

α 稳定噪声中基于双参数 CGM 模型的 Rao 检测

李旭涛¹, 王首勇²

(1. 汕头大学电子工程系, 广东汕头 515063; 2. 空军雷达学院军队重点实验室, 湖北武汉 430019)

摘要: 针对 α 稳定分布概率密度函数无闭式表达的问题, 给出了一种解析的近似模型, 该模型采用双参数的柯西和高斯混合形式. 由分数低阶矩, 给出了混合比率的解析表达式. 同传统的柯西-高斯混合模型和高斯混合模型相比, 该模型具有完全的解析形式. 基于该模型, 导出了 α 稳定噪声条件下正弦信号的 Rao 检测统计量. 通过仿真给出了不同特征指数 α 时 Rao 检测的性能, 并同基于高斯假设的 Rao 检测进行了比较. 仿真结果表明, 该检测器在 α 稳定分布噪声条件下对信号的检测性能明显优于基于高斯假设的 Rao 检测.

关键词: 信号检测; Rao 检验; α 稳定分布

中图分类号: TN953 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 09-2014-05

BCGM Based Rao Detection in α -Stable Noise

LI Xu-tao¹, WANG Shou-yong²

(1. Department of Electronic Engineering, Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, China;

2. Key Laboratory, Wuhan Radar Institute, Wuhan, Hubei 430019, China)

Abstract: Aimed at the problem that α -stable distribution has no closed form expression for the probability density function (PDF), an approximate expression is suggested. Such model is a mixture of Gaussian and Cauchy with bi-parameter. The mixture ratio is determined by fractional low order moment (FLOM). Proposed model has a complete closed form and provides analytical convenience. Based on such model, this paper further proposes a Rao statistical test method for the detection of sine signal under the α -stable noise environment. We illustrate the detection performances of the proposed Rao test for various α , and compare them with the Rao test that based on Gaussian assumption. Simulation results show that the proposed Rao detector distinctively outperforms the Rao detector that based on Gaussian assumption.

Key words: signal detection; Rao test; α -stable distribution

1 引言

信号检测中的非高斯噪声通常具有明显的尖峰特性, 其概率密度函数(PDF)具有较重的拖尾. 在该噪声环境中针对高斯噪声的检测器难以实现对信号的有效检测. 基于广义中心极限定理的 α 稳定分布 ($S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$)^[1] 已被证明特别适合描述重尾噪声的统计特性^[2~4]. $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ 通常称为对称 α 稳定分布, 记为 $S_\alpha S$, α 稳定噪声服从对称的 α 稳定分布. 噪声的 PDF 具有解析的、易于处理的表达式是导出最优检测统计量的关键. 然而对称的 α 稳定分布除了两个特例(高斯和柯西分布)外, PDF 解析表达并不存在. 这在同类噪声环境下, 设计信号的最优检测器带来了困难. 为克服这个困难, Shao 和 Nikias 将 α 稳定分布 PDF 展开为无穷序列的和^[2], 然而实际研究表明该方法在分布的尾部存在数

值计算不稳定问题^[5]. 另一类解决的途径是寻找 PDF 的近似, 进而建立近优的检测器. Kuruoglu 基于次高斯过程, 采用高斯混合模型 (Gaussian Mixture Model, GMM) 来逼近 α 稳定分布 PDF^[5]. 然而, Boubchir 等人的实验表明该方法只有在大于 8 个高斯分量混合时才能获得较好的近似^[6], 因此该模型并不能提供解析的便利. 由于绝大多数 α 稳定噪声的特征参数多于 1, 因此对于 $1 \leq \alpha \leq 2$ 的 α 稳定噪声, Swami 建议采用柯西-高斯混合 (Cauchy Gaussian Mixture, CGM) 的近似模型^[7], 但是由于该模型参数同 α 稳定分布参数之间并没有闭式的联系, 该模型参数只能采用期望最大算法求取, 因此该模型并非完全解析.

针对上述问题, 本文给出了一种两参数的柯西-高斯混合近似模型, 模型参数同源分布参数具有闭式的对应关系. 模型具有形式简捷、易于计算的解析形式. 进一

步给出了 CGM 模型^[8]的完整证明,验证了基于分数低阶矩(Fractional Low Order Moment, FLOM)导出的混合比率,在最大似然准则下是最优的。

对非高斯噪声中信号的检测,信号的参数往往难以估计,而 Rao 检测^[9]无须估计信号的参数.基于所提出的近似模型,本文导出了稳定噪声下正弦信号的 Rao 检测方法.对不同特征指数 α ,给出了检测性能曲线,并与高斯假设下的 Rao 检测进行了比较.仿真结果表明,本文提出的检测方法在 α 稳定噪声中具有良好的检测性能,而基于高斯假设的 Rao 检测,其检测性能明显下降.

2 双参数 CGM 模型

对称的 α 稳定分布 SaS 由特征函数表征^[2]:

$$\psi(\theta) = \exp\{-\gamma|\theta|^\alpha\} \quad (1)$$

其中, $\gamma = \sigma^\alpha$ 称为分布的离差, σ 为分布的尺度参数. $\gamma = 1$ 的 SaS 称为标准的 SaS. 两个具有显式 PDF 的 SaS 特例为:当 $\alpha = 2$ 时的高斯分布: $f_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right)$ 以及当 $\alpha = 1$ 时的柯西分布: $f_C(x) = \sigma/(\pi(x^2 + \sigma^2))$. 对其他的 α 值, SaS 分布的 PDF 无闭式表达. 对于该分布 PDF 的近似,常见的混合类型的近似模型有 GMM 和 CGM 模型. GMM 模型的提出建立在下述定理之上.

定理 1^[11] 令 $X \sim S_{\alpha'}(\sigma, 0, 0)$, $0 < \alpha' \leq 2$, 并且 $0 < \alpha < \alpha'$. 若 A 为服从 α/α' 正偏稳定分布的随机变量,假定 X 和 A 是独立的,由 Laplace 变换 $E \exp(-\theta A) = \exp(-\theta^{\alpha/\alpha'})$, $\theta > 0$, 即 $A \sim S_{\alpha/\alpha'}((\cos(\pi\alpha/2\alpha'))^{\alpha'/\alpha}, 1, 0)$, 则:

$$Z = A^{1/\alpha'} X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0) \quad (2)$$

因此,若 $\alpha' = 2$, 则一个服从 $\alpha < 2$ 的 SaS 的随机变量 $Z \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ 能够表示成 $Z = \sigma G S^{1/2}$, 其中 $G \sim N(0, \sigma^2)$, $S \sim S_{\alpha/2}((\cos(\pi\alpha/4))^{2/\alpha}, 1, 0)$, S 为服从正向偏斜 ($\beta = 1$) 的 $\alpha/2$ 的稳定分布^[1]. 据此, Kuruoglu 给出了 GMM^[5]的简化形式:

$$f_Z(z; \alpha, \gamma, \mu) = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_i} \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\gamma v_i^2}\right] f_V(v_i)}{\sum_{i=1}^N f_V(v_i)} \quad (3)$$

其中, $Z \sim \text{SaS}$, $V = Y^{1/2}$, $Y \sim S_{\alpha/2}((\cos(\pi\alpha/4))^{2/\alpha}, 1, 0)$ 服从 $\alpha/2$ 的正向偏斜稳定分布, N 为混合高斯分量的数目. 虽然 GMM 模型具有较好的近似性能,但是当 N 较小时,该模型并不能准确描述 α 稳定分布的拖尾特性,对于较大的 N , 则该模型过于复杂,失去了解析分析的便利.

另一类混合模型为 CGM 模型^[7], 该模型具有如下

形式:

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= (1-\epsilon)f_C(x) + \epsilon f_G(x) \\ &= (1-\epsilon) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_G} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_G^2}\right) + \frac{\epsilon\gamma_C}{\pi(x^2 + \gamma_C^2)} \end{aligned} \quad (4)$$

其中 ϵ 是混合比率, σ_G^2 为高斯分量的方差, γ_C 为柯西分布的离差. 采用期望最大算法, Swami 实现了对该模型参数的估计^[7], 由于需要迭代估计三个参数 ($\epsilon, \sigma_G, \gamma_C$), 其估计方法计算量很大.

我们考察定理 1, 该定理事实上建议了一种柯西混合的近似形式, 若 $\alpha' = 1$, 则

$$A \sim S_\alpha((\cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha}, 1, 0) \quad (5)$$

让 $Z = AX \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, 对于 $0 < \alpha < 1$, $X \sim S_1(\sigma, 0, 0)$ 服从柯西分布, 这意味着对于 $0 < \alpha < 1$ 的 SaS 密度函数能够由柯西分布的尺度混合来表征, 也即 SaS 分布是条件柯西分布. 为扩展这种表征以适合 $1 < \alpha < 2$ 的情况, 我们考虑下述定理.

定理 2^[10] 令 Y 和 X 相互独立, 且 $Y \sim S_{\alpha_y}(\sigma_y, 1, 0)$, $X \sim S_{\alpha_x}(\sigma_x, \beta_x, 0)$, 其中 $0 < \alpha_y < 1$, $0 < \alpha_x < 2$, $\alpha_x \neq 1 \neq \alpha_x \alpha_y$. 则

$$Z = Y^{1/\alpha_y} X \sim S_{\alpha_z}(\sigma_z, \beta_z, 0) \quad (6)$$

其中 $\alpha_z = \alpha_x \alpha_y$, $\beta_z = \frac{\tan(\alpha_y, \theta)}{\tan(\alpha_x \alpha_y \pi/2)}$, $\theta = \arctan\left(\beta_x \tan\left(\frac{\alpha_x \pi}{2}\right)\right)$,

$\gamma_z = \gamma_x^\alpha \gamma_y \left(1 + \beta_x^2 \tan^2\left(\frac{\alpha_x \pi}{2}\right)\right)^{\alpha_y/2} \frac{\cos(\alpha_y \theta)}{\cos(\alpha_y \pi/2)}$. 对于 $\alpha_x < 1$, 若 $\beta_x \in (-1, 0, 1)$, 则 $\beta_z = \beta_x$.

基于上述定理, 正向偏斜 α 稳定分布能够由列维分布的尺度混合来表达^[11]. 因此, 我们提出下述定理以扩展柯西混合的近似形式, 使之适用于 $1 < \alpha < 2$ 的情形.

定理 3 令 $Z \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, $X \sim S_1(\sigma, 0, 0)$, 则

$$Z = \sqrt{2} B^{-1/\alpha} X \quad (7)$$

对于 $1 < \alpha < 2$ 成立. 其中 $B \sim S_{\alpha_B}(\gamma_B, 1, 0)$, $\alpha_B = 1/\alpha$ 以及 $\gamma_B = \sqrt{2} \cos(\pi/2\alpha)$.

证明 对于 $1 < \alpha < 2$ 的正向偏斜 α 稳定分布的近似形式, 由定理 2, 我们能够得到:

$$A = C/B^{1/\alpha_A} \quad (8)$$

其中 $B \sim S_{\alpha_B}(\gamma_B, 1, 0)$, $A \sim S_{\alpha_A}(\gamma_A, 1, 0)$, $\alpha_A = 1/(2\alpha_B)$, $\gamma_B = \sqrt{2} \cos(\pi/4\alpha_A) [\cos(\alpha_A \pi/2)]^{1/2\alpha_A} \gamma_A^{-1/2\alpha_A}$, 以及 $C \sim S_{0.5}(1, 1, 0)$. 由式(2), 令 $Z = A^{1/2} X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ 其中 $X \sim S_2(\sigma, 0, 0)$, 则

$$Z = A^{1/2} X = (C/B^{1/\alpha_A})^{1/2} X = \sqrt{2} B^{1/2\alpha_A} (C/2)^{1/2} X \quad (9)$$

成立, 又令 $X' = (C/2)^{1/2} X$, 由 α 稳定分布的数乘性质: 若 $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, c 为非零的实常数.

当 $\alpha \neq 1, cX \sim S_\alpha(|c|\sigma, \text{sign}(c)\beta, c\mu)$;

当 $\alpha = 1, cX \sim S_1(|c|\sigma, \text{sign}(c)\beta, c\mu - \frac{2}{\pi}c(\ln|c|)\sigma\beta)$.

我们得到 $D = C/2 \sim S_{0.5}(\sigma_C/2, 1, 0) = S_{0.5}(0.5, 1, 0)$ 这意味着 D 服从列维分布,再考虑到定理 1 的特例

$$X' = D^{1/2}X \sim S_1(\sigma, 0, 0) \quad (10)$$

服从柯西分布,因此定理 3 成立,此时 $\alpha_A = \alpha/2, \alpha_B = 1/\alpha, \gamma_B = \sqrt{2}\cos(\pi/(2\alpha))$. 因此,柯西尺度混合的密度函数是另一种 SaS 密度的表征形式.定理 1 和定理 3 分别表明 SaS 密度函数能够由高斯或者柯西的尺度混合形式来表征.因此,采用 CGM 混合模型近似 SaS 密度函数是合理的.

为进一步提高 CGM 在解析分析中的有效性,我们建立如下双参数形式的 CGM 模型:

$$f_\alpha(x) = (1 - \epsilon)f_G(x) + \epsilon f_C(x) \\ = (1 - \epsilon) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\epsilon\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)} \quad (11)$$

该 CGM 模型仅有两个参数 (ϵ, σ) , 其中 ϵ 为混合比率.为区别于一般的 CGM 模型,我们将该模型称为双参数高斯-柯西混合模型 (Bi-parameter Cauchy Gaussian mixture, BCGM).事实上,模型中高斯分布的方差为 $2\sigma^2$,柯西分布的离差为 σ .现在唯一需要确定的参数是混合比率 ϵ , McCulloch 曾建议了一种线性的经验关系 $\epsilon = 2 - \alpha$ ^[12].由线性混合模型矩的性质,我们采用对数矩 (Logarithm Moment, LM) 和分数低阶矩 FLOM, 分别导出另外两种不同的关系式.

对数矩法:若 $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, 令 $Y = \log|X|$ 则 $E(Y) = C_e(1/\alpha - 1) + \log(\sigma)$ 以及 $Var(Y, \alpha) = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2}\right)$, 其中 $C_e = 0.5772$ 为欧拉常数^[1].因此当 $\alpha = 2$ 时, $Var(Y, 2) = \pi^2/8$, 对应于高斯分布; 当 $\alpha = 1$ 时, $Var(Y, 1) = \pi^2/4$ 对应于柯西分布.考虑到混合模型具有线性性质, 则

$$Var(Y, \alpha) = \epsilon Var(Y, 1) + (1 - \epsilon) Var(Y, 2) \quad (12)$$

因此混合比率

$$\epsilon = (4 - \alpha^2)/3\alpha^2 \quad (13)$$

特别地,对于高斯分布,即 $\alpha = 2$ 时, $\epsilon = 0$; 对于柯西分布,即 $\alpha = 1$ 时, $\epsilon = 1$.

分数低阶矩法:若 $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, 则有

$$E(|x|^p) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p [(1 - \epsilon)f_G(x) + \epsilon f_C(x)] dx \quad (14)$$

其中 $p < \alpha$, 又由于 $E(|x|^p) = C(p, \alpha) \cdot \sigma^p$ ^[1] 其中

$$C(p, \alpha) = 2^{p+1} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma(-p/\alpha) / (\alpha \sqrt{\pi} \Gamma(-p/2))$$

分别令

$$m_G^p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f_G(x) dx = C(p, 1) \cdot \sigma^p$$

和

$$m_C^p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f_C(x) dx = C(p, 2) \cdot \sigma^p$$

则式(14)可写为 $E(|x|^p) = (1 - \epsilon)m_G^p + \epsilon m_C^p$, 混合比率

$$\epsilon = \frac{E(|x|^p) - m_G^p}{m_C^p - m_G^p} = \frac{2\Gamma(-p/\alpha) - \alpha \cdot \Gamma(-p/2)}{2\alpha \cdot \Gamma(-p) - \alpha \cdot \Gamma(-p/2)} \quad (15)$$

该表达式同样满足对于高斯分布,即 $\alpha = 2$ 时, $\epsilon = 0$; 对于柯西分布,即 $\alpha = 1$ 时, $\epsilon = 1$.

为检验参数 ϵ 不同估计方法的有效性,我们首先按最大似然 (Maximum Likelihood, ML) 准则估计出参数 ϵ , 然后分别按照所提出的对数矩 LM 法和分数低阶矩 FLOM 法, 以及 McCulloch 的线性估计法 $\epsilon = 2 - \alpha$ 得到各自的估计值, 在 $1 < \alpha < 2$ 区间上, 分别作出估计值同 α 的关系曲线. 图 1 所示的结果表明基于式(15)的 FLOM 法最为接近 ML 估计. 因此在最大似然准则下, FLOM 法为最优的估计方法. BCGM 模型中高斯和柯西分布的参数同源分布的尺度参数 σ 具有解析的对应关系, 混合比率 ϵ 又由式(15)确定, 因此该模型具有完全解析的形式. 基于此模型能够方便的导出相应稳定噪声干扰下信号的 Rao 检测.

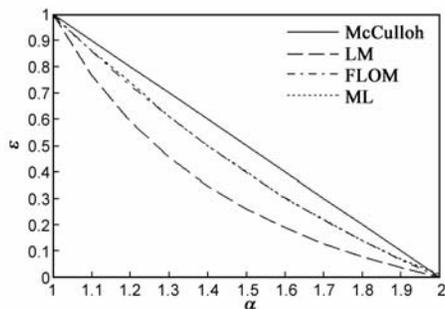


图1 对混合比率参数 ϵ ,各估计方法的比较

3 Rao 统计检测模型

设观测数据矢量 x 的 PDF 为 $f_\alpha(x, \theta)$, θ 为 $p \times 1$ 未知参数矢量, 检测问题为如下的二元假设检验^[9]

$$H_0: \theta = \theta_0;$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

对于 Rao 检测统计量, 若

$$T_R(x) = \frac{\partial \ln f_\alpha(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}^T I^{-1}(\theta_0) \frac{\partial \ln f_\alpha(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} > \lambda \quad (16)$$

则判 H_1 , 其中 λ 为门限值, $I(\theta)$ 为 Fisher 信息矩阵

$$[I(\theta)]_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2 \ln f_\alpha(x; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \quad (17)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, p$. 对于观测数据为线性模型信号形式

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w} \quad (18)$$

其中 \mathbf{H} 为已知 $N \times p (N > p)$ 维、秩为 p 的观测矩阵, \mathbf{w} 为 $N \times 1$ 的噪声矢量, 它的元素是服从 PDF 为 $f_\alpha(w[n])$ 的独立同分布的 α 稳定随机噪声. 若

$$T_R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}}{i(A)} > \lambda \quad (19)$$

则判 H_1 . 其中 $\mathbf{y} = [y(0), y(1), \dots, y(N-1)]^T, y(n) = g(x(n))$, 并且

$$g(\omega) = -\frac{df_\alpha(\omega)}{f_\alpha(\omega)d\omega} \quad (20)$$

$$i(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(df_\alpha(\omega)/d\omega)^2}{f_\alpha(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(\omega) (g(\omega))^2 d\omega \quad (21)$$

4 稳定噪声中正弦信号的 Rao 检测

设观测样本为 $x(n), w(n)$ 为 IID 的稳定噪声, 概率密度函数 $f_\alpha(w)$ 由式(11)给出. 信号设为 $s(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \varphi)$, 其中参数集 $\{A, \varphi\}$ 未知, 且 $A > 0, 0 < f_0 < 1/2, 0 < \varphi < 2\pi$. 则检测问题为

$$H_0: x(n) = w(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$H_1: x(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \varphi) + w(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (22)$$

将观测数据写为如式(18)的线性模型, 则

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2\pi f_0 & \sin 2\pi f_0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos 2\pi f_0 (N-1) & \sin 2\pi f_0 (N-1) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} A \cos \varphi \\ A \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (24)$$

由于 f_0 为归一化频率, 并有 $\mathbf{H}^T \mathbf{H} \approx (N/2) \mathbf{I}^{[9]}$, 代入式(19), Rao 检测统计量为

$$T_R(\mathbf{x}) = \frac{2}{N} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{y}}{i(A)} = \frac{2}{Ni(A)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \exp(-j2\pi f_0 n) \right|^2 \quad (25)$$

因此 Rao 检测统计量计算的关键在于求出 $i(A)$ 和 $y(n)$. 由式(21)可知 $i(A)$ 由 $f_\alpha(w)$ 和非线性函数 $g(w)$ 决定, 而 $y(n) = g(x(n))$. $g(w)$ 相当于一个非线性限幅器, 对于 $T_R(x)$ 至关重要, 将式(11)确定的 BCGM 模型代替 $f_\alpha(w)$, 由式(20),

$$g(\omega) = \frac{(1-\epsilon)\sqrt{\pi}\omega(\omega^2+\sigma^2)^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}\right) + 8\epsilon\sigma^4\omega}{(1-\epsilon)2\sqrt{\pi}\sigma^2(\omega^2+\sigma^2)^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}\right) + 4\epsilon\sigma^4(\omega^2+\sigma^2)} \quad (26)$$

其中, ϵ 为满足式(15)的混合比率. 当 $\epsilon = 0$, 也即 $f_\alpha(\omega)$

为高斯密度函数时, $g(\omega)$ 为线性函数, 相应的检测即为线性 Rao 检测.

5 仿真分析

在仿真实验中, 为考察稳定噪声条件下不同特征指数 α 时的 Rao 检测性能, 不失一般性, 噪声为 $\gamma = 1$ 的 α 稳定噪声, 信号设为 $s(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \varphi)$, 观测样本 $x(n)$ 的序列长度为 $N = 64$, 虚警概率设为 $P_f = 10^{-3}$, 选择检测实验的次数为 10^5 次, 考察正确检测概率 P_d . 对于有限方差条件下, 通常采用信号噪声功率比, 然而在 α 稳定分布条件下, 理论上不存在有限的二阶矩, 致使分布的方差变得没有意义, 因此本文采用以下广义信噪比^[7]

$$GSNR = 10 \log \left(\frac{1}{\gamma N} \sum_{n=1}^N |s(n)|^2 \right) \quad (27)$$

通过实验, 确定式(19)中 Rao 检测门限 λ . 图 2 为特征指数 $\alpha = 1.2$ 和 $\alpha = 1.6$ 时, 基于 BCGM 模型的 Rao 检测以及高斯噪声假设下线性 Rao 检测的性能比较. 从图中可以看出, 基于 BCGM 模型的 Rao 检测明显优于高斯假设下的线性 Rao 检测, 线性 Rao 检测的 P_d 接近 0, 基本丧失了检测能力.

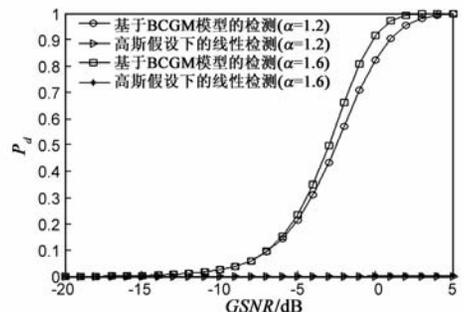


图2 $\alpha=1.2$ 和 $\alpha=1.6$ 时Rao检测性能比较

为了进一步考察本文提出的基于 BCGM 模型的 Rao 检测的性能, 在特征指数 α 接近 2 时, 也即噪声接近高斯噪声时, 同高斯噪声假设下的线性 Rao 检测进行了比较. 实验条件同前, 图 3 给出了 $\alpha = 1.95$ 时两种检测器的检测性能以及 $\alpha = 2$ 时线性检测器的检测性能. 从图中可以看出, 当 $\alpha = 2$ 时, α 稳定分布为高斯分布,

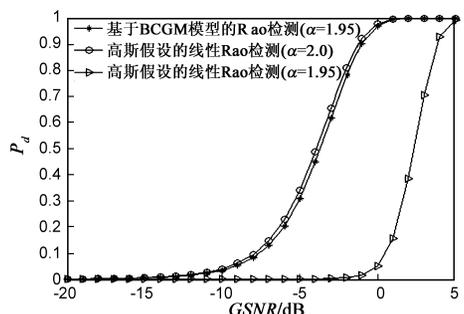


图3 噪声接近于高斯噪声时Rao检测性能比较

高斯噪声假设下的线性 Rao 检测具有良好的检测性能; 而当 $\alpha = 1.95$ 时, 线性 Rao 检测性能明显降低, 而此时本文所提出的 Rao 检测方法的检测性能明显优于线性 Rao 检测方法并接近高斯噪声时线性 Rao 检测的性能. 最后, 我们考察所提出 Rao 检测的 $P_f \sim P_d$ 性能. 图 4 为信噪比一定 ($GSNR = -5\text{dB}$) 时, 不同 α 条件下对标准 $S\alpha S$ 噪声中正弦信号的 Rao 检测 $P_f \sim P_d$ 曲线. 从图中可以看出, 该检测器在不同 α 条件下的检测性能差别不大, 随 α 的增加略有提升.

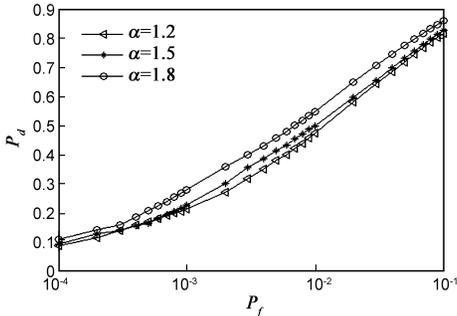


图4 不同 α 值基于BCGM的Rao检测 $P_f \sim P_d$ 曲线

6 小结

α 稳定分布概率模型的 PDF 无闭式表达给实际的应用带来了不便. 针对已有近似模型存在的问题, 提出了双参数的 CGM 模型. 该模型的参数和稳定分布参数之间具有简单的闭式联系, 因此 BCGM 是 α 稳定分布 PDF 完全解析的近似模型. 在 α 稳定噪声中, 基于高斯假设的 Rao 检测不再适用, 因此本文提出一种基于 BCGM 模型的 Rao 检测器, 给出了稳定噪声中未知参数目标信号的 Rao 检测统计量. 对不同 α 值时的检测性能进行了仿真实验, 并与基于高斯假设的 Rao 检测进行了比较. 结果表明, 这种 Rao 检测器在 α 值小于 2 的情况下, 检测性能明显优于高斯假设的 Rao 检测. 所提出的方法为非高斯重尾噪声下的信号检测提供了一种有效手段.

参考文献

- [1] G Samorodnitsky, M Taqqu. Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance [M]. New York: Chapman and Hall, 1994. Chapter 1.
- [2] M Shao, C L Nikias. Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications [J]. Proceedings of the IEEE, 1993, 81(7): 986 - 1010.
- [3] S Zozor, J M Brossier, P O Amblard. A parametric approach to suboptimal signal detection in α -Stable noise [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(12): 4497 - 4509.
- [4] 王首勇, 朱晓波, 李旭涛, 王永良. 基于分数低阶协方差的 AR $S\alpha S$ 模型 α 谱估计 [J]. 电子学报, 2007, 35(9): 1637 -

1641.

- Wang Shou-yong, Zhu Xiao-bo, Li Xu-tao, Wang Yong-liang. α -spectrum for AR $S\alpha S$ processes based on FLOC [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(9): 1637 - 1641. (in Chinese)
- [5] E E Kuruoglu, C Molina, W J Fitzgerald. Approximation of α -stable probability densities using finite mixtures of Gaussians [A]. Proc EUSIPCO '98 [C]. Rhodes, Greece, 1998.
 - [6] L Boubchir, J M Fadili. A closed-form nonparametric Bayesian estimator in the wavelet domain of images using an approximate α -stable prior [J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27(12): 1370 - 1382.
 - [7] A Swami. Non-Gaussian mixture models for detection and estimation in heavy-tailed noise [A]. Proc IEEE ICASSP '00 [C]. Istanbul, Turkey, 2000. 3802 - 3805.
 - [8] X T Li, J Sun, L W Jin, M Liu. Bi-parameter CGM model for approximation of α -stable PDF [J]. Electronics Letters, 2008, 44(18): 1096 - 1097.
 - [9] S M Kay. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume II: Detection Theory [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
 - [10] C D Hardin. Skewed Stable Variables and Processes [R]. University of North Carolina, Chapel Hill, Center for Stochastic Processes, 1984.
 - [11] E E Kuruoglu. Analytical representation for positive α -stable densities [A]. Proc IEEE ICASSP '03 [C]. Hong Kong, 2003. 729 - 732.
 - [12] J H McCulloch. Simple consistent estimators of stable distribution parameters [J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1986, 15(4): 1109 - 1136.

作者简介



李旭涛 男, 副研究员、IEEE 会员. 2006 年毕业于华中科技大学电子与信息工程系, 获工学博士学位. 现为汕头大学电子工程系副教授. 主要从事统计信号处理、弱信号检测和机器视觉等领域的有关研究.

E-mail: lixt@stu.edu.cn



王首勇 男, 武汉空军雷达学院教授、博士生导师. 主要从事现代信号处理, 雷达信号处理等领域的工作.

E-mail: sywang@public.wh.hb.cn