

# FD TD 计算中非均匀网格网络的分析及综合

张 琰 高本庆

(北京理工大学电子工程系 53 教研室,北京 100081)

**摘 要:** 本文依据微波网络理论及网格波阻抗的概念,对时域有限差分(FDTD)计算中的非均匀网格反射波进行分析,提出了网格网络分析和综合的概念,分析了网格网络的反射特性,给出了网格网络的综合过程.基于上述理论和概念,在一维(TEM波)和三维微带结构以及方波导中实现了有关的非均匀网格的网络特性,其特性可用于沿传播方向的网格非均匀性的匹配,减小网格反射波及改进波的传播特性等.

**关键词:** 网格网络特性;非均匀网格;时域有限差分算法(FDTD法);网格波阻抗

**中图分类号:** TM15 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2001)07-0965-05

## The Analysis and Synthesis of Non-uniform Mesh Network in FDTD Computation

ZHANG Yan, GAO Ben-Qing

(Department of Electrical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** In this paper, according to the theory of microwave network and the concept of mesh wave impedance, the wave reflection of non-uniform mesh for FDTD technique is analyzed, and the concept of analysis and synthesis of mesh network is presented. The reflecting characteristic of mesh network is analyzed first. Then the procedure of synthesising a mesh network is deduced. On the basis of the above theory, network characteristics of non-uniform mesh, which can be used to match non-uniform mesh or improve the transmitted characteristic for a mesh wave to travel along the non-uniform mesh etc., are realized in 1-D (TEM wave), 3-D microstrip structures and waveguide.

**Key words:** mesh network characteristic; non-uniform meshes; FDTD algorithm; mesh wave impedance

### 1 引言

时域有限差分(FDTD)法自提出以来,已经在电磁仿真计算的各个领域得到了广泛的应用<sup>[1]</sup>.其中非均匀网格技术,如扩展网格、子网格等在应用中已证明是有效的,并为提高该算法的效率和精度作出了一定的贡献.但相关的文献对于因网格的非均匀而引入的网格反射波没有作出定量的分析和评估<sup>[3,4]</sup>.随后,Gao提出了网格波阻抗概念<sup>[2]</sup>,并导出了TEM波及方波导中H<sub>10</sub>模在传播方向网格波阻抗的表达式,从而为评测传播方向网格非均匀性的影响提供了理论依据.

本文在研究中发现,在传播方向由不同尺寸网格组成的多节网格网络,利用非均匀网格的反射波,通过适当调整网格的尺寸和每一节网格网络的长度,可以综合出多种网络特性,如网格阻抗变换特性,网格低通滤波特性等.我们知道,非均匀网格的反射波会影响波的传播,给计算带来误差,因而总是希望尽可能准确地对其进行评估;另一方面,更希望能利用网格反射波,根据实际情况综合出适当的网络特性,实现网格反射波的匹配,从而既能尽量减小非均匀网格反射波的影响,又可以保持非均匀网格节约内存和减少计算时间的优点.出于上述考虑,本文依据网络理论及网格波阻抗的概念,对非均匀

网格反射波进行分析,提出网格网络分析和综合的概念,分析了网格网络的反射特性,并以一维TEM波为例,导出了网格网络综合的过程.随后又在一维以及三维微带结构和方波导中实现并验证了有关特性.

### 2 网格反射波

对于一个平面波(一维),当传播方向的网格尺寸是,时间步为时t,网格波阻抗可以表示为<sup>[2]</sup>:

$$Z_{mTEM} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{e^{-jk} - 1}{1 - e^{jk}} e^{-j \cdot t/2} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} e^{-j \frac{k \cdot t}{2}} = Z_{0TEM} \phi(\dots) \quad (1)$$

方波导中H<sub>10</sub>模在宽边中心位置网格波阻抗可以表示为<sup>[2]</sup>:

$$Z_{mH_{10}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\frac{H_{x0}}{x} \cdot \frac{H_{x0}}{H_{x0}} \cdot F(i, X) - (1 - e^j)}{1 - e^{-j}} e^{-j \cdot t/2} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\frac{k^2}{x \cdot j} \sin(\dots - x) - (1 - e^j)}{1 - e^{-j}} e^{-j \cdot t/2} \quad (2)$$

收稿日期:2000-05-13;修回日期:2000-11-06

基金项目:国家重点自然科学基金(No. 69931030)



其中,  $k^2 = k^2 - k_c^2$ ,  $k_c^2 = (\pi/a)^2$ ,  $a$  是波导宽边尺寸,  $x$  是  $x$  方向(波导宽边)的网格尺寸. 分析上式可知,  $\sin(\frac{\pi x}{a})$  ( $\pi/a$ )  $x = \pi/N_x$  的值很小; 式(2)中的第二项的特性, 尤其是模值主要决定于  $H_{y0}/H_{x0}$ , 受传播方向网格尺寸的影响很微小. 可以导出, 当频率大于截止频率即  $\omega > \omega_c$  时,  $H_{10}$  模网格波阻抗可以近似写为:

$$Z_{mH_{10}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sqrt{e^{j\frac{\pi x}{a}} - 1}}{\sqrt{1 - e^{-j\frac{\pi x}{a}}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} e^{j\frac{\pi x}{2a}} \quad (3)$$

$$= Z_{0H_{10}} \phi(\frac{x}{a}) \quad (4)$$

设网格尺寸因子为  $c$ , 则波从尺寸  $c_1$  的网格传向尺寸  $c_2$  的网格时, 产生的网格反射波可以表示为:

$$R = \frac{Z_{m2} - Z_{m1}}{Z_{m2} + Z_{m1}} = jtg \frac{\phi(c_2) - \phi(c_1)}{2} \quad (4)$$

则 TEM 波及方波导中  $H_{10}$  模的网格反射波可以分别地表示为:

$$R_{TEM} = jtg \frac{k(c_1 - c_2)}{4} \quad (5a)$$

$$R_{H_{10}} = jtg \frac{(c_2 - c_1)}{4}, \quad \omega > \omega_c \quad (5b)$$

式(4)、(5)可以用来评估非均匀网格间的反射波的大小. 图 1(a)、(b)中分别给出了网格因子取不同值时, TEM 波及方波导中  $H_{10}$  模网格反射波系数的模值随频率变化的曲线; 其中波导宽窄边尺寸分别为  $a = 7.214\text{cm}$ ,  $b = 3.404\text{cm}$ . 截止频率是  $2.0793\text{GHz}$ . 图 1(a)还给出了一维 FDTD 的计算数据. 从图中还可以看出, 随着频率的升高, 网格反射波系数逐渐变大; 且网格因子越大, 即网格间尺寸差别越大, 反射波也越强烈, 因此采用网格网络来匹配网格反射波就显得很必要.

需要说明的是, 由于 FDTD 计算中网格尺寸的选择受工作波长的限制, 对于同一个时间基准, 不同网格因子适用的频率范围是不同的. 图 1(a)中用箭头标出的是最高有效频率, 可以看出在有效频率范围内理论值和数值模拟值很吻合.

由前面的分析和计算可以看出, 网格波阻抗和网格反射波具有下列特点:

- (1) 网格波阻抗和网格反射波都是频率的函数, 是复数.
- (2) 在满足有效基准频率的条件下, 网格波阻抗的模值与网格尺寸、网格因子  $c$  及时间步  $t$  的选取无关;
- (3) 在时间步一定的情况下, 网格波阻抗的相角是频率的函数;
- (4) 两个网格间反射波的模值大小仅与它们网格因子的差值有关.

网格波阻抗和网格反射波的上述特点给网格网络的分析与综合带来了方便, 也使得网格网络的分析与综合有别于一般微波网络的分析与综合.

### 3 网络特性分析

网格网络是指在传播方向上, 不同尺寸的网格按照一定的规律(如网格尺寸、以及每一种尺寸的总长度)相连接而成的结构. 任何一个网格网络都可以用下列结构来描述, 如图 2. 该网格网络总的  $A$  矩阵为<sup>[6,8]</sup>:

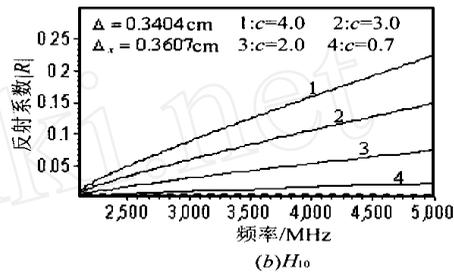
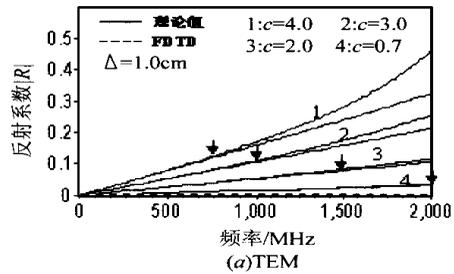


图 1 不同网格尺寸随频率变化的反射系数模值

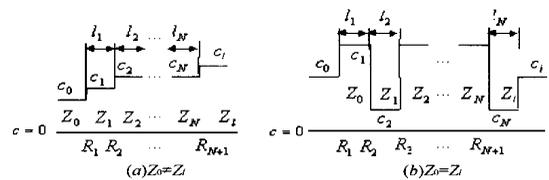


图 2 网格网络结构示意图

$$[A]_N = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & jZ_1 \sin \theta_1 \\ j \sin \theta_1 / Z_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \cos \theta_N & jZ_N \sin \theta_N \\ j \sin \theta_N / Z_N & \cos \theta_N \end{bmatrix}$$

$$= [A]_{N-1} \begin{bmatrix} \cos \theta_N & jZ_N \sin \theta_N \\ j \sin \theta_N / Z_N & \cos \theta_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

网格网络的输入阻抗和总反射系数分别表示为:

$$Z_{min} = \frac{a_{11} \cdot Z_L + a_{12}}{a_{21} \cdot Z_L + a_{22}} \quad (7)$$

$$R = \frac{Z_{min} - Z_0}{Z_{min} + Z_0} \quad (8)$$

我们知道, 传统微波网络的综合都是基于特性阻抗为实数的前提, 这样网络衰减特性函数可以归结为两个有理多项式的比值, 通过对此有理分式的处理就能得到所需网络的归一化元件值. 而网格波阻抗是与网格尺寸有关、随频率变化的复数, 网络衰减特性函数不能简单地归结为实系数有理分式的形式, 所以尽管从上述的分析以及式(8)可以很容易的写出网格网络衰减特性函数, 却只能用于进行严格的理论计算, 而不能按照传统的方法来综合网格网络. 不过, 由于相邻两级之间网格反射波  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots N$ ) 的值通常都比较小, 所以采用近似的方法分析可以得到网格网络特殊的性质, 从而为网格网络的综合和实现提供思路.

当  $R_i$  较小时, 总的反射系数(只记录一次反射)可以近似的表示为:

$$R \approx R_1 + R_2 e^{-j2\theta_2} + R_3 e^{-j4\theta_3} + \dots + R_{N+1} e^{-j2N\theta_N}$$

$$= \prod_{i=1}^{N+1} R_i e^{-j2(i-1)\pi} \quad (9)$$

由式(9)可以清楚的看到, 网格网络的特性主要是由每一级的网格波阻抗, 实际上是网格因子  $c_i (i = 1, 2, 3 \dots N)$  的大小以及各级的长度来控制的. 为了便于分析和网络特性的实现, 这里设定各节的长度相等, 网格因子的选取也具有一定规律. 设网格因子是按一定规律变化的网络节数的函数, 即  $c_i = F(i) (i = 1, 2, 3 \dots N)$ , 适当选取  $F$ , 就可以实现相应的特性, 如网格阻抗变换、网格低通滤波等.

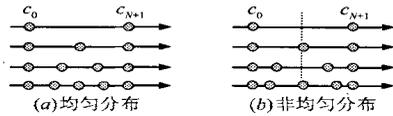


图 3 网格因子线性变化的分布

3.1 网格波匹配 ( $c_0, c_{N+1}$ , 图 2(a))

3.1.1 网格因子线性均匀分布 为简便起见, 这里以 TEM 波为例进行分析. 设  $c_0 < c_{N+1}$  ( $c_0 > c_{N+1}$  有类似的分析),  $F$  线性变化且网格因子均匀分布(如图 3(a)), 即

$$c_i = c_0 + i \cdot \frac{(c_{N+1} - c_0)}{N+1} = c_0 + i \cdot \frac{c}{N+1} \quad (10)$$

$i = 1, 2, 3 \dots N, \quad c = c_{N+1} - c_0$

此时所有的  $R_i$  模值都相等 ( $i = 1, 2, 3 \dots N$ ), 则式(9)可以改写为:

$$|R| = \left| \prod_{i=1}^{N+1} R_i e^{-j2(i-1)\pi} \right| = j \tan \frac{k \cdot c}{4(N+1)} \cdot \prod_{i=1}^{N+1} e^{-j2(i-1)\pi} \quad (11)$$

由上式可以导出, 对于一个  $N$  节网格网络, 当反射系数为很小点时应满足下列关系:

$$2(i-1)\pi = \frac{2k}{N+1} (i-1) \quad i = 1, 2, 3 \dots N; k = 0, 1, 2, 3 \dots (12)$$

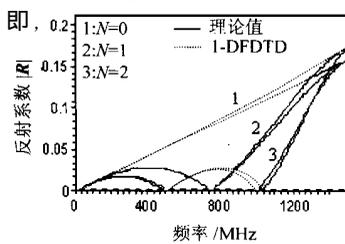


图 4 类似切比雪夫阻抗变换的网格网络特性

3.1.2 网格因子线性非均匀分布 类似的分析可以导出, 当网格因子线性变化、非均匀分布时, (如图 3(b)) 有

$$c_i = (c_0 - \frac{c}{2N}) + i \cdot \frac{c}{N}, \quad i = 1, 2, 3 \dots N, N > 1 \quad (16)$$

可以综合出类似最大平坦的阻抗变换低通特性. 图 5 中给出了  $l = 1\text{cm}, l = 10\text{cm}, c_0 = 1.0; c_{N+1} = 3.0$  时, 网格因子均匀分布与非均匀分布的比较. 图 5(a) 是网格因子均匀分布、 $N = 1$  和网格因子非均匀分布、 $N = 2$  的比较; 图 5(b) 是网格因子均匀分布、 $N = 2$  和网格因子非均匀分布、 $N = 3$  的比较. 从图中可以看出, 网格因子非均匀分布的  $N$  节网格网络匹配频带和均匀分布的  $N - 1$  节网格网络相同, 但频带内

$$= \frac{k}{N+1} \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (13)$$

对应的频率为:

$$f = \frac{k}{2(N+1) \cdot \sqrt{\mu} \cdot l} \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (14)$$

而反射系数的极大点近似出现在两个零点的中心频率处, 即

$$f = \frac{2k+1}{4(N+1) \cdot \sqrt{\mu} \cdot l} \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (15)$$

将式(14)(15)代入(9)就可以求出对应极点的模值, 其大小由正切函数的特性决定. 分析式(11)(14)、(15)可以知道, 对于一个  $N$  节网络匹配网络, 当网格因子线性均匀分布时, 反射波匹配特性类似于传统微波网络中切比雪夫阻抗变换特性, 即:

- (1) 匹配频带内反射系数的极点呈周期性分布;
- (2) 网格网络匹配的节数越多, 网络反射系数模值出现极点的周期越短, 极大点的模值也越小;
- (3) 网格网络匹配的节数越多, 匹配的频带越宽
- (4) 匹配频带内极大点的个数与节数相等;
- (5) 网格网络每一节的长度  $l$  越短, 匹配频段越宽; 由于频率升高, 各个极大点的值也会相应有所增加.

图 4 中给出了  $l = 1\text{cm}; l = 10\text{cm}; c_0 = 1.0; c_{N+1} = 3.0$  时、 $N$  分别取 0、1、2 的网格网络的反射特性(网格因子线性均匀分布), 并与一维 FDTD 的仿真值作比较, 二者是吻合的. 从图中可以看出, 计算出的特性符合前面的分析. 另外, 对于某一个  $N$ , 其通带内各个极点的值并不完全相等, 而是随频率的升高而缓慢升高, 这是因为计算模值的正切函数在周期内是频率的增函数, 这一点有别于传统微波网络的切比雪夫阻抗变换.

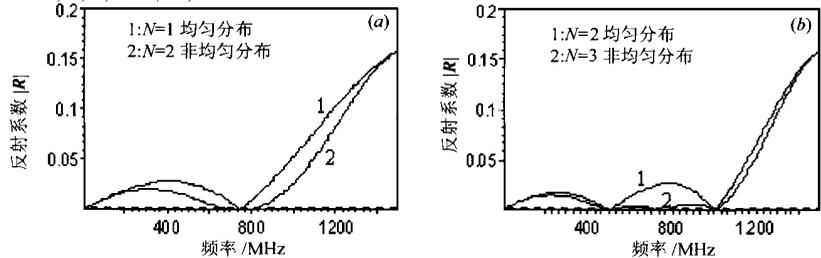


图 5 网格因子不同分布时网格网络特性比较的平坦性有较大改善.

需要说明的是: 文中的非均匀分布方式得到的并不是传统意义上的最大平坦阻抗变换特性(除  $N = 2$  外), 称其平坦仅是相对于前一部分的分析而言.

3.2 网格低通滤波 ( $C_0 = c_{N+1}$ , 图 2(b))

对于  $C_0 = c_{N+1}$  的网格网络(图 2(b)), 利用网格反射波的性质  $j \tan(-c) = -j \tan(c)$ , 采用对称分布的形式, 同样可以得到类似传统低通滤波特性. 在下一部分的网格网络的实现中会有具体地算例. 实际上, 网格因子函数  $c_i = F(i) (i = 1, 2, 3 \dots N)$  的形式不同, 网格网络的特性就会不同; 只要把握住网格反射波以及网格因子函数的变化规律, 就可以综合出各

种各样的网格网络特性.

方波导的  $H_{10}$  模网络反射波与 TEM 波有类似的形式(见式(5a)和(5b)),因此前面的讨论也适用于近似分析方波导的网格网络.

### 4 综合与实现

从上一部分的分析可以看出,尽管网格网络的分析有别于传统的微波网络,但却与传统网络有类似的特性;同样,网格网络的综合也有别于传统的综合方法,而上一部分的分析实际上已经为网格网络的综合提供了思路.对网格因子线性变化的网格网络,其综合过程可以具体归纳为下列几个步骤:

- (1) 在网格尺寸和单元长度  $l$  已知的情况下,可由式(14)(15)确定通带频率范围;反之亦然.
- (2) 由通带截止频率以及单元长度,按式(14)确定通带网络的节数;
- (3) 已知  $l$  和  $N$ ,从式(15)和(9)可以确定匹配频带

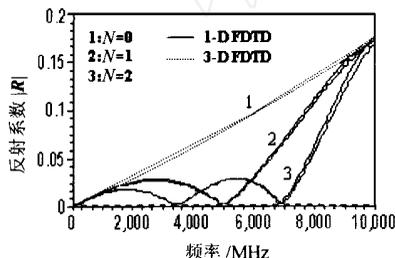


图 6 微带结构阻抗匹配网格网络反射系数

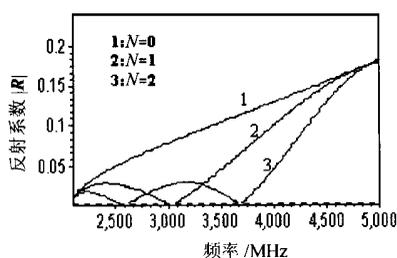


图 7 波导结构阻抗匹配网格网络反射系数

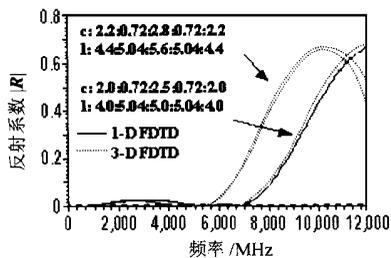


图 8 微带结构网格低通网络反射系数

图 8、图 9 分别绘出了在三维微带结构和方波导中实现的网格网络低通滤波特性,其中  $c_0 = c_l = 1.0$ .图 8 还给出了一维 FDTD 的仿真值,与三维模拟值十分吻合.图 8 和图 9 实现的网络的网格因子变化规律也是相同的,可以看出,它们的曲线形状即特性也很类似.

需要说明的是,图 6 和图 8 中微带介质基片的介电常数  $\epsilon_r = 2.2$ .图 7 和图 9 中方波导的尺寸为  $a = 7.214\text{cm}$ ,  $b = 3.404\text{cm}$ ;  $\epsilon_0 = 0.3404\text{cm}$ ;  $\epsilon_x = 0.3607\text{cm}$ .

本文 FDTD 计算的激励源对一维 TEM 波和三维微带结构采用的是高斯脉冲,波导结构采用调制高斯脉冲,以使激励源频谱位于波导低次模 ( $H_{10}$  模) 的工作范围.需要特别指出的是,FD TD 仿真时要有良好的吸收和激励,因为网格网络的总反射在通带内很小,所以在时域来自负载和源端的微小反射,变换到频域时都会掩盖网格网络的特性.

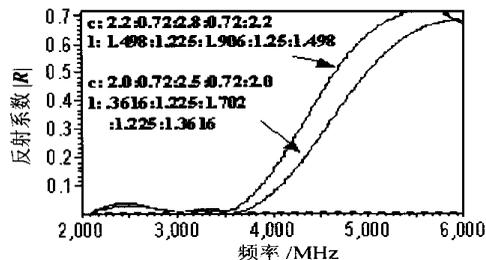


图 9 波导结构网格低通网络反射系数

内的最大起伏的模值;

(4) 由网格因子变化函数,确定各节网格因子(用于 FDTD 计算).

(5) 由各节网格因子,按照式(1),(2)确定各节网格波阻抗(用于理论计算).

需要说明的是,在 FDTD 仿真计算中,由于受各段必须是整网格数的限制,当网格因子变化时要保持各段的长度相等具有一定的困难;因此在实际实现时,不少情况下网络中每一级的电长度只能近似相等.但只要把握反射波和网格因子的变化规律,同样可以进行分析.

图 6、图 7 绘出的是在三维微带结构和方波导中 FDTD 实现的网格网络阻抗变换特性.输入输出的网格因子比为 3.0,网格因子均匀分布.图中还同时给出了理论计算值.可以看出,图中所显示的特性与前面的分析是相符的,且 FDTD 仿真值和理论值也是吻合的.由于两图的网格因子变化规律相同,因而实现的特性也类似.

建立了网格网络分析和综合概念后,通过适当的网格网络综合可减小网格反射波的影响,而网格反射波的大小又可以用网格网络分析的概念进行定量评测.前面的论述可以很容易的用于实际问题的解决,如何应用可针对不同对象采取不同措施.例如分析一些微细结构通常要用到非均匀网格(如渐变网格,即网格匹配网络),也有一些结构对网格尺寸变化敏感;如果网格尺寸变化过大,网格的反射波就会较大,从而影响计算精度.用前述的方法可定量计算网格反射波的大小,也可通过适当选择的网格因子,构建网格网络内插其间,以减小反射波,提高计算精度.

### 5 结论

基于微波网络理论以及网格波阻抗的概念,本文从研究非均匀网格的波阻抗出发,发现并总结了非均匀网格反射波的特点,提出了网格网络的概念,并对其网络特性进行了全面的分析;依据分析的结果,提出了网格网络分析与综合的方法.按照该方法,在一维以及三维微带结构和方波导中用 FDTD 实现了相应的网络特性;FDTD 仿真与理论计算结果是一致的.

本文的分析可以用于定量评估非均匀网格的反射波,给出非均匀网格尺寸选择的依据;在应用非均匀网格的场合,利用网络分析与综合的概念和方法,通过适当的网络综合,从而减小网格反射波给计算带来的误差;同时,利用非均匀网格的

反射波,实现网格反射波的匹配.该方法一个显著的优点是不用对 FDTD 程序做任何改动,不会增加计算的存储量.另外网格网络的提出还有可能为新型吸收边界的导出提供思路 and 理论依据.

#### 参考文献:

- [ 1 ] Yee ,K S. Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell 's equation in isotropic media [J]. IEEE Trans , 1966 ,AP-14 (5) :302 - 307.
- [ 2 ] Gao ,B Q. Mesh wave impedance concept in FDTD technique [J]. Electronics Lett ,1997 ,33 :1610 - 1611.
- [ 3 ] Gao ,B Q ,Gandhi ,O P. An expanding-grid algorithm for the finite difference time domain method [J]. IEEE Trans ,1992 ,EMC-34 (8) :277 - 283.
- [ 4 ] Zivanovics S S ,Yee ,K S ,Mei ,K K. A sub-gridding method for the time-domain finite difference method to solve Maxwell 's equations [J]. IEEE Trans ,1991 ,MTT-39 (3) :417 - 479.
- [ 5 ] Navarro ,E A ,Sangary ,N T ,Litva ,J. Some considerations on the accuracy of the non-uniform FDTD method and its application to waveguide analysis when combine with the perfectly matched layer technique [J]. IEEE Trans ,1996 ,MTT-44 (7) :1115 - 1124.
- [ 6 ] Ghose ,R N. Microwave Circuit Theory and Analysis [M]. McGraw-Hill Book Company ,Inc ,1963.
- [ 7 ] 高本庆. 时域有限差分法 [M]. 国防工业出版社 ,1995 ,3.
- [ 8 ] 梁联倬. 微波网络 [M]. 电子工业出版社 ,1990 ,3.

#### 作者简介:



张 琰 女. 1971 年生于陕西西安,1992 年毕业于西安电子科技大学电磁场工程系,随后在兵器工业 206 研究所从事雷达接收机设计工作,1996 年进入北京理工大学电子工程系,现为硕博连读生,从事计算电磁学及微波技术方面的有关研究.

高本庆 男. 1936 年生于安徽省舒城县,北京理工大学教授,博士生导师,中国电子学会会士,IEEE 高级会员. 近期科研工作涉及毫米波技术、计算电磁学、电磁兼容与生物电磁学.