

利用薄板样条函数实现非刚性图像匹配算法

孙冬梅, 裘正定

(北方交通大学信息所, 北京 100044)

摘 要: 提出了一种利用薄板样条函数实现非刚性图像匹配的新方法. 该方法是将图像表示成由特征点构成的特征点集, 利用薄板样条 (TPS) 能够将形变清楚地分解为仿射分量和非仿射分量的独特性质, 应用 TPS 函数来表征特征点集之间的非刚性映射, 并将 TPS 映射参数的求解嵌入到确定性退火技术的框架中. 首先提出基于 TPS 弯曲能的非刚性匹配的能量函数, 然后采用确定性退火技术, 迭代求解点集之间的匹配矩阵和映射参数. 与其它的非刚性匹配算法相比, 该算法不仅保证了图像特征点之间的一一对应的双向约束, 同时避免了陷入局部极小, 而且具有较强的鲁棒性. 实验结果证实了所提算法的有效性和鲁棒性.

关键词: 图像匹配; 非刚性映射; 薄板样条; 确定性退火技术; 匹配矩阵

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 08-1104-04

A New Non-Rigid Image Matching Algorithm Using Thin-Plate Spline

SUN Dong-mei, QIU Zheng-ding

(Institute of Information Science, Northern Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: A novel, robust algorithm for solving the non-rigid matching between two images is proposed. This method represents the image by sets of feature points. Due to a special characteristic of the thin-plate spline (TPS) —it can decompose a deformation into the affine and non-affine components. TPS for non-rigid spatial mapping is chosen. A convex TPS bending energy function describing the problem is derived and a one-to-one two-way matching constraint on the match matrix is enforced. By minimizing the above bending energy, we can jointly estimate the TPS mapping parameters and match matrix between the two feature point-sets of the images. We utilize the deterministic annealing which emerged from the statistical physics to solve the optimization problem. Embedded within a deterministic annealing framework, and by introducing an annealing temperature to control the degree of fuzziness of the match matrix, the algorithm not only improves the robustness but also reduces the chances of getting trapped in local minima. We compare our method with the polynomial quasi-exhaustive exploration (PQEE) algorithm proposed by Michigan University, and the results show that PQEE's performance deteriorates much faster with the increase of degrees of deformation, amounts of noise and percentage of outliers. We also conduct experiments on matching of hand-shapes images and registration of anatomical brain MR images. The experimental results demonstrate the validation and robustness of the algorithm.

Key words: image matching; non-rigid mapping; thin-plate spline; deterministic annealing; match matrix

1 引言

图像匹配就是寻找两个 2D 或 3D 图像之间的空间映射和对应关系, 它是计算机视觉和模式识别领域的一项非常重要的基础性工作. 然而由于图像中存在噪声和复杂的形变, 图像之间除了存在刚性映射, 还存在非刚性映射, 使得图像匹配——尤其是非刚性图像匹配问题成为一个非常具有挑战性的问题. 一直以来, 学者们提出了各种非刚性图像匹配方法. 文献 [1] 将图像分解为许多子图像, 估计每个子图像之间仿射变换, 这样用多个仿射变换近似反映整个图像之间的非刚性映射. 文献 [2, 3] 首先从图像中提取出特征点, 然后将特征点拟合成曲线或曲面进行匹配. 这种方法在拟合的曲线或曲面比较光滑的情况下效果好, 但是当图像所包含的形状很复杂时,

曲线或曲面的拟合就变得非常困难, 这种方法的好处是曲线的匹配相对于点集的匹配要容易些.

最近还有许多非刚性匹配的研究主要集中于非刚性形状的统计特性的学习上^[4, 5], 其方法类似于迭代最近点 (ICP) 算法^[6, 7], 是基于局部的启发式搜索. 以上这些方法大都存在鲁棒性差, 易陷入局部极小的问题, 而且通常不能保证图像之间的一一对应. 本文的方法类似文献 [2, 3], 也是从图像中提取出特征点集, 不同之处在于本文将图像之间的匹配直接转化为两个特征点集之间的匹配. 采用的方法是利用薄板样条 (TPS) 函数来表征点集之间的非刚性映射. 薄板样条是唯一能够清楚地将映射分解为刚性映射和非刚性映射的样条函数. 在保证点集之间一一对应约束的条件下, 通过最小化 TPS 的

弯曲能,联合求解点集之间的匹配矩阵和映射参数.为避免陷入局部极小,提高算法的鲁棒性,将薄板样条函数的求解嵌入到来自于统计物理学的确定性退火技术的框架中.

2 非刚性点匹配的薄板样条函数

本文之所以采用薄板样条(TPS),是因为它的独特性质,就是能够将空间变换分解为一个全局仿射变换和一个局部非仿射变换.Bookstein^[8]首先将 TPS 应用于标志点的匹配,结果证明它是一个非常有用的形状分析工具.

假设在 2D 空间,已知两个具有 N 对对应点的点集, $X = \{X_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 和 $Y = \{Y_i, i = 1, 2, \dots, N\}$, 将点集 X, Y 表示为:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N^1 & x_N^2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & y_1^1 & y_1^2 \\ 1 & y_2^1 & y_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_N^1 & y_N^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 x_i, y_i 的上角标 1, 2 分别表示点 x_i, y_i 的横、纵坐标.

下面我们建立从点集 Y 到点集 X 的薄板样条映射 $f(Y_i)$, 由于薄板样条是不对称的, 因此从 Y 到 X 的映射不能简单地反转为从 X 到 Y 的映射. 通过最小化下面的能量函数, 可以得到一个光滑的薄板样条内插式:

$$E_{tps}(f) = \sum_{i=1}^N |X_i - f(Y_i)|^2 + \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial (y^2)^2} \right)^2 \right] dy^1 dy^2 \quad (2)$$

通过最小化式(2)的第一项, 可以使点集 Y 中的点尽可能近地映射到 X 中的点, 第二项是平滑性约束, 用于映射的调整, 调整参数 c, d 决定了映射的形变程度, 当 $c, d \rightarrow 0$ 时, 将得到对应点的精确匹配.

定义: $t = (y^1, y^2), t_i = (y_i^1, y_i^2)$,

$$[\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)] \stackrel{def}{=} [1, y^1, y^2]$$

式(2)的薄板样条能量函数存在唯一极小值 $f^{(9)}$:

$$f(t) = \sum_{k=1}^3 d_k \phi_k(t) + \sum_{i=1}^N c_i G(t - t_i) \quad (3)$$

其中 $G(t - t_i)$ 是薄板样条的格林函数:

$$G(t) = -\frac{1}{2} \log |t - t_i| = -\frac{1}{2} \log \sqrt{(y^1 - y_i^1)^2 + (y^2 - y_i^2)^2}$$

由式(3)可见, 薄板样条能量函数的最小值由两个未知参数 c, d 确定, 将式(3)代入式(2), 得到:

$$E_{tps}(c, d) = |X - Yd - Kc|^2 + \text{trace}(c^T Kc) \quad (4)$$

其中, X 和 Y 是 $N \times 3$ 的点集, d 是 3×3 的仿射变换矩阵, c 是 $N \times 3$ 的非仿射形变参数矩阵, K 是 TPS 的核, 为 $N \times N$ 矩阵, 其中, $K_{ij} = G(t_i - t_j)$.

直接求解式(4)中 (c, d) 的最小二乘解是非常繁琐的. 下面应用 QR 分解法来分离仿射变换和非仿射变换空间⁽⁹⁾:

$$Y = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中, Q_1 和 Q_2 分别是 $N \times 3$ 和 $N \times (N - 3)$ 的正交矩阵, R 是上三角矩阵. 通过适当变换, 式(4)变为:

$$E_{tps}(c, d) = Q_2^T X - Q_2^T K Q_2 c^2 + Q_1^T X - Rd - Q_1^T K Q_2 c^2 + Q_1^T Q_2^T K Q_2 c^2 \quad (6)$$

其中, $c = Q_2 c, X^T c = 0$, 是 $(N - 3) \times 3$ 矩阵.

由 $\partial E / \partial d = 0$ 和 $\partial E / \partial c = 0$, 可得到:

$$\begin{aligned} d &= (Q_2^T K Q_2 + I_{(N-3)})^{-1} Q_2^T X \\ c &= R^{-1} Q_1^T (X - K Q_2 c) \end{aligned} \quad (7)$$

3 确定性退火技术

确定性退火技术是由美国加州理工学院的 K Rose 博士于 1990 年首先提出的^[10]. 对于求解极小化问题: $\min E = E(x), E(x)$ 可看作是某一物理系统的能量, 确定性退火技术将此极小化问题看作是求解该系统的能量极小化状态. 由统计物理学, 在某一温度下, 系统状态的变化总是朝着自由能减少的方向进行, 当系统达到平衡态时自由能函数达到极小. 确定性退火技术要求所构造的物理系统的自由能函数 $F(x, T)$ 应满足: 当 $T \rightarrow 0$ 时, $F(x, T)$ 的全局极小点极易求出; 当 $T \rightarrow \infty$ 时, $F(x, T) = E(x)$. 确定性退火技术, 就是在每一温度 T , 以系统在 $T = T + \Delta T$ 时自由能函数极小的状态 $x_{\min}(T + \Delta T)$ 作为初始点, 通过求解 $\min F(x, T)$ 的极小点来模拟系统达到平衡态的过程. 随着 T 的减小, $F(x, T)$ 的全局极小点不断变化, 当 T 的变化 ΔT 很小时, 可认为 $x_{\min}(T)$ 位于 $x_{\min}(T + \Delta T)$ 所在的局部极小区域内, 所以在温度 T , 可以用 $x_{\min}(T + \Delta T)$ 作为初始点来求解 $F(x, T)$ 的极小值. 当 T 连续减小的速度合理时, 有理由认为 $\lim_{T \rightarrow 0} x_{\min}(T)$ 作为上面极小问题的全局极小点^[11]. 与用 Metropolis 准则的模拟退火算法相比, 确定性退火技术的收敛速度快.

4 非刚性匹配算法

4.1 非刚性匹配的自由能函数

由第二部分的推导表明, 只要已知两个点集之间的对应点, 就可以得到它们之间的薄板样条映射. 但是当对应点未知时, 该如何处理呢?

设两个对应点为未知的 2D 点集 $\{X_i\}$ 和 $\{Y_j\}, i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2$, N_1 和 N_2 分别是两个点集的点数. 定义两个点集之间的匹配矩阵 $\{M_{ij}\}$ 为:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若点 } X_i \text{ 对应于点 } Y_j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于两个点集之间是双向一一对应的, 即一个点集中的每个点在另一个点集中至多有一个对应点, 反之亦然. 同时考虑到点集中存在出格点, 因此匹配矩阵 $\{M_{ij}\}$ 具有下面约束:

$$\forall j, \sum_{i=1}^{N_1+1} M_{ij} = 1, \forall i, \sum_{j=1}^{N_2+1} M_{ij} = 1 \quad (8)$$

将匹配矩阵考虑到式(4)中, 得到基于薄板样条映射的非刚性匹配的能量函数为:

$$E(M, d, c) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} M_{ij} |X_i - Y_j d - Kc|^2 + \text{trace}(c^T Kc) \quad (9)$$

通过最小化该能量函数, 就可以得到点集之间的匹配矩阵和

映射参数. 为避免陷入局部极小, 提高算法的鲁棒性, 本文利用来自于统计物理学的确定性退火技术来求解式(9)的最小化问题. 为此将对式(9)作进一步的改进和补充:

(1) 在保证式(8)的约束下, 放松对匹配矩阵的约束, 将二值的匹配矩阵转化为连续实数矩阵, 即 $M_{ij} \in \{0, 1\}$ 变为 $M_{ij} \in [0, 1]$, 允许部分匹配的存在, 称这样的匹配矩阵为模糊匹配矩阵. 由后面的算法可以看到, 匹配矩阵的模糊度是由退火温度来控制的, 随着退火温度的降低, $\{M_{ij}\}$ 的模糊度逐渐减小, 逐渐接近二值矩阵, 当温度足够低时, 就会得到最终的二值匹配矩阵.

(2) 在确定性退火技术中, 要求当温度足够高时, 能够很容易求出自由能函数的全局极小点, 因此按照优化理论, 应使自由能函数凸化. 为此在式(9)中增加一阻尼项: $T \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} M_{ij} \log M_{ij}$, 这种熵形式的阻尼项有两个作用: (a) 在高退火温度下, 使自由能函数凸化, 由退火温度 T 控制凸度; (b) 保证匹配矩阵的所有元素非负.

由此完整的非刚性匹配的自由能函数为:

$$E(M, d, c) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} M_{ij} |X_i - Y_j d - Kc|^2 + T \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} M_{ij} \log M_{ij} + \text{trace}(c^T Kc) \quad (10)$$

其中, T 为确定性退火技术的退火温度.

4.2 非刚性匹配算法的实现

通过最小化自由能函数(10), 可以得到点集之间的匹配矩阵和薄板样条映射参数.

假设映射参数已知, 通过 $\partial E / \partial M_{ij} = 0$ 能够得到使自由能函数(10)极小的匹配矩阵 $\{M_{ij}\}$ 为:

$$M_{ij} = \exp \left[- \left(\frac{1}{T} |X_i - Y_j d - Kc|^2 + 1 \right) \right] \quad (11)$$

本文的算法主要包括两个步骤: 首先在当前变换参数 (d, c) 的估计值下, 修正匹配矩阵 $\{M_{ij}\}$; 然后保持匹配矩阵不变, 应用 QR 分解法, 求解 TPS 参数 (d, c) . 在确定性退火技术框架下, 随着控制温度 T 的逐渐降低, 这两步不断迭代进行, 直至收敛.

整个匹配算法描述如下:

初始化: $M_{ij} = 1, d = I, c = 0, T = T_0$

Begin A: 确定性退火技术 Do A until $T = T_{\text{final}}$

Begin B: 交替更新 Do B until M 收敛 or 迭代次数 $> I_0$

$$\text{修正 } M: M_{ij} = \exp \left[- \left(\frac{1}{T} |X_i - Y_j d - Kc|^2 + 1 \right) \right]$$

修正 TPS 参数:

计算 TPS 的核函数; QR 分解; 求解 (d, c)

End B

$$T \leftarrow Tr, \quad T \leftarrow \alpha T, \quad r \text{ 为退火速率}$$

End A

5 实验结果

在这部分, 首先利用人为随机产生的点集对本文提出的非刚性匹配算法进行定量的评估, 并与 Michigan 大学最新提出多项式准穷举搜索 (PQEE, polynomial quasi-exhaustive exploration) 算法^[5]进行比较, 最后将该算法应用于实际脑部核磁共振图像 (MR) 解剖结构的配准和手形图像的特征匹配.

实验中采用的控制参数和变量的初始值为: $T_{\text{init}} = 10(N_1 * N_2)^{1/2}, T_{\text{final}} = 0.01 * (N_1 * N_2)^{-1/2}, N_1, N_2$ 是两个点集的点数; 退火速率 $r = 0.9 \sim 0.95$, 使温度缓慢下降, 以保证算法的鲁棒性; $M_0 = I / N_1 N_2, d_0 = I, c_0 = 0, \alpha = 1$.

利用人为随机产生的点集对本文提出的算法进行定量的评估, 进行了三类实验, 如图 1. 实验中模板点集由 2D 空间 $(0, 1) \times (0, 1)$ 均匀分布的 50 个随机点组成. 第一类实验是在无噪声和出格点的情况下, 对模板点集施加不同程度的非刚性形变生成目标点集. 这里应用的是径向基函数 (RBF) 非刚性映射, RBF 系数从 $N(0, \sigma_1)$ 的高斯分布中选取, σ_1 反映了形变的程度, 增大 σ_1 会产生较大的形变. 这个实验的目的是测试算法对非刚性形变的鲁棒性. 第二类实验是在一定程度的非刚性形变和无出格点的情况下, 施加不同程度的高斯噪声 $N(0, \sigma_2)$, 目的是测试算法对噪声的鲁棒性. 第三类实验是在一定程度的非刚性形变和无噪声的情况下, 加入不同比率的出格点, 目的是测试算法对出格点的鲁棒性. 在每类实验中都与多项式准穷举搜索 (PQEE) 算法^[5]进行了比较. PQEE 算法类似于著名的迭代最近点 (ICP) 算法, 基于搜索一个点集的点在另一个点集中的最近邻点, 它解决了点集之间的一一对应, 而且在性能上优于 ICP.

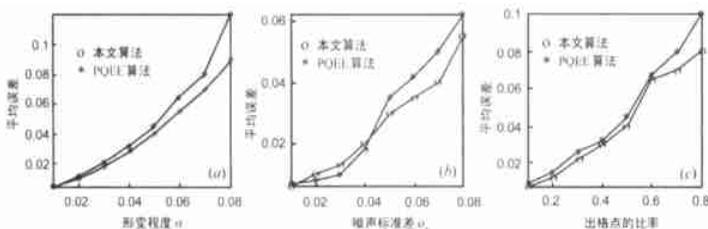


图1 利用人为产生的随机点集, 在不同形变程度、噪声方差和出格点比率下的平均误差

在每类实验中分别选择 10 个随机模板进行实验. 图 1 中的平均误差定义为应用本文算法得到的变形模板与由 RBF 非刚性映射得到的目标模板之间的均方距离. 由图 1(a) 可以看到, 在非刚性形变较小的情况下两种算法的结果接近, 然而

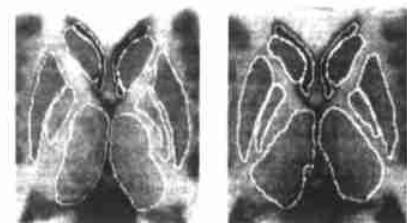


图2 原始的两幅脑部 MR 图像

随着形变的加大, PQEE 算法性能的下降低于本文算法. 在图 1(b) 中, 在噪声方差较小的情况下, PQEE 算法略优于本文的算法, 然而随着噪声方差的不断增大, PQEE 的误差增大较快. 图 1(c) 表明本文的算法对于出格点的鲁棒性优于 PQEE.

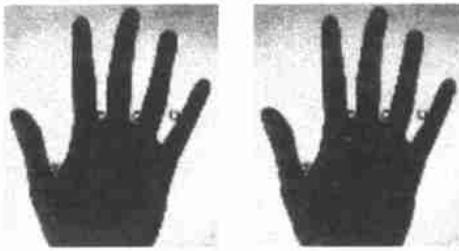


图 3 原始的两幅手形图像

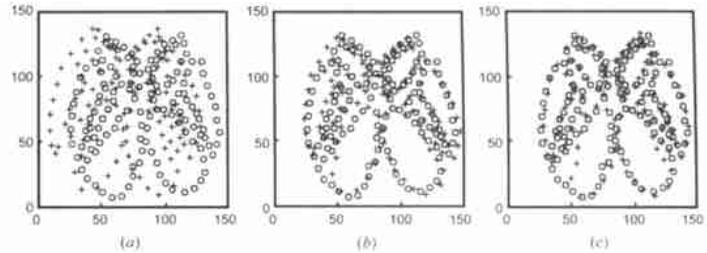


图 4 MR 图像的配准 (a) 由原始 MR 图像提取的解剖结构轮廓的点集, 模板点集 (+) 和目标点集 (°) 的初始位置; (b) 应用本文算法得到的匹配结果, 变换后的模板点集 (+) 和目标点集 (°); (c) 应用多项式准穷举搜索 (PQEE) 算法得到的匹配结果

最后将本文的算法应用于实际脑部 MRI 解剖结构的配准和手形图像的特征匹配。由于不同 MRI 所对应的同一解剖结构之间的变化, 不仅存在刚性变换, 同时也存在非刚性变换, 如果仅考虑两个图像之间的刚性映射, 显然达不到匹配的要求, 而应用本文的非刚性匹配算法, 可以较好地达到结构之间的配准, 如图 4。手形图像中包含有个人独特的生理特征, 是一种重要的身份认证手段, 而两幅手形图像的匹配是认证过程中最为关键的一步。图 5 是从两幅手形图像中提取的特征点集之间的匹配, 可以看到, 通过对手形特征点集之间的匹配, 可以很好地实现手形图像的匹配, 从而为身份认证提供一种较为可靠的依据。

6 结论

本文提出了一种通过匹配图像的特征点集来实现图像匹配的新方法。该方法利用薄板样条函数来表征特征点集之间的非刚性映射, 并将薄板样条映射的求解嵌入到确定性退火技术的框架中。薄板样条的独特之处在于, 它能够将非刚性的映射清楚地分解为仿射变换和非仿射变换, 通过最小化 TPS 的弯曲能可以求解出 TPS 的参数。确定性退火技术的采用, 能够通过退火温度直接控制匹配矩阵的模糊度, 不仅增强了算法的鲁棒性, 而且避免了陷入局部极小。与其它的非刚性匹配算法相比, 该算法不仅保证了图像特征点集之间一一对应的双向约束, 而且具有较强的鲁棒性。实验结果也验证了该算法的有效性和鲁棒性。本文提出的方法不仅可以应用到图像的配准, 而且可以作为一种距离度量, 与各种聚类算法和判别决策相结合, 实现特定模式的认证和识别。

参考文献:

- [1] S Pappu, S Goid, et al. A Framework for Non-Rigid Matching and Correspondence [M]. Advance in Neural Information Processing Systems, MIT press, Cambridge:1996, 8. 795 - 801.
- [2] R Szeliski, S Lavallee. Matching 3D anatomical surfaces with non-rigid deformations using octree splines [J]. Intl J Computer Vision, 1996, 18:171 - 186.
- [3] D Metaxas, E Koh, et al. Multi-level shape representation using global deformations and locally adaptive finite elements [J]. Intl J Computer Vision, 1997, 25(1): 49 - 61.
- [4] T Coates, C Taylor, et al. Active shape models: Their training and ap-

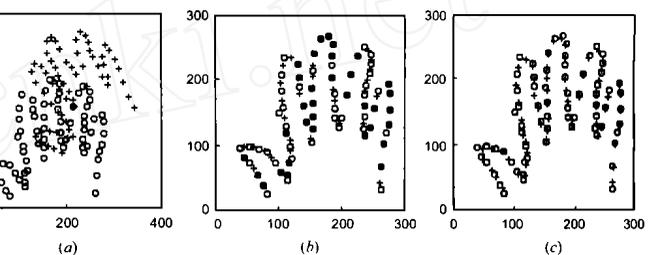


图 5 手形图像的点匹配 (a) 模板点集 (+) 和目标点集 (°) 的初始位置; (b) 应用本文算法得到的匹配结果, 变换后的模板点集 (+) 和目标点集 (°); (c) 应用多项式准穷举搜索 (PQEE) 算法得到的匹配结果

plication [J]. Computer Vision and Image Understanding, 1995, 61 (1):38 - 59.

- [5] N Duta, A KJain, et al. Learning 2D shape models [A]. IEEE Conf. On Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) [C]. Colombia: Fort Collins, 1999, 2. 8 - 14.
- [6] P J Besl, N D McKay. A method for registration of 3-D shapes [J]. IEEE Trans, 1992, PAMI-14(2): 239 - 256.
- [7] J Feldmar, N Ayache. Rigid, affine and locally affine registration of free-form surfaces [J]. Intl J Computer Vision, 1996, 18(2): 99 - 119.
- [8] F L Bookstein. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations [J]. IEEE Trans. 1989, PAMI-11(6): 567 - 585.
- [9] A Rangarajan, H Chui, et al. A new distance measure for non-rigid image matching [A]. Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition (EMMCVPR) [C]. Youk, UK: 1999. 237 - 252.
- [10] K Rose, E Gurewitz, et al. Statistical mechanics and phase transitions in clustering [J]. Physical Review Letters, 1990, 65:945 - 948.
- [11] 杨广文, 郑纬民, 王鼎兴, 李晓明. 一种有效的启发式聚类算法 [J]. 电子学报, 1999, 27(2): 90 - 91.

作者简介:



孙冬梅 女, 1970年11月生于辽宁沈阳, 现为北方交通大学信息研究所博士生, 主要从事生物特征识别技术、图像处理和模式识别方面的研究。