

# 基于 Bandelets 域逐子块阈值的图像去噪

张文革<sup>1,2</sup>, 刘 芳<sup>1,2</sup>, 焦李成<sup>2,3</sup>, 张向荣<sup>2,3</sup>

(1. 西安电子科技大学计算机学院, 陕西西安 710071; 2. 智能感知与图像理解教育部重点实验室, 陕西西安 710071;

3. 西安电子科技大学智能信息处理研究所, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 把正交 bandelets 域经四叉树分割的每一子块系数建模为广义高斯分布, 基于 Bayesian 框架, 推导出了自适应逐子块局部阈值的计算公式, 找出了其参数分布的最佳范围, 提出了图像 bandelets 域的逐子块阈值去噪算法. 由于充分利用了图像的局部统计信息, 所提算法对自然图像去噪的视觉效果和评价指标都好于 BayesShrink 和其它基于阈值的去噪算法.

**关键词:** 图像处理; 图像去噪; 正交 bandelets; 逐子块阈值; 广义高斯分布; BayesShrink

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 02-0290-05

## Image Denoising Using Subsquarewise Threshold in Bandelets Domain

ZHANG Wen-ge<sup>1,2</sup>, LIU Fang<sup>1,2</sup>, JIAO Li-cheng<sup>2,3</sup>, ZHANG Xiang-rong<sup>2,3</sup>

(1. School of Computer Science and Technology, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;

2. Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education of China, Xidia University,

Xi'an, Shaanxi 710071, China; 3. Institute of Intelligent Information Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** By modeling orthogonal bandelets coefficients in each quad-tree subsquare as Generalized Gaussian Distribution model, a calculation formula for adaptive local subsquarewise threshold is derived under the Bayesian frame, and the best range of the parameter needed to calculate subsquarewise threshold is found out. On these basis, a subsquarewise threshold denoising algorithm for natural images is proposed in bandelets domain. Owing to making full use of local statistic information of the image, the visual effect and evaluation criteria of proposed algorithm for natural image denoising outperform that of BayesShrink and other threshold-based methods.

**Key words:** image processing; image denoising; orthogonal bandelets; subsquarewise threshold; generalized Gaussian distribution; BayesShrink

## 1 引言

图像去噪的目标就是在有效去除噪声的前提下最大限度地保留图像的边缘和细节. 由于小波<sup>[1]</sup>和多尺度几何分析(Multiscale Geometry Analysis, MGA)<sup>[2]</sup>工具具有多尺度和时频局部化特性, 所以对图像去噪非常有效<sup>[3]</sup>. 最近, bandelet<sup>[4]</sup>变换因其具有自适应性和其可选方向数超过其它 MGA 工具而在图像去噪<sup>[5,6]</sup>中表现出潜力.

自从 Donoho 提出了软阈值<sup>[7]</sup>, 基于阈值去噪的思想得到了广泛应用. 由于全局阈值没有利用图像的局部信息, Chang 等人在 Bayesian 框架下假定无噪小波系数服从广义高斯分布 (Generalized Gaussian Distribution, GGD) 模型提出了 BayesShrink<sup>[8]</sup>. 由于它利用了子带系

数的统计信息, 其去噪性能有很大提高, 但其对图像局部信息的利用不是很充分. 由于正交 bandelets 子带被四叉树分割成许多子块, 每个子块最多包含一条边缘, 本文首先通过实验说明每个无噪 bandelets 子块的系数服从 GGD, 然后在 Bayesian 框架下推导出了逐子块的局部阈值. 由于它更充分地利用了图像的局部信息, 所以用 Bandelets 域的逐子块阈值去噪, 取得了优于 BayesShrink 的效果.

## 2 Bandelet 变换

Bandelet 变换的主要优势就是它具有自适应性和较多的可选方向, 且其可选方向数随子块的大小而变化. 比如, 一个  $8 \times 8$  子块有 73 个可选方向, 一个  $16 \times 16$  子块则有 289 个可选方向. 它先对图像进行 2-D 小波

收稿日期: 2008-06-30; 修回日期: 2009-07-30

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60673097, 60601029, 60972148, 60672126, 60702062); 国家 863 高技术研究发展计划 (No. 2008AA01Z125, 2007AA12Z136, 2008AA12Z223, 2009AA12Z210); 国家教育部博士点基金 (No. 2005071007, 20070701016); 国家部委科技项目 (No. XADZ2008159, 51307040103)

变换,其次用二叉树对变换的高频子带进行剖分,使每一个子块最多包含一条边缘,最后对每个子块中的系数进行包括投影、重排和 1-D 小波变换在内的 bandedet 化,通过最小化 Lagrangian 而确定该子块的最优方向<sup>[9]</sup>. Bandedets 用于去噪的 Lagrangian 函数为

$$L = \|f - f_M\|^2 + MT^2 \quad (1)$$

其中  $f$  为子块中的 1-D 小波系数,  $f_M$  是  $f$  的逼近,  $T$  是阈值,  $M$  是  $f$  中大于  $T$  的系数个数.

Bandedet 变换是一个 2-D 的正交小波变换加一个 Bandedet 化. 首先,对图像进行 2-D 正交小波变换;其次,使用已计算出的二叉树和最优方向对变换结果进行边缘检测:如果一个子块没有边缘,则其 2-D 小波系数为该子块中的 Bandedets 系数;如果一个子块有一条边缘,则对其进行包括投影、重排和 1-D 小波变换在内的 Bandedet 化,其 1-D 小波系数为该子块中的 Bandedets 系数,所以, Bandedets 系数在本质上还是小波系数,是 1-D 和 2-D 小波系数的混合<sup>[10]</sup>.

### 3 逐子块阈值

#### 3.1 阈值函数的选择

阈值函数有硬阈值和软阈值两种,硬阈值函数为:

$$\hat{f} = \begin{cases} f, & |f| \geq T \\ 0, & |f| < T \end{cases} \quad (2)$$

软阈值函数为:

$$\hat{f} = \begin{cases} \text{sign}(f)(|f| - T), & |f| \geq T \\ 0, & |f| < T \end{cases} \quad (3)$$

软阈值去噪的结果相对比较平滑,但它会丢失图像的一些细节;硬阈值去噪能较好地保持图像的细节,

但它容易产生边缘效应. 由于 Bandedet 变换对图像的边缘有最优的逼近,逐子块阈值自适应于子块中的系数,使用 Bandedets 域的逐子块阈值可以确保硬阈值不会产生边缘效应,所以,本文选用硬阈值函数去噪. 逐子块的硬阈值去噪函数为:

$$MBT = \text{sign}(MB) \times [(MB) \times (|MB| > T)] \quad (4)$$

其中  $MB$  是 Bandedets 系数,  $\text{sign}$  为符号函数,  $|*|$  为取绝对值,  $T$  为阈值,  $MBT$  为阈值化结果.

#### 3.2 Bandedets 子块的系数分布

GGD 的概率密度函数(pdf)能逼近高频子带小波系数的边缘密度:

$$P(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} \cdot \exp(-|x/\alpha|^\beta) \quad (5)$$

其中  $\beta$  为形状参数,  $\alpha$  为尺度参数,  $\Gamma(*)$  为 Gamma 函数,其形式如下:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (6)$$

GGD 包含了两种典型的分布:当  $\beta = 1$  时为 Laplacian 分布,当  $\beta = 2$  时为高斯分布. Chang 在文献[8]中证明:平滑区域占主导的自然图像,当其小波系数符合 GGD 时,其  $\beta$  在  $[0.5, 1]$ , Minh N. Do 在文献[11]证明了纹理图像小波系数的  $\beta$  值分布在  $[0.3, 2.9]$ . 本文实验证明,三幅自然图像 Barbara, Lena 和 Peppers 所有 Bandedets 系数子块的  $\beta$  分布在  $[0.3, 3]$ , 如图 1(a) 所示,这说明自然图像 Bandedets 子块系数服从 GGD. 图 2 是使用 GGD 的 pdf 和极大似然估计器去逼近 Peppers 的 Bandedets 系数子块的部分结果,其较好的拟合结果再次证明了 Bandedets 子块系数是服从 GGD 的.

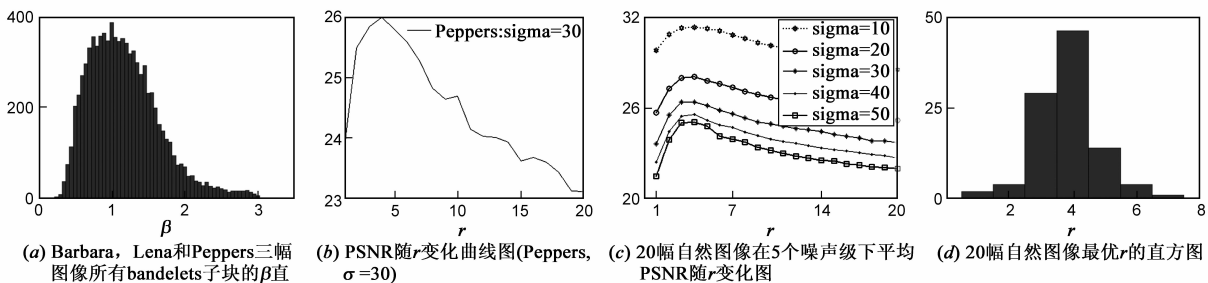


图 1

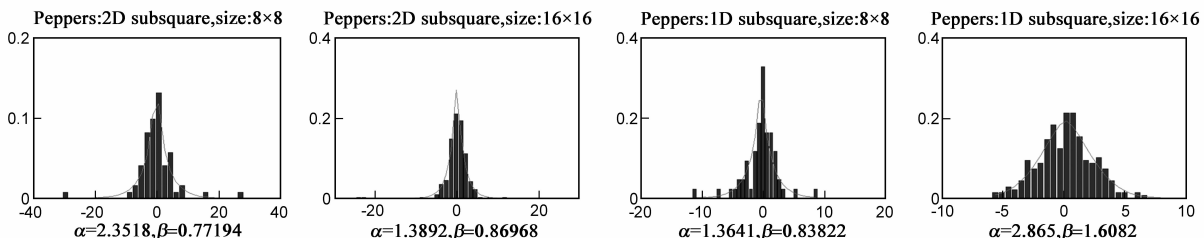


图 2 用 GGD 对 bandedets 子块系数分布的逼近 (Peppers)

### 3.3 逐子块阈值的推导

由于 Bandedlets 系数本质上也是小波系数,所以逐子块阈值的推导类似于文献[8].假定一个子块的无噪 Bandedlets 系数  $X$  被建模为 GGD 随机变量,噪声  $N$  被建模为高斯模型,则含噪 Bandedlets 系数  $Y$  可以建模为

$$Y = X + N \quad (7)$$

Bandedlets 噪声标准差  $\sigma_b$  通过下式估计

$$\sigma_b = \frac{\text{Median}(|Y_{ij}|)}{0.6745} \quad Y_{ij} \in HH_1 \quad (8)$$

由于  $X$  和  $N$  彼此独立,则有

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_b^2 \quad (9)$$

由于  $Y$  的均值是零,其方差  $\sigma_Y^2$  用下式计算:

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n Y_{ij}^2 \quad (10)$$

其中  $n$  为子块的宽度.按照式(9), $\sigma_X^2$  可以用下式计算

$$\sigma_X^2 = \max(\sigma_Y^2 - \sigma_b^2, 0) \quad (11)$$

所以,在 Bayesian 框架下的逐子块阈值可用下式计算

$$T = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_X} \quad (12)$$

式(12)是在每个子块的 Bandedlets 系数服从 GGD 并在 Bayesian 框架下导出的,它适合于使用软阈值函数去噪,为了保持更多的图像细节,本文选用硬阈值去噪,所以给式(12)乘一个常数  $r$ ,采用如下的逐子块阈值:

$$T = r \frac{\sigma_b^2}{\sigma_X} \quad (13)$$

其中  $r$  是常数, $\sigma_b^2$  是噪声方差, $\sigma_X$  是子块中无噪系数标准差, $T$  值由每一子块中的 Bandedlets 系数确定,所以,它是自适应的.

从式(13)可以看出,参数  $r$  对逐子块阈值非常重要.对于一个给定的子块,最优阈值  $T_{best}$  是由最优的  $r_{best}$  决定的.大量实验证明,对不同的图像,或对同一图像在不同的噪声级,其  $r_{best}$  都是不同的,但对一幅含噪图像,只存在一个  $r_{best}$ ,如图 1(b)是 *Peppers* 在  $\sigma = 30$  时 PSNR 随  $r$  变化的曲线,且这个规律对其它自然图像都适用.但是, $r_{best}$  一般在什么范围? 对此,本文对 20 幅自然图像,分别加入标准差为 10、20、30、40、50 的高斯白噪声后对它们进行去噪,然后求不同  $\sigma$  和不同  $r$  时 20 幅图像的平均 PSNR,图 1(c)表明当  $r$  在  $[1 \cdots 7]$  中取值时,去噪的效果比较好.图 1(d)是 20 幅图像在 5 个噪声级下  $r_{best}$  的直方图,它进一步表明更多的  $r_{best}$  在 3-5 之间取值.

### 4 去噪算法

Bandedlets 域逐子块阈值的图像去噪算法可描述如下:

**Step1** 输入含噪图像  $M$ ,设置四叉树子块最小为

$8 \times 8$ ,最大为  $16 \times 16$ ,分解  $M$  到第 4 层;

**Step2** 对  $M$  进行 2-D 正交小波变换,结果记为  $M_W$ ,用  $M_W$  的高频子带  $HH_{1W}$  和式(8)计算  $\sigma_W$ ,用  $T = 3\sigma_W$  作为初始变换阈值对  $M$  进行 Bandedlet 变换,用其高频子带  $HH_{1B}$  和(8)式计算  $\sigma_b$ ;

**Step3** 从  $[1 \cdots 7]$  中取若干个值作为  $r_i (i = 1 \cdots n, n \in N)$ ,对每一个  $r_i$ :

(1)用四叉树自适应地把  $M_W$  分割为  $m$  个子块,结果记为  $QT_i$ ,对每一个子块  $j (j = 1 \cdots m)$ :用(11)式计算出子块的  $\sigma_{Xj}$ ,用阈值  $r_i \sigma_b^2 / \sigma_{Xj}$  和每一个可选方向去实现 Bandedlet 化,把使式(1)最小的方向作为子块  $j$  的最优方向  $Theta_{ij}$ ,当所有子块的方向都计算结束后,把所有的阈值  $r_i \sigma_b^2 / \sigma_{Xj}$  组合为  $T_i = \{r_i \sigma_b^2 / \sigma_{X1}, r_i \sigma_b^2 / \sigma_{X2}, \cdots, r_i \sigma_b^2 / \sigma_{Xm}\}$ ,把所有的方向  $Theta_{ij}$  组合为  $Theta_i = \{Theta_{i1}, Theta_{i2}, \cdots, Theta_{im}\}$ ;

(2)使用  $QT_i$  和  $Theta_i$  对  $M$  实现 bandedlet 变换,结果记为  $MB_i$ ;

(3)使用式(4)和  $T_i$  对  $MB_i$  实现硬阈值操作;

(4)实现逆 Bandedlet 变换,重构图像  $M'_i$ ;

**Step4** 根据视觉效果和 PSNR 从上述  $i$  个结果中找出最佳重构结果;

**Step5** 输出最佳重构图像.

### 5 实验结果及分析

为了验证所提算法的有效性,本文使用  $512 \times 512$  的 *Barbara*、*Lena*、 $256 \times 256$  的 *Peppers* 进行实验,给它们分别加入标准差为 10、20、30、40 和 50 的高斯白噪声,并将去噪效果与正交小波域的全局硬阈值(W-HT),正交 bandedlets 域的全局硬阈值(B-HT)和 BayesShrink 进行比较.去噪性能用视觉效果和 PSNR 来衡量,PSNR 定义如下:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{\max(X, Y)^2}{\text{mean}(|X - Y|^2)} \quad (14)$$

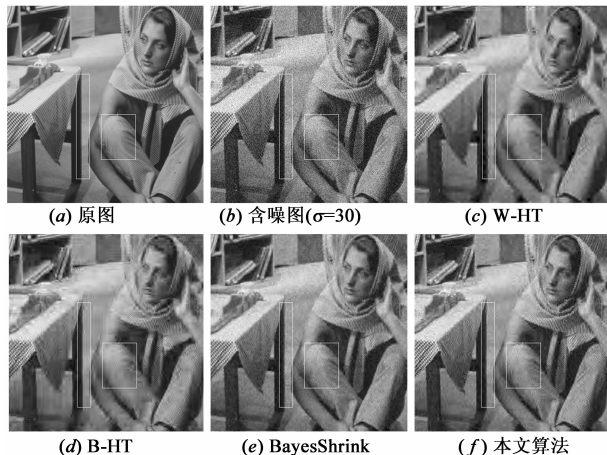


图3 不同算法对Barbara的去噪结果

其中  $X$  为原始的无噪图像,  $Y$  为重构图像, 理论上, PSNR 越大, 去噪效果就越好。

W-HT 算法使用 'db3' 小波对图像正交分解 3 层, 使用  $T = 3\sigma$  作为全局阈值. BayesShrink 使用式(12)计算逐子带的软阈值. B-HT 把图像分解到第 4 层, 使用  $T = 3\sigma$  作为全局阈值. 本文使用第 4 节所述算法进行去噪, 实验结果如图 3~5 和表 1 所示。

图 3~5 显示本文算法对自然图像去噪的视觉效果好于其它三种算法. W-HT 去噪好, 但纹理模糊, 有明显的边缘效应; B-HT 纹理保持好, 但去噪不彻底, 有轻微

的边缘效应; BayesShrink 边缘保持好, 但去噪不彻底, 残留的噪声比较多. 相比之下, 本文算法去除噪声干净, 纹理保持完整, 没有边缘效应. 边缘和纹理保持好是由于使用了对图像边缘有最优逼近的 andelet 变换: bandelet 变换是基于边缘的图像表示方法, 有丰富的可选方向, 可以精确地逼近图像的边缘; 去噪效果好是由于使用了逐子块的局部阈值: 本文算法把 Bandelet 高频子带的每个子块建模为 GGD, 基于 Bayesian 框架, 对每个子块计算一个阈值, 它充分利用了图像的局部统计信息, 所以去噪效果好。

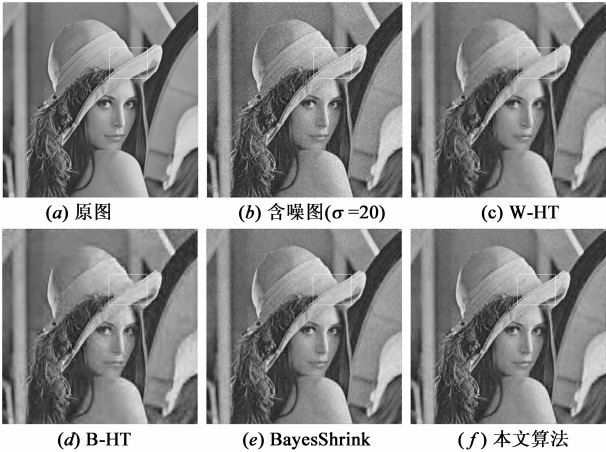


图4 不同算法对Lena的去噪结果

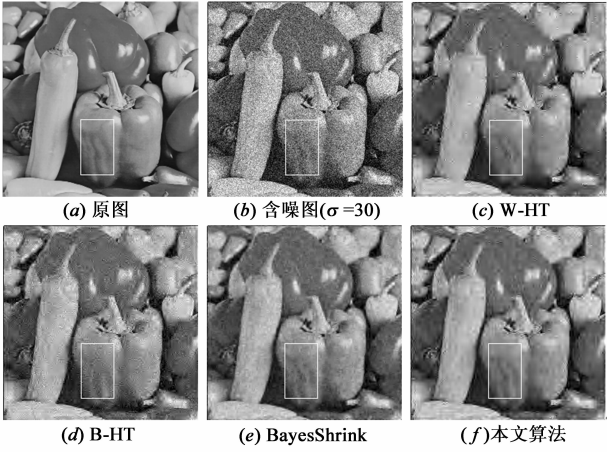


图5 不同算法对Peppers的去噪结果

表 1 去噪性能参数 PSNR 的比较

图像	$\sigma$	含噪图	W-HT	B-HT	BayesShrink	本文算法			
						$r$ 范围	PSNRmax	PSNRmin	平均 PSNR
Barbara (512 × 512)	10	28.3586	27.657	28.77	30.911	3~3.7	31.5748	31.503	31.5464 ± 0.0434
	20	23.2113	25.13	25.983	27.114	5.9~6.5	28.1049	27.7585	27.9348 ± 0.1763
	30	20.6576	23.888	25.495	25.307	2.8~4.4	26.3062	25.7874	26.05 ± 0.2626
	40	19.0912	23.665	23.502	24.099	2.3~4.4	25.9702	25.1126)	25.4917 ± 0.4785
	50	18.2027	23.224	23.092	23.274	2~4.1	25.6414	24.3379	24.9773 ± 0.6641
Lena (512 × 512)	10	28.2268	30.578	30.904	33.083	3.6~5.5	33.0084	32.7244	32.8586 ± 0.1497
	20	23.6558	28.193	28.627	29.755	2.6~5	30.2021	29.8231	30.0200 ± 0.1968
	30	21.4719	27.2	26.533	28.012	2.5~5.1	28.6388	27.9513	28.2897 ± 0.3491
	40	20.1322	26.003	25.814	27.054	3~5	27.9367	27.5603	27.7665 ± 0.2052
	50	19.2164	25.183	24.749	26.307	2.9~4.7	27.5119	27.0056	27.3608 ± 0.3552
Peppers (256 × 256)	10	28.5216	30.742	30.279	31.473	3.3~4.1	31.475	31.4133	31.4485 ± 0.0352
	20	23.0297	27.343	26.185	27.9	3.8~4.8	27.8755	27.8158	27.8494 ± 0.0336
	30	20.4986	25.961	24.099	26.001	3.2~4.6	26.0405	25.9338	25.9879 ± 0.0541
	40	18.8891	24.944	22.9	24.415	2.1~3.2	25.3188	24.8148	25.1149 ± 0.3002
	50	17.7575	24.226	22.239	23.144	4.1~5.9	24.823	24.4627	24.5765 ± 0.2465

表 1 说明本文算法去噪的性能指标也比较好. 除 Lena 在  $\sigma = 10$ 、Peppers 在  $\sigma = 20$  时, 经典 BayesShrink 的 PSNR 高于本文算法外, 其它情形都是本文算法的最大 PSNR 都高于其它算法. 这是由于本文算法结合了 bandelet 变换和局部逐子块阈值二者优势的缘故: Bandelet 变换能保证对图像边缘的最优逼近, 逐子块阈值能充

分利用图像的局部统计信息保证有效去噪。

6 结论

通过把 bandelets 子块系数建模为 GGD, 在 Bayesian 框架下提出了 bandelets 域逐子块阈值去噪算法. 该算法用 bandelet 变换保证对图像边缘的最优逼近, 用逐子

块局部阈值保证有效去噪. 实验结果表明, 所提算法的视觉效果和评价指标都好于经典的 BayesShrink 等去噪算法. 对一幅含噪图像, 本文算法对其 bandelets 域的所有子块共用一个相同的参数  $r$ , 这个参数  $r$  对大多数子块是最优的, 但并非对所有子块都是最优的. 如何对每个子块自适应地选择出最优的  $r$ , 进一步提高去噪的效果, 是下一步的研究方向.

#### 参考文献:

- [1] S G Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation [J]. IEEE Transactions, PAMI, 1989, 11(7): 674 – 693.
- [2] 焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和进展[J]. 电子学报, 2003, 31(12): 1975 – 1981.  
Jiao Li-cheng, Tan Shan. Development and prospect of image multiscale geometric analysis [J]. Acta Electronica Sinica. 2003, 31 (12): 1975 – 1981. (in Chinese)
- [3] 万洪林, 彭玉华, 曲怀敬. 全变差数字滤波器与 Ridgelet 变换相结合的图像去噪方法[J]. 电子学报, 2008, 36(1): 90 – 94.  
Wan Hong-lin, Peng Yu-hua, Qu Huai-jing. Image denoising method with combination of digital TV filter and ridgelet transform[J]. Acta Electronica Sinica. 2008, 36 (1): 90 – 94. (in Chinese)
- [4] E L Pennec, S Mallat. Sparse geometric image representations with bandelets [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(4): 423 – 438.
- [5] 杨晓慧, 焦李成, 李伟. 基于第二代 bandelets 的图像去噪[J]. 电子学报, 2006, 34(11): 2063 – 2067.  
Yang Xiao-hui, Jiao Li-cheng, Li Wei. Second generation bandelets based image denoising [J]. Acta Electronica Sinica. 2006, 34 (11): 2063 – 2067. (in Chinese)
- [6] Zhang Wenge, Liu Fang, Jiao Licheng and Gao Xinbo. SAR image despeckling based on edge detection and nonsubsampling second generation bandelets[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics. 2009, 20(3): 519 – 526.
- [7] D L Donoho. Denoising by soft-thresholding[J]. IEEE Trans. Information Theory, 1995, 41(3): 613 – 627.
- [8] S G Chang, B Yu, M Vetterli. Adaptive wavelets thresholding for image denoising and compression[J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2000, 9(9): 1532 – 1546.
- [9] S Mallat, G Peyré. A review of bandelets methods for geometri-

cal image representation [J]. Numerical Algorithms, 2007, 44 (3): 205 – 234.

- [10] G Peyre, S Mallat. Surface compression with geometric bandelets [J]. Association of Computing Machinery, 2005. 601 – 608.
- [11] N D Minh, M Vetterli. Wavelet-based texture retrieval using generalized Gaussian density and Kullback-Leibler distance [J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2002, 11(2): 146 – 158.

#### 作者简介:



**张文革** 男, 1969 年生于陕西眉县, 现为西安电子科技大学博士研究生, 主要研究方向为多尺度几何分析的表示和应用, 图像去噪和 SAR 图像处理等.

E-mail: wg\_zhang@mail.xidian.edu.cn.



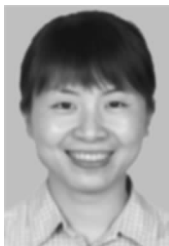
**刘芳** 女, 1963 年生于湖南华容, 西安电子科技大学教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究方向为人工智能, 信号和图像处理, 模式识别, 多尺度几何分析, 优化问题和数据挖掘.

E-mail: f63liu@163.com.



**焦李成** 男, 1959 年生于陕西白水, 西安电子科技大学教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究方向为智能算法, 机器学习, 非线性科学, 智能信息处理, 小波理论及其应用等.

E-mail: lchjiao@mail.xidian.edu.cn.



**张向荣** 女, 1978 年出生于陕西宝鸡, 1999 年, 2003 年和 2006 年于西安电子科技大学分别获学士、硕士和博士学位, 现为西安电子科技大学副教授, IEEE 会员, 主要研究方向为 SAR 图像处理与理解, 机器学习, 模式识别.