

# Turbo 码 MAP 译码算法中量化问题的研究

孙 蓉<sup>1</sup>, 陈 军<sup>2</sup>, 邓 浩<sup>1</sup>, 王新梅<sup>1</sup>

(1. 西安电子科技大学, 综合业务网国家重点实验室, 陕西西安 710071; 2 清华大学电子工程系, 北京 100084)

**摘 要:** 针对 Turbo 码 MAP(Max a Probability) 译码算法的特点, 对其量化方式进行了分析、讨论与仿真; 着重讨论了量化范围、量化级数、均匀和非均匀量化等因素对译码器接收比特、前后向递推度量、附加信息和输出似然值的影响; 分析了相应的译码性能; 得出了较为合理的量化方法。

**关键词:** Turbo 码; MAP 算法; 量化; 非均匀量化

**中图分类号:** TN911.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2001)10-1356-04

## Study on Some Quantification Issues for Decoding of Turbo Codes with MAP Algorithm

SUN Rong<sup>1</sup>, CHEN Jun<sup>2</sup>, DENG Hao<sup>1</sup>, WANG Xinmei<sup>1</sup>

(1. National Key Lab. of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an, Shanxi 710071, China;

2 Dept. of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The quantification pattern for the MAP decoding algorithm of Turbo codes is studied. The effect of the bound, level and other parameters for quantification are discussed. The good performance of nonuniform quantification is claimed and a reasonable quantificational method is obtained.

**Key words:** Turbo codes; MAP algorithm; quantification; nonuniform quantification

## 1 引言

自从 1993 年在 ICC 国际会议上 C. Berrou 等提出 Turbo codes 以来<sup>[1,2]</sup>, 有关 Turbo 码设计及其性能的研究, 已成为国际信息与编码理论界研究的一个热点。同时, 有关 Turbo 码在各种通信系统中的应用与实现方法也引起了人们极大的兴趣。Turbo 码在低信噪比下所表现出的近 Shannon 限的性能<sup>[1]</sup>, 使得它在深空通信、移动通信(低信噪比要求相应增加 CDMA 用户容量)等系统中有广阔的应用前景。值得一提的是, Turbo 码已成为 CDMA2000 标准的信道编码方案。

随着 Turbo 码的广泛应用, 在硬件实施上, 与硬件译码的相关问题还亟待解决。其中, 信号的量化(包括接收比特量化和译码器内部数值量化)涉及到译码器的性能, 是需要特别关注的问题。Patrick Robertson 在文[3]提出了量化问题, 对量化比特数作了大致的说明。本文主要对 Turbo 码译码采用 MAP 译码算法的量化性能进行了讨论与分析, 根据对象的不同特点采用了不同的量化方法和量化精度进行了假设和仿真。提出了中间变量采用非均匀量化的方法来提高量化性能; 分析了量化方法、量化取值范围、量化等级划分等因素对译码性能的影响。

## 2 MAP 译码算法简介

作为并行级联卷积码(PCCC), Turbo 码在编码中采用了递归系统码(RSC)作为分量码, 采用了随机交织器来减小相邻比特位之间的相关性<sup>[1,2]</sup>。在译码过程中, Turbo 码则吸取了电子线路中负迭代反馈的思想<sup>[4]</sup>, 采用了软输出迭代译码算法。

令  $k$  时刻编码器处于状态  $S_k$ , 其取值范围为  $0 \sim 2^M - 1$ ,  $M$  为编码器寄存器个数。译码比特  $u_k$  与  $k-1$  时刻至  $k$  时刻的转移相关。MAP 算法可以为每一译码比特提供对数似然比输出  $L(u_k)$ 。其定义为(详见文[1, 2, 5]):

$$L(u_k) = \ln \frac{P(u_k = 1 | y_1^N)}{P(u_k = 0 | y_1^N)} \quad (1)$$

利用 BCJR 算法<sup>[6]</sup>, 上式可写为:

$$L(u_k) = \ln \frac{\sum_{s'} \tilde{\alpha}_{k-1}(s') \cdot \gamma_k(s', s) \cdot \beta_k(s)}{\sum_{s'} \tilde{\alpha}_{k-1}(s') \cdot \gamma_k(s', s) \cdot \beta_k(s)} \quad (2)$$

式中:  $\gamma_k(s', s) \equiv p(S_k = s, y_k | S_{k-1} = s')$  为  $s'$  和  $s$  之间的分支转移概率;  $\tilde{\alpha}_k(s)$  为归一化的前向递推;  $\beta_k(s)$  为归一化的后向递推。它们可表示为

$$\tilde{\alpha}_k(s) \equiv \alpha_k(s) / p(y_k^s)$$

$$= \sum_s \tilde{\alpha}_{k-1}(s') \cdot Y_k(s', s) \setminus \sum_s \sum_{s'} \tilde{\alpha}_{k-1}(s') \cdot Y_k(s', s) \quad (3)$$

递推初始条件:  $\tilde{\alpha}_0(0) = 1, \tilde{\alpha}_0(s \neq 0) = 0$ ;

$$\tilde{\beta}_{k-1}(s') = \sum_s \tilde{\beta}_k(s) \cdot Y_k(s', s) \setminus \sum_s \sum_{s'} \tilde{\alpha}_{k-1}(s') \cdot Y_k(s', s) \quad (4)$$

递推初始条件:  $\tilde{\beta}_N(0) = 1, \tilde{\beta}_N(s \neq 0) = 0$ .

在 Turbo 码的迭代反馈译码算法中, 译码器进行译码判决所需的 LAPP (Log a Posteriori Probability) 值可由下式获得:

$$L(u_k) = L_c y_k^s + L_{21}^e(u_k) + L_{12}^e(u_k) \quad (5)$$

式中:  $L_{21}^e(u_k)$  为 Decoder2 传送给 Decoder1 的外信息;  $L_{12}^e$  为 D1 传送给 D2 的外信息.

### 3 MAP 算法的量化性能及其分析

在采用硬件实现 Turbo 码迭代反馈 MAP 译码算法时, 有必要对以下数值进行量化处理<sup>[3]</sup>:  $\tilde{\alpha}_k(s)$ 、 $\tilde{\beta}_k(s)$ 、 $L(u_k)$ 、 $L^e(u_k)$  和接收比特序列  $Y$ . 然后进行存储和计算. 根据以上 MAP 译码算法, 对 1/3 码率的 8 状态 Turbo 码在 AWGN 信道传输的译码性能进行了量化仿真与分析. 仿真所用的交织器为 384 比特的 3GPP 交织器, 两个分量码相同, 生成多项式均为  $G = (13, 15)_8$ .

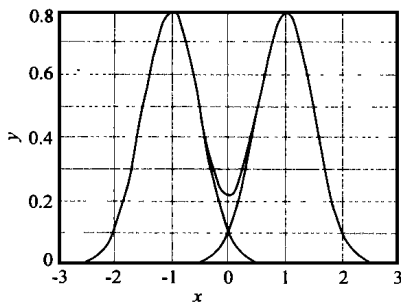


图 1 接收比特序列概率分布图(信噪比 SNR=2)

#### 3.1 接收比特量化

对于接收比特, 其量化特性主要由量化范围与量化级大小决定. 信号经过编码与 BPSK 调制后, 经过 AWGN 信道, 到达译码器. 信号经过 BPSK 调制后为  $x_k$ , 其分布取值  $-1, +1$ . 我们可以看作信号呈等概二项分布, 即  $p(x_k = +1) = p(x_k = -1) = 0.5$ . 噪声  $n_k$  的分布为  $N(0, \sigma)$ , 译码器接收比特为  $y_k = x_k + n_k$ , 其概率分布如图 1 所示. 易知,  $y_k$  的分布与噪声  $n_k$  的方差有关(可与 SNR 呈映射关系). 因此在量化中可以采用正态分布的“ $3\sigma$  原则”, 根据信噪比 (SNR) 来确定接收比特的量化范围, 从而达到提高量化精度的目的. 在具体的量化过程中采用均匀量化方式, 在变量化范围和定量化范围的条件下对不同的量化级进行了仿真. 图 2、图 3 显示了对接收比特量化后 Turbo 码译码的结果. 从仿真结果, 可以看出:

(1) 量化级的影响: 当量化级比特数大于 4 (16 级) 时, 在量化范围取值合适 ( $-5 \sim +5$ ) 的情况下, 量化级数的影响逐渐减小, 甚至可以忽略.

(2) 量化范围随信噪比变化的仿真结果与量化范围取值合适 ( $-5 \sim +5$ ) 的仿真结果差别不大.

(3) 合理的接收比特量化对译码特性有影响, 但影响不大.

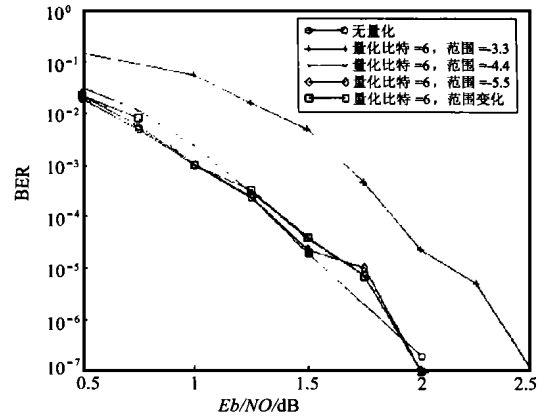


图 2 接收比特序列量化对 Turbo 码译码性能的影响① (量化范围/量化比特一定: 6)

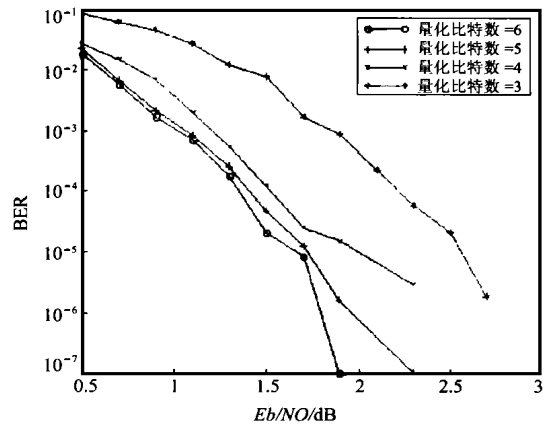


图 3 接收比特序列量化对 Turbo 码译码性能的影响② (量化比特/量化范围一定:  $-6 \sim +6$ )

尽管量化会引入量化误差, 导致译码性能有一定的损失. 但是当信噪比较大时, 接收比特受到的噪声干扰非常弱, 此时译码器仍可正确地译出码字, 接收比特量化对译码性能影响不大. 虽然采用可变量化范围可以提高量化精度, 但不能大大改善译码性能. 实际上, 可变量化范围与固定量化范围(相对较宽的量化范围)在译码性能上几乎等效, 但是译码过程更加复杂.

#### 3.2 $\tilde{\alpha}_k(s)$ 、 $\tilde{\beta}_k(s)$ 的量化

$\tilde{\alpha}_k(s)$ 、 $\tilde{\beta}_k(s)$  分别是归一化的前向递推状态度量 and 后向递推状态度量, 其计算方法见式 (3)、(4). 由式 (3) 可以看出  $\tilde{\alpha}_k(s)$  的取值范围处于 0 到 1 之间, 且其分布为非均匀分布 (大多数值接近  $1/2^M$ ). 对于此, 可以这样解释:  $\alpha_k(s) \equiv p(S_k = s, y_k^k | I^S)$ , 当信噪比较大时, 在  $k$  时刻, 一定对应着一个状态, 使得上述联合概率值最大 (接近于 1), 而其他状态的上述概率取值很小, 故经归一化处理后,  $\tilde{\alpha}_k(s)$  除了一取值相对很大外, 其他值都极小; 当信噪比较小时, 在  $k$  时刻, 几乎以同样的联合概率处于每一状态, 所以, 经归一化后, 大多数  $\tilde{\alpha}_k(s)$  值处于  $1/2^M$  附近. 因此, 在考虑对其量化方式上, 应当考

虑非均匀量化, 从而使得在相同的量化级别上, 量化结果最佳. 采用非均匀量化, 使得量化间隔的大小随信号取值的大小而改变, 后者小, 则前者小, 反之, 后者大, 则前者大. 从而量化噪声对大、小信号的影响大致相同, 改善了小信号时的量化信噪比. 故对于  $\tilde{\alpha}_k(s)$  的量化, 采用量化范围为 0 至 1 的非均匀量化, 具有较好的性能. 尽管  $\beta_k(s)$  的归一化方式(见式(4))并不能保证所有的值都处于 0 到 1 之间, 但由于未归一的  $\alpha_k(s)$ 、 $\beta_k(s)$  均表示的是状态度量, 它们的分布特性相似, 故落于 (0, 1) 区域外的  $\beta_k(s)$  为极少数, 且大多数的取值很小, 也可以考虑采用量化范围为 0 至 1 的非均匀量化. 模拟统计结果也表明,  $\beta_k(s)$  的大多数值都处于 0 到 1 之间, 且取小信号的概率很大(见图 4). 图 5 显示了在接收比特量化(量化比特数 = 6; 量化范围 = -5~+5)的条件下, 在 Turbo 码译码中对  $\tilde{\alpha}_k(s)$ 、 $\beta_k(s)$  采用不同量化手段的译码性能结果. 它说明:

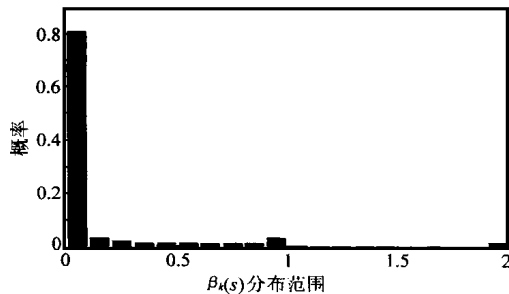


图 4  $\beta_k(s)$  的统计分析图 码率 = 1/3 6 次迭代, SNR = 1.0 dB

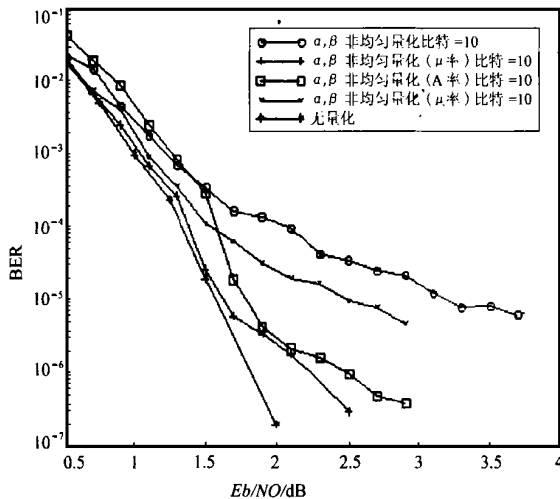


图 5  $\tilde{\alpha}_k(s)$ 、 $\beta_k(s)$  的量化对 Turbo 码译码性能的影响

- (1)  $\tilde{\alpha}_k(s)$ 、 $\beta_k(s)$  的量化范围应取 0~1;
- (2) 非均匀量化要大大地优于均匀量化(当量化比特数都取 10, 误码率为  $10^{-5}$ ,  $\mu$  率非均匀量化优于均匀量化 1.5 dB);
- (3) 非均匀量化方式(A 率、 $\mu$  率)及其参数的选择对译码性能有一定的影响;
- (4)  $\tilde{\alpha}_k(s)$ 、 $\beta_k(s)$  的量化加重 Turbo 码译码的“错误平台(error floor)”效应. 但非均匀量化时的影响较小.

在对中间变量  $\tilde{\alpha}_k(s)$ 、 $\beta_k(s)$  的量化中, 采用了非均匀量化的方法来提高译码性能. 对于非均匀量化方法的选择, 我们做

了若干尝试. 主要针对非均匀量化参数的选择及非均匀量化方法进行了比较, 见图 6. 在图中, 主要针对  $\mu$  率非均匀量化的取值大小对译码性能影响进行了比较, 同时也采用了折线法(根据信号统计特性, 划分不同的数值段, 每一段采用均匀量化方式, 但段与段之间存在量化精度的差异)比较了彼此性能. 它表明, 非均匀量化具体方法的选择和量化参数的选择对译码性能的影响存在差异, 选择最佳的量化方法和量化参数对于译码性能, 特别是在高信噪比的条件下的译码性能显得十分重要.

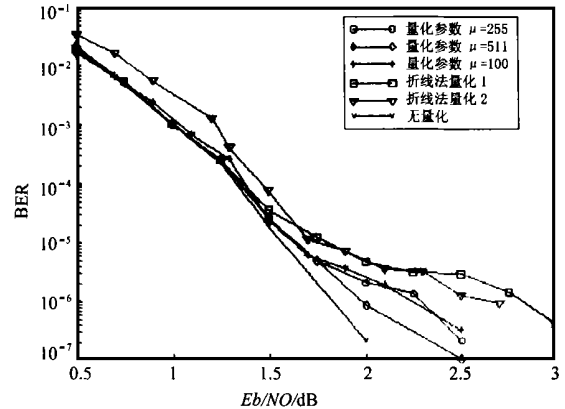


图 6 非均匀量化方法与参数对译码性能的影响

### 3.3 LAPP 值 $L(u_k)$ 与译码器间传送外信息 $L^e(u_k)$ 的量化

对于  $L(u_k)$  与  $L^e(u_k)$ , 经过大量的抽样观察, 发现这两个值的分布范围很广.  $L^e(u_k)$  的作用是在译码中通过迭代反馈对 LAPP 值  $L(u_k)$  进行修正, 在 MAP 算法中,  $L^e(u_k)$  可以直接计算出来. 而在译码时, 译码器是根据 LAPP 值  $L(u_k)$  的符号来决定传输的比特是取 +1 还是 -1 (BPSK 调制). 由此可得  $L(u_k)$  的量化并不需要很高的精度.  $L(u_k)$  的计算方法见式(5), 因此  $L^e(u_k)$  的量化精度要求也不是很苛刻. 对于这两个值, 可以考虑在一个相对较大的范围(如 -10 到 +10)内进行均匀量化.

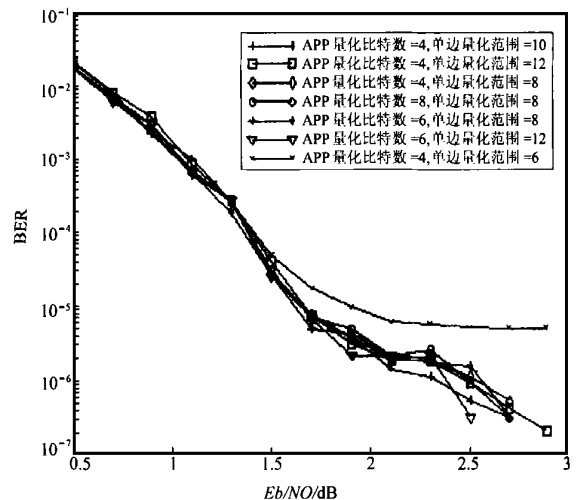


图 7 LAPP 值与外信息值的量化对 Turbo 码译码性能的影响

图 7 显示了在完成前两种量化条件下, 对  $L^e(u_k)$  和  $L(u_k)$  量化的 Turbo 码的 MAP 译码性能。它表明, 对于 LAPP 值  $L(u_k)$  和外信息值  $L^e(u_k)$  的量化应该在一个较大的量化范围内来完成; 当量化范围取值合理(处于一个相对较大的范围)时, 不同量化精度(由量化比特数取值和量化范围决定)对 MAP 译码性能的影响大致相同; 同时, 根据图 6 与图 7 的比较, 可得,  $L^e(u_k)$  与  $L(u_k)$  的量化进一步使得 MAP 译码算法性能较无量化处理时的性能恶化, 但不是特别严重。

### 3.4 运算量的说明

毫无疑问, 量化在译码中的引入, 会增大译码算法的运算量。这主要体现在模拟信号转化为已知的几个离散数值的过程中。在计算机模拟仿真中, 量化的运算主要是通过查表取值来完成; 在硬件实现上, 则是通过非线性转换电路(均匀量化不需要)和量化器来实现。可以看出, 量化所引入的运算是较易实现的, 而且运算级别与运算量不大。

## 4 结论

在 Turbo 码译码的硬件实施中, 量化是其必须考虑的因素。如何用最小的存储空间来达到最佳的译码性能, 是量化所必须考虑的问题。本文针对 MAP 译码过程中所需量化的分量进行了量化分析、讨论, 分析了信噪比大小对于接收比特序列量化特性的影响; 分析了量化中量化范围与量化级数对译码特性的影响; 提出了对于前向递推状态度量而后向递推状态度量采用非均匀量化方式在较小的量化级的条件下来提高译码性能。仿真结果表明, 量化后, Turbo 码的译码特性有所下降, 但合适的量化方式, 尤其是适当地采用非均匀量化, 可以相对降低量化的影响。对于 Turbo 码的其他译码算法(Log MAP, Max-Log MAP, SOVA 等), 量化的性能分析还在研究之中。但我们认为也有大致相同的结果。

### 参考文献:

- [1] C Berrou, A Glavieux, P Thitimajshima. Near Shannon limit error correcting coding and decoding: Turbo codes [A]. In Proc. ICC '93 [C], May 1993: 1064-1070.
- [2] C Berrou, A Glavieux. Near optimum error correcting coding and decoding: turbo codes [J]. IEEE Trans. on Comm, Oct. 1996, 44(10): 1261-1271.
- [3] Patrick Robertson, Emmanuelle Villebrun, Peter Hoeher. A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in the log domain [A]. Proc. 1995 Int. Conf. on Comm [C]: 1009-1013.
- [4] Claude Berrou, Alain Glavieux. Reflections on the Prize Paper: "Near optimum error correcting coding and decoding: turbo codes" [J]. IEEE information theory society newsletter, June 1998, 48(2).
- [5] William E Ryan. A turbo code tutorial [DB], unpublished. Available at <http://www.ece.arizona.edu/~ryan>.

- [6] L R Bahl, J Cocke, F Jelinek, J Raviv. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, Mar. 1974, IT-20: 248-287.

### 附录: 非均匀量化的实现方法

非均匀量化的实现方法通常是将抽样值通过压缩再进行均匀量化。所谓压缩是用一个非线性变换电路将输入变量  $x$  变换成另一变量  $y$ , 即  $y = f(x)$ 。非均匀量化就是对压缩后的变量  $y$  进行均匀量化。接收端采用一个传输特性为  $x = f^{-1}(y)$  的扩张器来恢复  $x$ 。通常使用的压缩器中, 大多采用对数式压缩, 即  $y = \ln x$ 。广泛采用的两种对数压缩律是  $\mu$  压缩律和  $A$  压缩律。

#### (1) $\mu$ 压缩律

所谓  $\mu$  压缩律就是压缩器的压缩特性具有如式所示关系的压缩律:  $y = \frac{\ln(1 + \frac{\mu x}{A})}{\ln(1 + \frac{\mu}{A})}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ 。式中,  $y$  表示归一化的压缩器输出电压,  $x$  表示归一化的压缩器输入电压,  $\mu$  为压扩参数, 通常取 100。

#### (2) $A$ 压缩律

所谓  $A$  压缩律, 如式所示:  $y = \frac{Ax}{1 + \ln A}$ ,  $0 < x \leq \frac{1}{A}$ ;  $y = \frac{1 + \ln Ax}{1 + \ln A}$ ,  $\frac{1}{A} \leq x \leq 1$ 。式中,  $y$  表示归一化的压缩器输出电压,  $x$  表示归一化的压缩器输入电压,  $A$  为压扩参数, 通常取 87.6。

### 作者简介:



孙 蓉 女, 1976 年出生, 硕士研究生, 1998 年毕业于西安电子科技大学通信工程学院通信工程专业, 获学士学位; 同年进入西安电子科技大学通信工程学院通信与电子系统专业攻读硕士学位。主要研究方向为移动通信中的关键技术, 信息论, 信道编码。

陈 军 2000 年于西安电子科技大学获博士学位, 现为清华大学博士后。主要研究方向为编码与调制, 数字通信等。

邓 浩 硕士研究生。主要研究方向为移动通信中的关键技术, 信息论, 信道编码。

王新梅 西安电子科技大学教授, 博士生导师, 中国电子学会和中国通信学会会士。长期从事信息论、编码和密码学的教学和科研工作。