非正弦周期状态下场论两个最基本的独立积分方程组的推广和电路规律

苏武浔，王建成，陈燊年
(华侨大学电子工程系，泉州 362011)

摘　要：本文将网络现代场论的两个最基本的独立积分方程组推广到非正弦周期状态下，并由此研究该状态下电路的基本规律，得出了一些初步的结论.

关键词：　非正弦周期状态；两个最基本的独立积分方程组；电路基本规律
中图分类号：　TN701　　**文献标识码**：　A　　**文章编号**：　0372-2112 (2000) 09-0102-03

The Extending of Two Most Basic Independent Integral Equations of Field Theory in Non-sinusoidal State

SU Wu-xun，WANG Jian-cheng，CHEN Shen-nian
(Dept. of Electronic Engineering，Hua Qiao University，Quanzhou 362011，China)

Abstract：　Extending the two most basic independent integral equations of field theory in sinusoidal steady state to the non-sinusoidal cyclic steady state and the most basic law of circuit theory in non-sinusoidal cyclic state was deduced.

Key words：　non-sinusoidal cyclic steady state；two most basic independent integral equations；basic laws of circuit

1　引言

自网络现代场论(简称场论说) 1985年创立以来，已取得了重大的进展[1,2]. 网络现代场论把麦克斯韦方程组及其推论——电荷守恒定律与电磁场能量转换和守恒定律作为基本出发点，将两个守恒定律在正弦稳态下的网络中联立求解，从而得到在正弦稳态下的两个最基本的独立积分方程组[3]. 从这两个最基本的独立积分方程组出发，基尔霍夫电流定律和电压定律的完备新表达式能够严格地推导出来[3]；电路理论的基本定理和定律能够严格普遍地证明[4]. 电路理论的一般分析方法和矩阵分析法能由纯逻辑推理，演绎得到[5~7]；而四种电路基本元件的内禀特性和外在特性公式第一次被明晰表出[7]，它也说明了许多原有的电路理论所不能说明的内容并得到许多新的结果，如计算电容的新公式等[7]. 本文致力于把场论说的两个最基本的独立积分方程组从正弦稳态的形式推广到非正弦周期稳态下，然后应用场论说的纯逻辑推理、演绎的方法，得到非正弦周期稳态下的电路基本规律.

2　非正弦周期稳态下，场论说的两个最基本的独立积分方程组

对实际的有 B 条支路和 N 个节点的线性网络，由于激励源通常都是周期函数，它们的叠加一般都能用非正弦的周期函数来描述，因此，考察非正弦周期状态下的网络有重要实际意义.

依据傅立叶级数展开理论，非正弦周期的激励函数可展开为许多正弦周期函数的叠加，而且这种展开是完备和唯一的. 对于一个线性网络，适用叠加原理；许多正弦形式的激励源的叠加对网络作用所引起的响应仍可由所有单个正弦激励源所引起的响应的叠加来描述. 因此，在稳态下，非正弦周期激励源对线性网络的作用所引起的响应，仍可由其所有正弦分量所引起的正弦稳态叠加响应来描述.

由于傅立叶级数展开所采用的基集的完备性与正交性，非正弦周期函数的傅立叶展开的每一个分量都是线性无关的，即独立的. 因此，对于非正弦周期函数形式的激励源及其引起的响应，均用傅立叶级数来表示. 例如通过某一支路 t 的非正弦周期电流 $j_{\mu t}$ 可表示为：

$$j_{\mu t} = \sum_{\omega} j_{\omega\mu t} \tag{1}$$

式中：μ 代表节点，t 代表某一支路，其与节点 μ 的关联由式(4)表示：$j_{\omega\mu t}$ 表示 $j_{\mu t}$ 中角频率为 ω 的分量，ω 的取值范围为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，$n$ 可至无限值.

那么，由文献[1]所得结果，在非正弦周期稳态下，电荷守恒定律应用于节点 μ 的结果可表示成：

$$\sum_{t=1}^{B} \iint \sum_{\omega} j_{\omega\mu t} \cdot ds_{\mu t} = 0, \mu = 1, 2, \cdots, N-1 \tag{2}$$

这就是第一独立积分方程组，由它可以导出基尔霍夫电流定律在非正弦周期状态下的形式为：

收稿日期：1999-03-15；修回日期：2000-03-20
基金项目：国家自然科学基金(No. 69672012)

$$\sum_{t=1}^{B}\sum_{\omega}\cos(j_{\omega\mu t}, ds_{\mu t})\, j_{\omega\mu t}=0, \mu=1,2,\cdots,N-1 \tag{3}$$

式中方向余弦由 $j_{\omega\mu t}$ 与 $ds_{\mu t}$ 的点积而来,其取值按下列情况仅能取值 ±1 或零:

$$\cos(j_{\omega\mu t}, ds_{\mu t})=\begin{cases}1, \text{如果电流 } j_{\omega\mu t} \text{流出节点} \mu;\\ -1, \text{如果电流 } j_{\omega\mu t} \text{流进节点} \mu;\\ 0, \text{如果电流 } j_{\omega\mu t} \text{不通过节点} \mu.\end{cases} \tag{4}$$

而对第二个基本独立方程组的推广要困难得多.这里从电磁场的能量转换与守恒定律出发.一般情况下的电磁场能量转换与守恒定律形式如下:

$$\int j\cdot E d\Omega=-\int\nabla\cdot(E\times H)\,d\Omega-\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial t}(B\cdot H)\,d\Omega-\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial t}(E\cdot D)\,d\Omega$$

其中 $\int\nabla\cdot(E\times H)\,d\Omega=\oint(E\times H)\cdot ds$,把网络所在区域边界推至无穷远处,则对于实际的网络,此项积分为零,故有

$$\int j\cdot E d\Omega=-\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial t}(B\cdot H)\,d\Omega-\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial t}(D\cdot E)\,d\Omega \tag{5}$$

对于各向同性介质,有 $B=\mu H$, $D=\varepsilon E$, $j=\sigma(E+K)$, K 为支路上电源的非电外力,也就是 $E=\rho j-K$, $\rho=1/\sigma$ 为介质的电阻率.由此,式(5)变成:

$$\int j\cdot(\rho j-K)\,d\Omega=-\int\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}(H\cdot H)\,d\Omega-\int\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E\cdot E)\,d\Omega$$

经整理,上式变成:

$$\int j\cdot K d\Omega=\int\rho j\cdot j d\Omega+\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int(H\cdot H)\,d\Omega+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int(E\cdot E)\,d\Omega \tag{6}$$

对于非正弦周期稳态,按照傅立叶级数展开理论,电路各量都可以用傅立叶级数表示,其共同形式是:

$$V=\sum_{\omega}V_{\omega}=\sum_{\omega}V_{\omega 0}\cos(\omega t+\phi_{v\omega 0}) \tag{7}$$

式中, $V\in(j, E, D, B, H)$, V_{w0} 为矢量振幅,对同一 V, $V_{\omega 0}$ 的方向是与 ω 无关的. $\phi_{v\omega 0}$ 为 $V_{\omega 0}$ 的初相位.

把式(7)的各量表达式代入式(6),得到式(8):

$$\int\sum_{\omega}\sum_{\omega'}j_{\omega}\cdot K_{\omega'}d\Omega=\int\rho\sum_{\omega}\sum_{\omega'}j_{\omega}\cdot j_{\omega'}d\Omega+\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\cdot\int\sum_{\omega}\sum_{\omega'}H_{\omega}\cdot H_{\omega'}d\Omega+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\sum_{\omega}\sum_{\omega'}E_{\omega}\cdot E_{\omega'}d\Omega \tag{8}$$

式(8)中,对于 $\omega\neq\omega'$,由于 ω 和 ω' 均取值 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$,因此,下列四种交叉项的不同形式均有 $n(n-1)/2$ 种: $j_{\omega}\cdot k_{\omega'}$, $j_{\omega}\cdot j_{\omega'}$, $H_{\omega}\cdot H_{\omega'}$, $E_{\omega}\cdot E_{\omega'}$.一般而言,他们不会为零,因此,式(8)是一个很复杂的方程,无法表现出电路中瞬时的简单规律.但考虑到傅氏展开基的正交性,那么在一周期内平均,则所有交叉项均为零:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T j_{\omega}\cdot j_{\omega'}dt&=\frac{1}{T}\int_0^T j_{\omega 0}j_{\omega' 0}\cos(\omega t+\phi_{j\omega 0})\cos(\omega' t+\phi_{j\omega' 0})=0\\&=\frac{1}{T}\int_0^T j_{\omega}\cdot K_{\omega'}dt=\frac{1}{T}\int_0^T H_{\omega}\cdot H_{\omega'}dt\\&=\frac{1}{T}\int_0^T E_{\omega}E_{\omega'}dt, (\omega\neq\omega')\end{aligned} \tag{9}$$

因此,将式(8)在一周期 T 内平均可得:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\iiint\sum_{\omega}\sum_{\omega'}j_{\omega}\cdot K_{\omega'}d\Omega dt=\frac{1}{T}\int_0^T dt\Big\{\int\rho\sum_{\omega}\sum_{\omega'}j_{\omega}\cdot j_{\omega'}d\Omega+\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\cdot\int\sum_{\omega}\sum_{\omega'}H_{\omega}\cdot H_{\omega'}d\Omega+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\sum_{\omega}\sum_{\omega'}E_{\omega}\cdot E_{\omega'}d\Omega\Big\} \tag{10}$$

交换积分顺序,先进行周期平均,则可得:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\iiint\sum_{\omega}j_{\omega}\cdot K_{\omega}d\Omega dt=\frac{1}{T}\int_0^T dt\Big\{\int\rho\sum_{\omega}j_{\omega}\cdot j_{\omega}d\Omega+\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\cdot\int\sum_{\omega}H_{\omega}\cdot H_{\omega}d\Omega+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\sum_{\omega}E_{\omega}\cdot E_{\omega}d\Omega\Big\} \tag{11}$$

由于进行了周期平均, $\omega\neq\omega'$ 的交叉项都等于零了.上式显然可以写成:

$$\sum_{\omega}\frac{1}{T}\int_0^T dt\Big\{\int j_{\omega}\cdot K_{\omega}d\Omega-\int\rho j_{\omega}\cdot j_{\omega}d\Omega-\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int H_{\omega}\cdot H_{\omega}d\Omega-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int E_{\omega}\cdot E_{\omega}d\Omega\Big\}=0 \tag{12}$$

由于傅式展开基矢量的正交性和归一性,式(12)要成立,必须对每一个 ω 均有:

$$\frac{1}{T}\int_0^T dt\{\int j_{\omega}\cdot K_{\omega}d\Omega-\int\rho j_{\omega}\cdot j_{\omega}d\Omega-\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int H_{\omega}H_{\omega}d\Omega-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int E_{\omega}\cdot E_{\omega}d\Omega\}=0 \tag{13}$$

同理,对电流定律的表达式:

$$\sum_{\omega}\sum_{t=1}^{B}\cos(j_{\omega\mu t}, ds_{\mu t})\, j_{\omega\mu t}=0$$

也必须有对每一 ω 分量的:

$$\sum_{t=1}^{B}\cos(j_{\omega\mu t}, ds_{\mu t})\, j_{\omega\mu t}=0 \tag{14}$$

式(13)、(14)表明对每一频率 ω 的分量,在周期平均的条件下,所必须满足的条件;而在单一频率正弦激励的稳态条件下,网络现代场论已经得出的结果说明,式(13)中括号中的表达式是瞬时成立的,周期平均当然成立,所以式(13)可写成:

$$\int j_{\omega}\cdot K_{\omega}d\Omega-\int\rho j_{\omega}\cdot j_{\omega}d\Omega-\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int H_{\omega}\cdot H_{\omega}d\Omega-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int E_{\omega}\cdot E_{\omega}d\Omega=0 \tag{15}$$

把 ω 当成一个参量,式(14)、(15)就是单一频率在正弦稳态下满足的方程.由此两式出发,利用网络现代场论已经得出的结果[1,3],就可以得到如下的结果:

$$\oint_{l_k'}K_{\omega}\cdot dl=\oint_{l_k'}Z j_{\omega}\cdot dl+\sum_{t=1}^{m+k'}\sum_{e=1(t\neq e)}^{B}\int_{l_e}Z_{te}^{(M)}j_{\omega e}\cdot dl_e \tag{16}$$

式(16)可见于文献[3]的第 60 页; l_k 是由 m 条非独立电流支路和一条独立电流支路(k 支路)组成的 $B-N+1$ 个独立回路中的一个; Z 表示 l_k 回路中各支路的除互感外的复合复阻抗率(见文献[3]第 56 页):

$$Z=\rho^{(0)(R+r)}+Z^{(C)}+Z^{(L)} \tag{17}$$

$Z_{te}^{(M)}$ 表示 l_k 这个闭合回路内不等于 t 的 e 支路和回路之外的各个 e 支路对 l_k 的互感复阻抗率.网络现代场论已经得出的结果表明, Z 中的 $Z^{(C)}$ 和 $Z^{(L)}$、$Z_{te}^{(M)}$ 是与 ω 有关的,在后面讨论这个问题.

式(16)是运用网络现代场论的方法,把场量变成了电路

中的变量. 运用此结果,在非正弦周期状态下,对于线性介质,在一个周期内取平均值,可得到如下的两个基本的独立积分方程组:

$$\sum_{\omega}\sum_{t=1}^{B}\cos(j_{\omega\mu t}, ds_{\mu t})\, j_{\omega\mu t} = 0 \qquad (18)$$

$$\sum_{\omega}\oint_{l_k'} K_\omega \cdot dl = \sum_{\omega}\oint_{l_k'} Z_\omega j_\omega \cdot dl + \sum_{\omega}\sum_{t=1}^{m+k'}\sum_{e=1(t\neq e)}^{B}\int_{l_e} Z_{\omega e}^{(M)} j_{\omega e}\cdot dl_e \qquad (19)$$

由此两个最基本的独立积分方程组,可得到在非正弦周期状态下的电路基本规律.

3 非正弦周期状态下电路的基本规律

由式(18)和(19)这两个最基本的独立积分方程组出发,把它们沿着某一独立回路积分,就可以得到在周期平均条件下,电路的基本规律表达式:

(1)对某一节点 μ,流入与流出节点的总平均电流等于零:

$$\sum_t \bar I_{\mu t} = 0,\ \mu = 1,2,\cdots,N-1 \qquad (20)$$

(2)对某一独立回路或任意回路,下式均成立:

$$\oint_{l_k'}\sum_{\omega} K_\omega \cdot dl = \oint_{l_k'}\sum_{\omega} Z_\omega j_\omega \cdot dl + \sum_{t=1}^{m+k'}\sum_{e=1,\,t\neq e}^{B}\int_{l_e}\sum_{\omega} Z_{\omega e}^{(M)} j_{\omega e}\cdot dl_e \qquad (21)$$

下面来详细讨论式(21)中各项的意义.

式(21)左边项是 $\oint_{l_k'}\sum_{\omega} K_\omega \cdot dl$

它表示外源非电外力沿回路的积分,由于非电外力的各分量均占同等的地位,各分量的合成还原成傅立叶展开的原量 K,它沿回路的积分 $\oint_{l_k'} K\cdot dl$ 就表示回路外源的非电外力所形成的电动势的周期平均值.

式(21)右边第一项是 $\oint_{l_k'}\sum_{\omega} Z_\omega j_\omega \cdot dl$

其中 Z_ω 为角频率为 ω 的回路复合复阻抗率,依网络现代场论的结果[3],有

$$Z_\omega^{(C)} = 1/j\omega\varepsilon^{(0)} \quad 或 \quad Z_\omega^{(C)} = s/j\omega\varepsilon^{(0)} s$$
$$Z_\omega^{(L)} = \frac{j\omega s\mu^{(0)}}{4\pi}\int \frac{\cos(j_i', j_i)}{h_{ii}} dl_i' \qquad (22)$$

其值是与角频率有关的. 因此,此项相当于对不同的角频率分量的电流进行带不同阻抗权重的平均,与单一频率在正弦稳态下的量无简单的对应关系. 如果定义:

$$\bar I_t = \sum_{\omega}\frac{1}{T}\int_0^T I_{t\omega} dt = \sum_{\omega}\frac{1}{T}\int_0^T\iint_s j_\omega \cdot ds\, dt \qquad (23)$$

和

$$\bar Z_t = \frac{\sum_{\omega}\int_{l_t} Z_\omega j_\omega \cdot dl_t}{\bar I_t} = \frac{\sum_{\omega}\int_{l_t} Z_\omega I_\omega dl_t}{\bar I_t} = \frac{\sum_{\omega} Z_{t\omega}}{\bar I_t} \qquad (24)$$

其中

$$Z_{t\omega} = \int_{l_t}\frac{Z_\omega}{s} dl_t \qquad (25)$$

那么,称 $\bar Z_t$ 为非正弦周期状态下周期平均的 t 支路的等效阻抗,而称按下式规定的 $\bar Z_{lk}$ 为周期平均下的回路等效阻抗.

$$\bar Z_{lk'} = \sum_t^{m+k'} \bar Z_t \qquad (26)$$

对式(21)右边的第二项,可按类似于第一项的办法处理,定义:

$$\bar Z_t^{(M)} = \frac{\sum_{\omega}\sum_{e=1}^{B}\int_{l_e} Z_{\omega e}^{(M)} j_{\omega e}\cdot dl_e}{\bar I_e} = \frac{\sum_{\omega}\sum_{e=1}^{B}\int_{l_e} Z_{\omega e}^{(M)}\frac{I_{\omega e}}{s} dl_e}{\bar I_e} = \frac{\sum_{\omega} Z_{te\omega} I_{e\omega}}{\bar I_e} \qquad (27)$$

其中

$$Z_{te\omega} = \sum_{e=1}^{B}\int_{l_e}\frac{Z_{\omega e}}{s} dl_e \qquad (28)$$

那么,称 $\bar Z_t^{(M)}$ 为非正弦周期状态下周期平均的 t 支路的等效互感阻抗,而称按下式规定的 $Z_{lk}^{(M)}$ 为周期平均下的回路等效互感阻抗.

$$Z_{lk}^{(M)} = \sum_t^{m+k'} \bar Z_t^{(M)} \qquad (29)$$

4 几点初步结论

从上述的推导过程可清楚地看到,对于非正弦周期状态下的线性网络,网络的瞬时规律是十分复杂的,无简单明确的规律可言.

只有运用傅立叶级数展开,在一个周期内进行平均,才能得到两个基本的独立积分方程组,它们具有类似于正弦稳态下的电路最基本积分方程组的形式,也蕴藏着非正弦稳态下电路的基本规律,但从这两个最基本的方程组应用于某一回路的情况来看,非正弦周期状态下的电路规律无简单的表现形式,只能引入一些周期平均状态下的量来描述电路的最基本规律,它们与原先人们熟悉的概念之间的关系还需进一步探讨.

参考文献:

[1] 陈燊年,何煜光. 非线性网络与线性网络统一的场论说[J]. 中国科学(A 辑),1994,24(12):1316 - 1326.

[2] 陈燊年. 网络现代场论的建立和进展[J]. 科学通报,1996,41(15):1345 - 1350.

[3] 陈燊年,何煜光,陈洁. 网络现代场论[M]. 北京:电子工业出版社,1991.

[4] 王建成,苏武浔,陈燊年. 场论说对包含互感网络叠加定理的普遍证明[J]. 电子学报,1998,26(3):20 - 22.

[5] 王建成,苏武浔,陈燊年. 场论说对非线性网络节点电压法一般形式方程的推导[J]. 电子学报,1998,26(6):78 - 81.

[6] 陈燊年,王建成. 从线性到非线性的四种基本电子元件特性普遍公式[J]. 科学通报,1993,38(16):1527 - 1531.

[7] 陈燊年,等. 从麦克斯韦方程组建立的新电路理论[M]. 北京:科学出版社,1999.

作者简介:

苏武浔 1947 年出生,1970 年毕业于南开大学物理系,1983 年于内蒙古大学物理系获硕士学位. 近年来从事电磁场理论的教学、科研工作.