f \in L_2(\cdot)$, 则变分问题(10)的最小解是一类由 f 的 Curvelet 序列组成的函数 $(\tilde{u})_\mu$ 和 $(\tilde{v})_\mu$:

$$(\tilde{u})_\mu = \sum_k \sum_j f_{\phi_{\mu_1} \phi_{\mu_2}} + \sum_\mu S_T(f) \phi_\mu$$

$$(\tilde{v})_\mu = (1 + 2^{|\cdot|(-2s-1/2)})^{-1} [f - S_T(f)] \phi_\mu$$

其中: μ 和 μ_1, μ_2 是两个正参数, $T = 2^{-|\cdot|/4} (1 + 2^{|\cdot|(-2s-1/2)}) / (2^{|\cdot|(-2s-1/2)})$, S_T 是阈值为 T 的软阈值算子.

证明: 求解变分问题(10)即是要最小化函数 $F_f(u, v)$. 根据式(7)和式(8), $F_f(u, v)$ 中的对应范数可表示为:

$$\|f - (u+v)\|_{L_2(\cdot)}^2 = \sum_\mu |f - (u+v)|^2$$

$$\|v\|_{G_{2,2}^{s-1/4}(\cdot)}^2 = \sum_\mu 2^{|\cdot|(-2s-1/2)} |v|^2$$

$$|u|_{G_{1,1}^{1/2}(\cdot)} = \sum_\mu 2^{-|\cdot|/4} |u| \quad (11)$$

其中: f, u, v 是第 μ 个 Curvelet 系数. 将式(11)代入式(10)中, 则 $F_f(u, v)$ 等价于下列函数的序列和:

$$S_f(u, v) = \sum_\mu (|f - (u+v)|^2 + 2^{|\cdot|(-2s-1/2)} |v|^2 + 2 \cdot 2^{-|\cdot|/4} |u| \cdot 1_{f-\mu_j}) \quad (12)$$

假设 $l \cdot j$ 为式(12)的第 j 个加数, 则它的相应于 v 的导数为:

$$D_v [S_f(u, v)] = -2(f - u) + 2(1 + 2^{|\cdot|(-2s-1/2)})^{-1} v \quad (13)$$

因此, 最小值 $(\tilde{v})_\mu$ 的第 j 个 Curvelet 系数必须满足下面的关系式:

$$(\tilde{v})_\mu = (1 + 2^{|\cdot|(-2s-1/2)})^{-1} (f - u) \quad (14)$$

将式(14)代入 $[S_f(u, v)]$, 化简得最小值 $(\tilde{u})_\mu$ 的第 j 个 Curvelet 系数必须满足下面的关系式:

$$(\tilde{u})_\mu = f - T \text{Sign}((\tilde{v})_\mu) = S_T(f) \quad (15)$$

其中: $T = 2^{-|\cdot|/4} (1 + 2^{|\cdot|(-2s-1/2)}) / (2^{|\cdot|(-2s-1/2)})$. 重构 $(\tilde{u})_\mu$ 和 $(\tilde{v})_\mu$, 得到结论.

3.2 K 不为恒等算子的 Curvelet 变分问题

当 K 不为恒等算子时, 即求解变分问题(9), 这将导致一个关于 u 和 v 耦合的非线性方程. 下面引入替代函数消除 $K^* K(u+v)$ 的影响^[10], 其中 K^* 为 K 的伴随算子. 因为 K 可以被正则化, 所以不失一般性限制 $K^* K < 1$. 对于函数 $a \in L_2(\cdot)$, 式(9)中变分函数的替代函数为:

$$F_f^{\text{sur}}(u, v, a) = F_f(u, v) + \|u+v-a\|_{L_2(\cdot)}^2 - \|K(u+v-a)\|_{L_2(\cdot)}^2 \quad (16)$$

下面通过迭代算法逼近函数 $F_f(u, v)$ 的最小值, 该迭代算法可表示为:

$$a_0 = u_0 + v_0$$

$$(u_n, v_n) = \arg \min_{u,v} (F_f^{\text{sur}}(u_{n-1}, v_{n-1}, a_{n-1}));$$

$$a_n = u_n + v_n; n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

根据迭代算法式(17), 有下面的命题成立:

命题 2 假设 K 为线性有界算子, 且 $K^* K < 1$, 函数 $f \in L_2(\cdot)$, 则迭代算法(17)的第 n 次迭代的最小值 (u_n, v_n) 为

$$u_n = \sum_k \sum_j a_{n-1} + K^* f - K^* K a_{n-1}, \phi_{\mu_1} \phi_{\mu_2} + \sum_\mu S_T((a_{n-1}) + (K^* f) - (K^* K a_{n-1})) \phi_\mu$$

$$v_n = (1 + 2^{|\cdot|(-2s-1/2)})^{-1} [(a_{n-1}) + (K^* f) - (K^* K a_{n-1}) - S_T((a_{n-1}) + (K^* f) - (K^* K a_{n-1}))] \phi_\mu$$

其中: $a_{n-1} = u_{n-1} + v_{n-1}$, $T = 2^{-1/4}(1 + 2^{-(1/2-2s-1/2)}) / (2^{-(1/2-2s-1/2)})$.

4 数值实验

这部分用 Matlab 编程语言给出 Curvelet 变分模型 (9) 在图像分解、去噪和去模糊中的数值实验结果.

首先,对于图像分解成结构和纹理的实验,我们选取 Barbara 的截取图做代表,如图 1. 图 2 是新模型 (10)、DT 模型 (5)、OSV 模型和 VO 模型将图 1 分解成结构 u 和纹理 v 的结果. 由此可见,新模型可以有效地分解图像;DT 模型在边缘保护方面不如新模型;OSV 和 VO 模型分解后的结构仍含有纹理部分.



图 1 部分 Barbara 图像

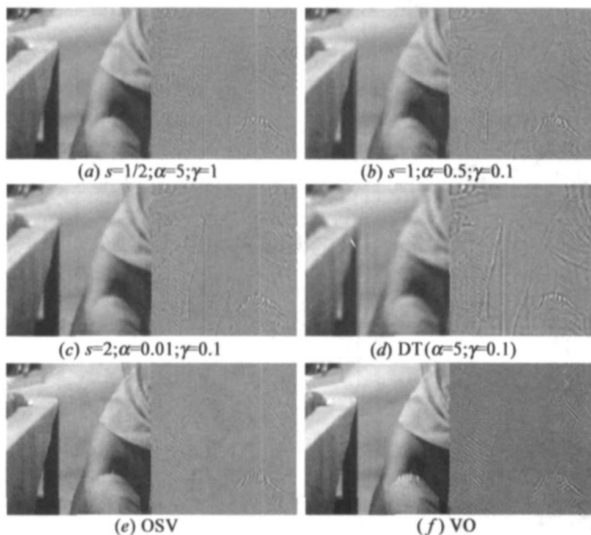


图 2 用四种模型处理后的结构-纹理分解模型: 图 (a), (b) 和 (c) 是模型 (10) 的三种情况

接下来验证新模型 (10) 的去噪性能. 选取被高斯白噪声 ($\sigma = 20$) 污染的 Lena 图像作代表, 见图 3 (a) ~ (b). 图 3 (c) 给出的是新模型 (10) 选取参数 $s = 1/2$; $\alpha =$

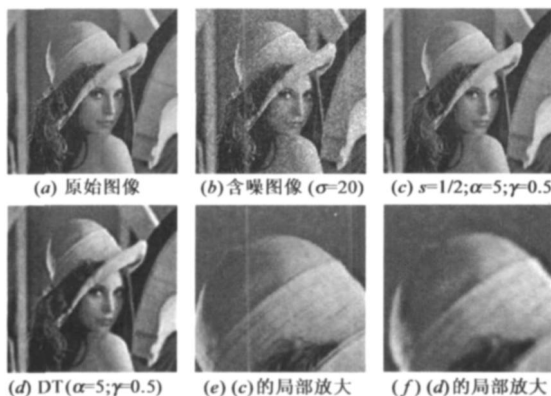


图 3 对 Lena 图像的去噪结果: 图 (c) 是模型 (10) 的一种情况

5; $\gamma = 0.5$ 后相应的去噪图像 u , 图 3 (d) 是 DT 模型的去噪结果. 由图 3 (e) ~ (f) 的局部放大图可以得出, 新模型可以在去噪的同时保持图像的细节特征. 表 1 给出的是选择不同参数去噪后的均方根误差 (RMSE)、峰值信噪比 (PSNR) 和运行时间的比较结果. 这些实验结果说明: 虽然新模型 (10) 在运行时间上比 DT 模型有所增加, 但它可以有效地去噪, 使得去噪后的图像有着较好的视觉质量. 假设输入图像的大小为 $M \times M$, 则文中的均方根误差 (RMSE) 和峰值信噪比 (PSNR) 是按照下式定义:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{M \times M} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (\bar{u}_{i,j} - u_{i,j})^2 / M^2};$$

$$\text{PSNR} = 10 \lg(255^2 / \text{RMSE}^2)$$

其中: \bar{u} 和 u 分别为原始图像和处理后的图像, $i = 1, 2, \dots, M$; $j = 1, 2, \dots, M$.

图 4 是用迭代算法 (17) 验证 Barbara 截取图的去模糊结果. 实验选择 K 为 1×9 高斯卷积算子, 模糊图像的 $\text{RMSE} = 29.0098$. 去模糊后图像的 $\text{RMSE} = 6.1299$, 选择的参数为 $s = 1$; $\alpha = 5$; $\gamma = 0.5$. 从视觉效果上看, 图 4 的去模糊图像比模糊图像有较大的提高.

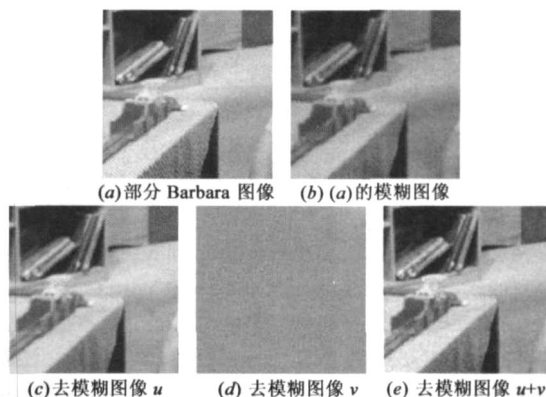


图 4 用算法 (17) 对 Barbara 图像的去模糊结果

最后一个实验是先对原始的 Baboon 图像通过 7×7 高斯卷积算子进行模糊, 然后加上标准差 $\sigma = 10$ 的高斯噪声, 模拟出既被模糊又被噪声污染的图像, 模糊图像的 $\text{RMSE} = 27.7081$. 用新模型得到去模糊后图像的 $\text{RMSE} = 16.4683$, 选择的参数为 $s = 1$; $\alpha = 5$; $\gamma = 0.5$; 用 DT 模型得到去模糊后图像的 $\text{RMSE} = 17.1907$, 选择的参数为 $\alpha = 5$; $\gamma = 0.5$.

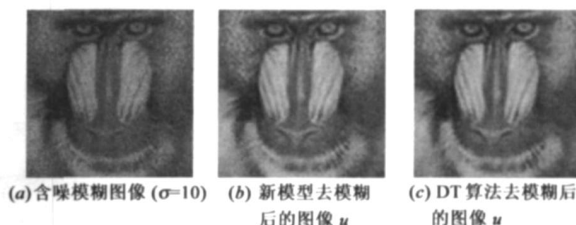


图 5 用两种模型对 Baboon 图像的去噪去模糊结果

表 1 对 Lena 图像去噪后的 RMSE 和 PSNR(dB) 比较结果

复原模型		RMSE	PSNR	Time (sec)	
含噪 Lena($\sigma=20$)		19.9881	22.1154		
DT($\sigma=5; \sigma=0.5$)		8.6931	29.2369	5.76	
新 模 型	$s=1/2$	$\sigma=5; \sigma=0.5$	7.2433	30.9321	20.53
		$\sigma=3; \sigma=0.5$	8.1975	29.8572	21.75
	$s=1$	$\sigma=0.5; \sigma=0.5$	8.6482	29.3923	21.84
		$\sigma=0.1; \sigma=0.5$	7.6462	30.4618	21.98
	$s=2$	$\sigma=0.001; \sigma=0.5$	9.1216	28.9294	22.14
		$\sigma=0.0005; \sigma=0.5$	8.6383	29.4022	22.03

5 结论

本文提出了一类基于 Curvelet 阈值的图像分解和复原模型. 首先在负指数 Hilbert-Sobolev 空间推广了 DT 模型, 接着利用 Curvelet 类型分解空间范数与 Curvelet 系数的等价性, 在 Curvelet 域上对推广的模型进行处理. 大量的数值实验说明了新模型的合理性.

致谢 感谢匿名评审的专家及编辑部老师给本文提出的参考意见.

参考文献:

- [1] Rudin L, Osher S and Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259 - 268.
- [2] Yves Meyer. Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations[R]. Boston, USA: American Mathematical Society, 2001.
- [3] Vese L and Osher S. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing[J]. Journal of Scientific Computing, 2003, 19(1-3): 553 - 572.
- [4] Osher S, Sole A and Vese L. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the norm[J]. Multi-scale Modeling and Simulation, 2003, 1(3): 349 - 370.
- [5] Linh Lieu and Vese L. Image restoration and decomposition via bounded total variation and negative Hilbert-Sobolev spaces [OL]. http://www.math.ucla.edu/~lieu/ams_meeting1009_slides.pdf
- [6] Daubechies I and Teschke G. Variational image restoration by means of wavelets: simultaneous decomposition, deblurring, and

denoising [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2005, 19(1): 1 - 16.

- [7] Candès EJ and Donoho D L. Curvelets-a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges [A]. Curve and Surface Fitting [C]. Nashville: Vanderbilt University Press, 2000. 105 - 120.
- [8] Candès EJ, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise-singularities [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(2): 219 - 266.
- [9] Lasse Borup and Morten Nielsen. Frame decomposition of decomposition spaces [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2007, 13(1): 39 - 70.
- [10] Daubechies I, Defrise M, and DeMol C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, 57(11): 1413 - 1541.

作者简介:



江玲玲 女, 1981 年出生于山东海阳, 08 年 6 月获得西安电子科技大学应用数学专业的博士学位, 现为山东工商学院数学与信息学院教师, 主要研究方向是偏微分方程理论、小波理论及其新进展在图像处理中的应用。
Email: linglingjiang716@163.com



冯象初 男, 1962 年出生于陕西西安, 教授, 博士生导师. 主要研究领域为现代数值方法、小波理论及其应用和图像处理的偏微分方程.

殷海青 男, 1977 年出生于山东济宁, 现为西安电子科技大学应用数学专业博士研究生, 主要研究方向是最优化方向及其应用, 机器学习模式识别中的优化问题研究.