

基于粒子群优化算法的 Logistic 模型参数估计

徐 星, 李元香, 吴 昱, 金 彤

(武汉大学软件工程国家重点实验室, 湖北武汉 430072)

摘 要: 将 Logistic 模型的参数估计问题转化为一个多维无约束函数优化问题, 然后利用粒子群优化算法 (PSO) 的全局搜索能力对此问题求解. 仿真实验中所使用的数据包括真实数据和随机采样数据. 实验结果表明, 在这两种数据条件下 PSO 算法均能够较准确地估计获得 Logistic 模型的参数, 证实了 PSO 算法是 Logistic 模型参数估计的一种可靠有效的算法. 同时也分析了参数维数和噪声对 PSO 算法的收敛性和稳定性的影响.

关键词: 参数估计; 粒子群优化; Logistic 模型; S 生长曲线

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 2A-055-05

Parameter Estimation for Logistic Model by Particle Swarm Optimization Algorithm

XU Xing, LI Yuan-xiang, WU Yu, JIN Tong

(State Key Laboratory of Software Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: The parameter estimation for Logistic model was formulated as a multi-dimensional unconstrained function optimization problem, and then particle swarm optimization (PSO) algorithm was adopted to solve this problem for its global searching ability. Experimental data includes real-life observation series, randomly sampling data. Experimental results show that PSO algorithm can both obtain quite accurate parameter estimation of Logistic model, and PSO is a reliable and effective method in parameter estimation for Logistic model. Furthermore, the effect of parameter dimension and noise on the stability and convergence of PSO algorithm was analyzed as well.

Key words: parameter estimation; particle swarm optimization; logistic model; S growth curve

1 引言

凡是要进行实验数据处理和推断的场合, 几乎都要涉及到系统辨识技术和回归分析方法. 参数估计是系统辨识和回归分析中非常关键的环节. 其中线性模型的参数估计日臻完善. 然而在航空航天、生物医学、环境生态和社会经济等诸多领域中, 非线性模型居多. 由于非线性模型一般都比较复杂, 且不易获得其参数估计. 为此, Nash 和 Walker-Smith 在其专著^[1]中讨论了非线性参数估计的一些算法, 如直接搜索法、Hooke-Jeeves 法、Neld-Mead 法、梯度法和变尺度法. 这些算法通常只对某一类特定问题才有效, 而且对模型的限制条件较强, 如要求模型具有连续、可导、单峰等特性. 在非线性优化中, Gauss-Newton 法也较为常用, 该方法同样对模型的限制性条件太强 (光滑性要求), 而且计算公式复杂, 算法的准备工作量较大, 有时不收敛或者只收敛到局部极小

解^[2].

正因为如此, 暂时还没有对所有非线性模型都适用的参数估计方法. 但是, 如果能找到一种不依赖于非线性模型的表达方式的参数估计方法, 那么, 也就找到了对一般非线性系统进行参数估计的方法^[3].

粒子群优化算法^[4] (Particle Swarm Optimization, 简称 PSO) 是由 Eberhart 和 Kennedy 于 1995 年提出的一种基于群智能的全局优化演化算法, 其直观背景来源于动物行为学和社会心理学, 是对简单生物社会系统的模拟. PSO 算法的搜索过程与模型的具体表达方式无关, 这就决定了 PSO 算法可适用于一般非线性系统模型的参数估计. 事实也正是如此, PSO 算法被广泛地应用到非线性模型参数估计当中并取得了很好的实验效果, 比如, 混沌系统^[5]、自催化模型 (autocatalytic model)^[6]、动力学模型 (kinetics model)^[7]、几何绕射 (GTD) 模型^[8]等. 不论是在自然科学领域还是在社会科学领域中, Logistic

模型有着非常广泛的用途.对于不同领域的应用,Logistic 模型的参数获取至关重要,那么参数估计方法更是研究人员关注的焦点.同时为了拓展 PSO 算法的应用范围以及验证 PSO 算法的有效性和可行性,本文把 PSO 算法应用于 Logistic 模型的参数估计.

2 Logistic 模型

Logistic 模型从 Marthus 模型基础上发展而来.起初,Verhulst 为预测和控制人口于 1838 年建立了 Logistic 模型,但长期被湮没.直到 1920 年由美国生物学家和人口统计学家 Pearl 和 Reed 重新发现,并利用该模型描述了美国人口动态和世界人口增长趋势.而后 Logistic 模型被广泛应用于生物生长和产业成长等过程的描述.随着研究的不断深入,Logistic 模型在生物、农业、工程以及经济等领域的模拟研究中具有着十分重要的地位^[9].

Logistic 模型也被称为 S 形生长曲线模型.它之所以被称之为 S 形生长曲线模型,其原因在于该模型曲线从某个固定点出发,其斜率单调在增加,达到一个拐点;在这之后,斜率单调下降,渐渐地趋于某个固定的值,如图 1 所示.

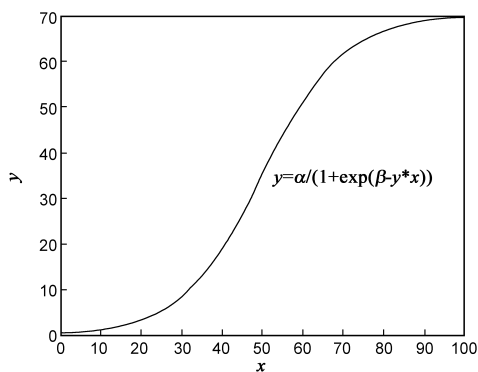


图1 Logistic模型曲线图

3 粒子群优化算法

在标准 PSO 算法中,每个优化问题的解被看成是搜索空间的一个“粒子”,算法初始化为一群随机粒子(随机解),然后通过迭代找到最优解.在每一次的迭代中,粒子通过跟踪两个“极值”来更新自己.在找到这两个最优值后,粒子通过下面的公式来更新自己的速度和位置.

$$v_{id}^{t+1} = \omega v_{id}^t + R_1 c_1 (P_{id} - x_{id}^t) + R_2 c_2 (p_{gd} - x_{id}^t) \quad (1)$$

$$x_{id}^{t+1} = x_{id}^t + v_{id}^{t+1} \quad (2)$$

在式(1)、(2)中, $i = 1, 2, \dots, M$, M 是该群体中粒子的总数. v_{id}^t 是粒子 i 第 t 次迭代后的速度矢量的第 d 维分量; x_{id}^t 是粒子 i 第 t 次迭代后的位置矢量的第 d 维分量; P_{id} 是粒子 i 最好位置的第 d 维分量; p_{gd} 是种群当前最好位置的第 d 维分量; R_1 和 R_2 是服从 $U(0,1)$ 分布

的随机数; c_1 和 c_2 是学习因子,通常取 $c_1 = c_2 = 2$; ω 是惯性因子.

在每一维,粒子都有一个最大限制速度 V_{\max} ,如果某一维的速度超过设定的 V_{\max} ,那么这一维的速度就被限定为 V_{\max} .从社会学的角度来看,式(1)的第一部分称为记忆项,表示过去的速度对现在的影响;式(1)第二部分称为自身认知项,是从当前点指向粒子自身最好点的矢量,表示粒子的动作来源于自己经验的部分;式(1)的第三部分称为群体认知项,是从当前点指向种群最好点的矢量,反映了粒子间的协同合作和知识共享.粒子就是通过自己的经验和同伴中最好的经验来决定下一步的运动.

目前, ω 的取值方式采用较多的是线性递减权值(linearly decreasing weight, LDW)策略,如式 3 所示. LDW 策略使 PSO 算法性能有了很大的提高.可以通过改变 ω 的取值来调整算法的全局和局部搜索能力. ω 较大时,具有较强的全局搜索能力; ω 较小时,具有较强的局部搜索能力.

$$\omega = \omega_s - \frac{t}{t_s} (\omega_s - \omega_e) \quad (3)$$

其中, t_s 为最大运行代数, ω_s 为初始惯性权值, ω_e 为算法结束时惯性权值.

4 实验仿真与结果分析

我们利用粒子群优化算法求解 Logistic 模型在最小二乘意义(下文中用 J 来表示)下的参数估计.为了验证 PSO 算法的有效性,这一节利用真实数据、随机采样数据和具有高斯噪声的采样数据这三类数据进行验证.在所有的实验中,PSO 算法在所有的实验中都运行 20 次,所有实验均在一台 Pentium4 2.0G CPU/1G 内存的计算机上进行.

4.1 真实数据

本节所使用的真实数据是由文献[10]提供的牧草产量的真实观测数据,如表 1 所示.对表 1 中的数据集采用 PSO 算法进行参数估计,其结果与文献[2]的结果一并列于表 2 中.表 3 中所列出的是 PSO 算法所得到的 α, β, γ 及 J 的标准差.

表1 牧草产量的真实观测数据

序号	生长时间	牧草产量
1	9	8.93
2	14	10.80
3	21	18.59
4	28	22.33
5	42	39.35
6	57	56.11
7	63	61.73
8	70	64.62
9	79	67.08

表 2 两种算法结果的比较		
数据项	文献[2]	PSO
α	72.46200562	72.46224
β	2.61800981	2.618077
γ	0.06735793	0.0673592
J	1.34275134	1.342754

表 3 标准差	
数据项	PSO
α	1.135870e-07
β	5.288046e-09
γ	2.477338e-10
J	7.558448e-15

PSO 算法的若干参数设置如下:参数 ω 采用线性递减策略从 0.9 递减到 0.4, α, β, γ 的搜索区间分别为 $[60, 80], [0, 5]$ 和 $[0, 1.0]$, V_{\max} 取每维搜索宽度的一半, 最大迭代次数设置为 1000, 种群大小为 20.

文献[2]获得的实验结果是由演化算法进行 5 次随机计算获得的最好结果, 并且演化算法采用的最大迭代次数是 2000; 而表 2 第三列列出的实验结果是 PSO 算法 20 次运行获得的平均最好结果, 迭代次数也仅 1000 次, 且 α, β, γ 及 J 标准差的数量级均在 $1e-7$ 以下. 通过上述实验可以看出, PSO 算法与演化算法相比, 具有更高的稳定性和更快的收敛性.

4.2 随机采样数据

本节中将根据随机采样的模拟数据对 PSO 算法进行分析. 具体内容为算法对待估计参数维数的敏感程度、算法对数据的敏感程度, 即参数维数和噪声对 PSO 算法的收敛性和稳定性的影响.

4.1.2 无噪声

利用参数组合 $\alpha = 70.0, \beta = 5.0, \gamma = 0.1$ 在采样区间 $[0, 100]$ 内随机采样 100 个样本点生成模拟数据.

本节利用 PSO 算法对模拟数据分别进行 1、2、3 维参数估计, 即在 α, β, γ 3 个参数中, 分别只有 1、2、3 个参数未知, 也就是在进行参数估计时分别固定其中 2、1、0 个参数. PSO 算法的若干参数设置如下: 参数 ω 采用线性递减策略从 0.9 递减到 0.4, α, β, γ 的搜索区间分别为 $[0, 100], [0, 10]$ 和 $[0, 1.0]$, V_{\max} 取每维搜索宽度的一半, 根据参数估计维数的不同, 最大迭代次数分别设置为 200、600 和 1000, 种群大小为 50.

表 4 中所列出的是 PSO 算法所估计得到的参数 α, β, γ 和最小二乘 J 以及各自的标准差, 括号中的数据是

表 4 1、2、3 维参数估计统计结果

维数	α	β	γ	J
1	70.00000 (1.148366e-12)	—	—	5.116466e-23 (1.505153e-22)
	—	5.00000 (0)	—	0 (0)
	—	—	0.100000 (3.134161e-15)	2.255718e-22 (7.860693e-22)
2	70.00000 (0)	5.00000 (0)	—	0 (0)
	70.00000 (0)	—	0.100000 (1.423830e-17)	0 (0)
	—	5.00000 (0)	0.100000 (1.423832e-17)	0 (0)
3	70.00000 (0)	5.00000 (0)	0.100000 (1.423831e-17)	0 (0)

标准差, “—”表示此列的参数已知并被赋予某个固定值. 通过观察表 4 可知, 在低维参数估计时, 参数维数的变化对 PSO 算法的性能没有显著影响, 但是随着维数的增大, 算法的迭代次数必须适当的予以增加.

4.2.2 有噪声

模拟数据的生成取表 5 中的 8 种参数组合. 利用这 8 种组合在采样区间 $[0, 100]$ 内随机采样 100 个 $\{(x_i, y_i) | y_i = \alpha / (1 + \exp(\beta - \gamma x_i)), i = 1, 2, \dots, 100\}$ 样本点生成模拟数据. 然后对 (x_i, y_i) 加入随机噪声, 假设噪声满足高斯分布 $N(0, \delta)$, 其中 δ 分别取 $1e-2, 1e-3$ 和 $1e-4$. δ 取不同值时, PSO 算法的最大迭代次数均设置为 1000, 其余参数的取值与 4.2.1 节一致. 表 6 至表 8 中所列出的是当 δ 取不同值时 PSO 算法所估计得到的参数 α, β, γ 和最小二乘 J 以及各自的标准差, 括号中的数据是标准差. 图 2 至图 5 分别给出了 α, β, γ 和 J 的平均收敛曲线, 其中横坐标为种群迭代次数, 纵坐标依次为当前代最好参数组合 α, β, γ 和最小二乘 J 值.

表 5 生成模拟数据的 8 种参数组合

参数组合	α	β	γ
1	70	4	0.1
2	70	4	0.2
3	70	6	0.1
4	70	6	0.2
5	48	4	0.1
6	48	4	0.2
7	48	6	0.1
8	48	6	0.2

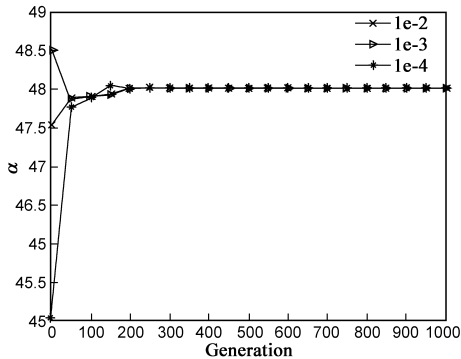


图2 α 的收敛曲线

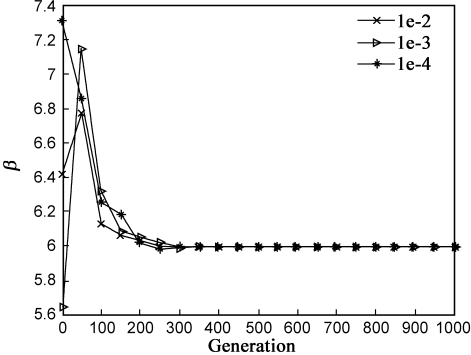
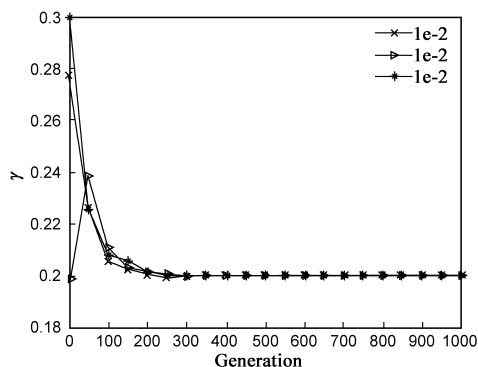
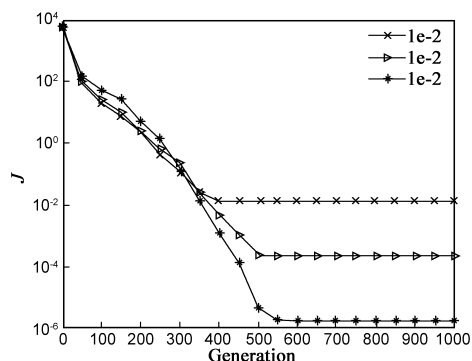


图3 β 的收敛曲线

图4 γ 的收敛曲线图5 J 的收敛曲线表 6 $\delta=1e-2$

参数组合	α	β	γ	J
1	69.99916 (2.57797e-09)	3.999770 (6.35898e-10)	0.09999668 (1.82372e-11)	1.49111e-02 (4.77044e-16)
2	69.99954 (1.24739e-09)	4.001885 (8.99683e-10)	0.2000951 (4.11123e-11)	2.75712e-02 (7.77496e-16)
3	70.00392 (6.04655e-09)	5.999033 (1.25335e-09)	0.09998177 (2.48251e-11)	1.78841e-02 (5.48318e-16)
4	70.00006 (1.90274e-09)	5.998066 (1.22167e-09)	0.1999376 (4.51070e-11)	2.49213e-02 (5.48321e-16)
5	48.00059 (1.48686e-09)	4.00069 (8.02850e-10)	0.1000240 (2.22982e-11)	1.20811e-02 (2.25184e-16)
6	47.99990 (1.21060e-09)	4.001715 (1.04331e-09)	0.2000446 (5.10741e-11)	1.87354e-02 (4.05391e-16)
7	47.99783 (4.77929e-09)	6.000230 (1.95699e-09)	0.1000069 (3.75304e-11)	1.18389e-02 (4.52475e-16)
8	47.99793 (1.18404e-09)	6.001884 (1.60648e-09)	0.2000721 (5.15001e-11)	1.35322e-02 (4.20986e-16)

表 7 $\delta=1e-3$

参数组合	α	β	γ	J
1	69.99979 (7.67193e-10)	3.999998 (2.08837e-10)	0.1000003 (5.58305e-12)	2.08666e-04 (5.10824e-17)
2	70.00009 (3.83753e-10)	3.999913 (4.18470e-10)	0.1999975 (2.22494e-11)	1.55231e-04 (6.68923e-17)
3	6.999984 (1.72284e-09)	6.000178 (5.65296e-10)	0.1000030 (1.04938e-11)	1.66177e-04 (7.30116e-17)
4	70.00014 (5.07667e-10)	5.999802 (4.69011e-10)	0.1999929 (1.53326e-11)	2.06227e-04 (6.38655e-17)
5	48.00014 (4.72191e-10)	4.000053 (1.72585e-10)	0.1000006 (4.67660e-12)	9.94341e-05 (2.32200e-17)
6	48.00025 (2.87622e-10)	3.999932 (3.18319e-10)	0.1999984 (1.45678e-11)	1.37888e-04 (4.01554e-17)
7	47.99970 (1.29759e-09)	6.000102 (4.32102e-10)	0.1000012 (8.57421e-12)	1.10313e-04 (3.74768e-17)
8	48.00006 (3.88385e-10)	5.999919 (7.13055e-10)	0.1999954 (2.41260e-11)	2.21746e-04 (5.13742e-17)

表 8 $\delta=1e-4$

参数组合	α	β	γ	J
1	70.00002 (2.24998e-10)	4.000009 (6.67229e-11)	0.1000002 (1.64259e-12)	1.92974e-06 (7.87956e-18)
2	70.00001 (1.32637e-10)	3.999989 (7.84202e-11)	0.1999997 (3.79759e-12)	3.05438e-06 (7.26587e-18)
3	69.99998 (5.71532e-10)	6.000005 (1.74477e-10)	0.1000001 (3.22215e-12)	2.15879e-06 (6.88784e-18)
4	69.99996 (1.79014e-10)	6.000004 (1.87554e-10)	0.2000003 (6.66069e-12)	2.51351e-06 (9.91088e-18)
5	48.00006 (2.28086e-10)	3.999991 (6.46857e-11)	0.09999964 (1.98440e-12)	1.30832e-06 (2.76383e-18)
6	48.00001 (1.56952e-10)	4.000004 (1.41966e-10)	0.1999995 (7.58342e-12)	1.44865e-06 (3.2835e-18)
7	48.00002 (4.20139e-10)	6.000004 (1.16238e-10)	0.1000001 (2.27071e-12)	1.36655e-06 (3.05133e-18)
8	48.00001 (1.52523e-10)	5.999981 (1.59360e-10)	0.1999995 (5.33354e-12)	1.74259e-06 (4.30519e-18)

从表 6、表 7、表 8 和图 2 至图 5 中所展现的实验结果, 我们可做出如下分析和判断: 若采样误差较小, 噪声对 PSO 算法的性能没有显著影响, 算法获得的参数估计值非常接近真实值, 估计值的误差也可基本控制在 $1e-3$ 数量级以内。

5 结论

本文考虑了 Logistic 模型在最小二乘意义下的参数估计, 并从优化的角度把 Logistic 模型的参数估计转换成一个函数优化问题, 然后利用粒子群优化算法 (PSO) 求解。为了验证 PSO 算法的有效性和健壮性, 实验数据既包含了农业领域的真实观测数据, 又使用了无噪声和有噪声的随机采样数据。实验结果证明了基于 PSO 算法的 Logistic 模型参数估计是可行和有效的, 从而为 Logistic 模型乃至其他 S 生长模型的参数估计问题提供了一种新方法。下一步研究的重点是把 PSO 算法运用到其他生长模型的参数估计问题当中去, 比如 Gompertz 模型、Richards 模型、MMF 模型和 Weibull type 模型。

参考文献:

- [1] Nash J C, Walker-Smith M. Nonlinear Parameter Estimation [M]. New York: Marcel Dekker, 1987. 1 - 32.
- [2] 潘正君, 康立山, 等. 演化计算 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998. 100 - 110.
- [3] 姜波, 汪秉文. 基于遗传算法的非线性系统模型参数估计 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(1): 150 - 152.
- [4] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm — explosion, stability, and convergence in multidimensional complex space [J]. IEEE Transaction on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58 - 73.
- [5] 高飞, 童恒庆. 基于改进粒子群优化算法的混沌系统参数估计方法 [J]. 物理学报, 2006, 55(2): 577 - 582.

Gao Fei, Tong Heng-qing. Parameter estimation for chaotic system based on particle swarm optimization [J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(2): 577 – 582.

[6] Pagano R L, Calado V, et al. Cure kinetic parameter estimation of thermosetting resins with isothermal data by using particle swarm optimization [J]. European Polymer Journal, 2008, 44 (8): 2678 – 2686.

[7] Schwaab M, Biscaia E, et al. Nonlinear parameter estimation through particle swarm optimization [J]. Chemical Engineering Science, 2008, 63(6): 1542 – 1552.

[8] 石志广, 周剑雄, 等. 基于协同粒子群优化的 GTD 模型参数估计方法 [J]. 电子学报, 2007, 35(6): 1102 – 1107.
Shi Zhi-guang, Zhou Jian-xiong, et al. A GTD scattering center model parameter estimation method based on CPSO [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(6): 1102 – 1107.

[9] 余爱华. Logistic 模型的研究 [D]. 南京: 南京林业大学, 2003.

Yu Ai-hua. A Study on Logistic Model [D]. Nanjing: Nanjing Forestry University, 2003.

[10] Ratkowsky D. Nonlinear Regression Modeling: A Unified Practical Approach [M]. New York: Marcel Dekker, 1983. 75 – 85.

作者简介:

徐 星 男, 1984 年 6 月生于湖北武汉, 现为武汉大学软件工程国家重点实验室博士生, 主要研究领域为智能计算与模式识别.
E-mail: whuxx84@yahoo.com.cn

李元香 男, 教授、博士生导师、中国计算机学会会员、高性能计算专业委员会委员、理论计算机科学专业委员会委员. 1993 年毕业于武汉大学计算机科学理论专业, 获工学博士学位. 2000 年 12 月至 2001 年 5 月, 美国北卡罗来纳州立大学计算机科学系访问学者. 主要从事并行计算与演化计算的理论与应用研究.
E-mail: yxli@whu.edu.cn