

一种可完全线性化的不同类型混沌系统同步方法

杨 涛, 陈治纲, 邵惠鹤

(上海交大自动化系, 上海 200030)

摘 要: 讨论可完全线性化的不同类型混沌系统之间的同步问题. 根据滑模控制原理求取混沌同步控制形式, 利用扩张状态观测器对系统信息进行渐进估计, 把复杂的滑模控制策略变为可实现的控制方式, 以此实现具有不确定性混沌系统的同步. 以 Duffing 和 Vander Pol 系统为例进行仿真, 效果良好.

关键词: 混沌同步; 保密通讯; 滑模控制; 扩张状态观测器

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 10-1463-03

Synchronization of Fully Linearizable Different Chaotic Systems

YANG Tao, CHEN Zhigang, SHAO Huihe

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The synchronization of strictly different chaotic systems, which are fully linearizable, is discussed in this paper. A chaotic synchronizing controller is provided based on the sliding mode control design. To make the controller physically realizable, available synchronizing error is used to estimate system uncertainty, such as the structure difference or parameter mismatching, based on the extended states observer (ESO), and then this controller is used to synchronizing two continuous chaotic systems. Illustrative example of the synchronization of Duffing and Van der Pol oscillators is proposed to show the effectiveness of this method.

Key words: chaotic synchronization; secure communication; sliding mode control; extended states observer

1 引言

混沌同步因其广阔的应用前景而成为当今研究的热点, 出现了各种实现混沌信号或混沌系统同步控制的机理与方法, 但大多是建立在混沌系统精确数学模型的基础上. 然而许多动力系统具有参数或模型的不确定性, 尤其是随着环境的改变, 系统的参数可能会发生变化. 一些学者从控制理论角度出发, 使用自适应估计策略来解决这些问题^[1,2], 且取得了一定的成功, 不过这些方法的前提是系统的结构必须清楚, 得到的控制形式有时很复杂^[3].

本文讨论一种可完全线性化的不同类型混沌系统之间的同步问题. 滑模控制是一种非线性控制策略, 曾经广泛用于具有不确定性的非线性系统控制中^[3], 文献[4]使用滑模控制思想对混沌系统进行控制, 文献[5]把滑模控制和变结构控制相结合, 实现了离散混沌系统的控制和同步, 但使用了大量的系统信息, 所得到的控制方式在实际工程中实现的难度较大. 本文把滑模控制和扩张状态观测器^[6]的思想相结合, 先根据滑模控制原理求取混沌同步控制形式, 再利用扩张状态观测器对系统信息进行渐进估计, 把复杂的滑模控制策略变为可实现的控制方式, 以此实现具有不确定性的连续混沌系统同步.

2 同步误差系统的线性化描述

对于 n 维发送混沌系统:

$$\dot{X} = F(X, p), y_M = C_M X \quad (1)$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $p = \{p_i, i = 1, \dots, m\}$ 为系统参数, y_M 为系统的输出, 相当于传输信号(驱动信号).

相同维数的接收系统:

$$\dot{Y} = G(Y, p') + Bu, y_s = C_s Y \quad (2)$$

其中 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$, $p' = \{p'_i, i = 1, \dots, m\}$ 为系统参数. u 为需求的控制策略, 一般有 $C_M = C_s = C$. 当 $f_i = g_i (i = 1, \dots, n)$ 、 $p_j = p'_j (j = 1, \dots, m)$ 时, 式(1)、(2)的同步很容易实现. 不过这在工程中出现的可能性很低. 本文的目标是在上述条件不满足时, 只依靠传输信号 y_m 来设计控制策略 u 而实现同步.

定义同步误差:

$$E = (e_1, \dots, e_n)^T = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)^T;$$

$$E = (G(Y, p') - F(X, p)) + Bu, y_{out} = CE \quad (3)$$

其中 y_{out} 表示同步误差系统的输出 $y_s - y_M$. 于是系统的同步就变为一个稳定问题: 在式(3)的部分状态可观测和 G 的情况不精确的情况下, 设计控制量 u 把式(3)稳定到坐标原点 $(0, 0, \dots, 0)$. 首先对式(3)进行坐标变换: $Z = \Phi(E)$, 使 Z 具有如下的规范型或类规范型/变换 Φ 对于许多混沌动力系统

都是存在的^[7]):

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, 1 \leq i \leq \rho-1 \\ \dot{z}_\rho &= A(Z, V, \mathbf{G}, \rho') + u \\ V_j &= \xi_j(Z, V), \rho \leq j \leq n, \rho \leq n \\ y &= \varphi(Z, V) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 y 是输出. $\rho = n$ 时, 式(4)为完全可线性化的非线性系统; $\rho < n$ 时, 式(4)为部分可线性化的非线性系统^[4]. 本文只讨论 $\rho = n$ 的情况(如 Duffing 系统、Vander Pol 系统等). 此时系统式(4)变为标准规范形($z_i = e_i = y_i - x_i$):

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n &= A(Z, \mathbf{G}, \rho') + u \\ y &= \varphi(Z) \end{aligned} \quad (5)$$

3 滑模控制策略在可线性化的混沌系统同步中的应用

对于误差系统式(5), 利用扩张状态观测器的思想, 把系统的不确定性 $A(\cdot)$ 看为误差系统一个新的状态而形成如下的扩张系统:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n &= z_{n+1} \\ \dot{z}_{n+1} &= \Xi(Z, u) + \dot{u} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\Xi(\cdot) = \sum_{k=1}^{n-1} z_{k+1} \partial_k A(\cdot) + (A(\cdot) + u) \partial_n A(\cdot), \partial_k A(\cdot) = \partial A / \partial z_k, k = 1, 2, \dots, n$. 根据滑模控制思想, 定义如下的滑动面^[9]:

$$S = z_{n+1} - z_{0(n+1)} + \int_0^t \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j dt = 0 \quad (7)$$

其中 $z_{0(n+1)}$ 是 z_{n+1} 的初始值. 式(7)可以表示为:

$$\dot{z}_{n+1} = - \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j \quad (8)$$

其初始条件为 $z_{n+1}(0) = z_{0(n+1)}$, 于是滑模动力系统(具有理想特性的系统)可以描述为:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, 1 \leq i \leq n \\ \dot{z}_{n+1} &= - \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j \end{aligned} \quad (9)$$

$c_j, j = 1, 2, \dots, n+1$ 为使 $s^{n+1} + c_{n+1}s^n + \dots + c_1$ 是 Hurwitz 稳定. 使用如下的到达规则^[5]:

$$\dot{S} = \alpha S - \beta \cdot \text{sgn}(S) \quad (10)$$

其中 $0 < \alpha < 1, \beta > 0$. 由式(7)、(10)有:

$$\alpha S - \beta \cdot \text{sgn}(S) = \dot{z}_{n+1} = - \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j \quad (11)$$

即有:

$$\dot{z}_{n+1} = \Xi(Z, \eta, u) + \dot{u} = \alpha S - \beta \cdot \text{sgn}(S) - \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j \quad (12)$$

即有:

$$u(t) = \int_0^t [\alpha S - \beta \cdot \text{sgn}(S) - \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j - \Xi(Z, \eta, u)] dt \quad (13)$$

其中足够大的 β 对于混沌同步的实现具有重要意义, 其大小

与系统结构信息有关, 这可以通过 Lyapunov 稳定性原理来定性讨论. 把式(13)代入扩张系统式(6)得到:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{z}_n &= z_{n+1} \\ \dot{z}_{n+1} &= \alpha S - \beta \cdot \text{sgn}(S) - \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j \end{aligned} \quad (14)$$

定义 Lyapunov 函数为 $V = \frac{1}{2} S^2$, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S(\dot{z}_{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} c_j z_j) = S(\alpha S - \beta \cdot \text{sgn}(S)) \\ &= \alpha S^2 - \beta |S| \leq |S| (|S| - \beta) \end{aligned} \quad (15)$$

由式(7)看出, $S = L(z_1, \dots, z_{n+1}) = M(e_1, \dots, e_n) = N(X, Y)$, 且混沌系统一个典型的特征是其整体稳定性^[8], 故 S 是有界的, 所以当 β 足够大时, $V \leq 0$, 即该动力系统是稳定的. 这里虽然没有定量给出 β 的值, 但得到的结论与文献[4]是相同的, 即当 β 足够大时, S 将收敛到 0, 同步误差系统具有式(9)的特性, 即式(13)将保证同步的实现^[4]. 如果系统结构很精确, 则可以定量给出保证同步实现的 β 值^[4].

从式(7)、(13)看出, 滑模控制措施的实现需要使用大量的系统信息($\Xi(\cdot)z_i, i = 1, \dots, n$), 这对于保密通信来说是一个很高的要求. 为了保密性能的提高, 外界能使用的信息应尽可能的少, 因此式(7)、(13)在工程中实现的难度较大. 本文根据扩张状态观测器(ESO)的原理, 挖掘可观测的同步误差(假设以 x_1 为传输信号, 则 $z_1 = \Phi(y_1 - x_1) = y_1 - x_1$ 为可测变量)所包含的信息, 利用如下的观测器对系统信息($\Xi(\cdot), z_i, i = 1, \dots, n$)进行渐进估计:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_i &= \hat{z}_{i+1} - \theta_i \cdot \phi_i(z_1 - \hat{z}_1), 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\hat{z}}_n &= \hat{z}_{n+1} + \theta_n \cdot \phi_n(z_1 - \hat{z}_1) \\ \dot{\hat{z}}_{n+1} &= - \theta_{n+1} \cdot \phi_{n+1}(z_1 - \hat{z}_1) \end{aligned} \quad (16)$$

选择恰当的系数 θ_i 和函数 $\phi_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, \rho$), (Z, \hat{z}_{n+1}) 将实现对式(6)中($z_i, i = 1, \dots, n, \Xi(\cdot)$)的重构($u = 0$)^[5]. 这里采用如下形式的 θ_i 和 $\phi_i(\cdot)$:

$$\theta_i = L^i \cdot \lambda_i, \phi_i(z_1 - \hat{z}_1) = \text{abs}(z_1 - \hat{z}_1)^{a_i} \cdot \text{sgn}(z_1 - \hat{z}_1), a_i > 0 \quad (17)$$

$\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数. 其中 λ_i 选择的原则为使多项式 $s^{n+1} + \lambda_{n+1}s^n + \dots + \lambda_1$ 是 Hurwitz 稳定, 增益 L 影响对系统不确定性估计的逼近速率^[7]. 在式(20)中, \hat{z}_{n+1} 包含的是系统的结构信息 $A(\cdot)$, 因此式(6)中的 $z_{n+1} = A(\cdot) + u = \hat{z}_{n+1} + u$, $\Xi(\cdot) = A(\cdot) = \hat{z}_{n+1}$. 于是式(7)、(13)分别变为:

$$S = \hat{z}_{n+1} + u - \hat{z}_{0(n+1)} + \int_0^t [\sum_{j=1}^n c_j \hat{z}_j + c_{n+1}(\hat{z}_{n+1} + u)] dt = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t [\alpha S - \beta \cdot \text{sgn}(S) - \sum_{j=1}^n c_j \hat{z}_j \\ &\quad + c_{n+1}(\hat{z}_{n+1} + u)] - \hat{z}_{n+1} dt \end{aligned} \quad (19)$$

控制量式(19)只使用了代表系统不确定性的估计量 \hat{z}_{n+1} , 状

态的估计值 \hat{z} , 这些值由式(16)提供, 而式(16) 仅仅使用可测量的同步误差 $(z_1 - x_1)$, 因此式(18)、(19) 是可实现的控制器。

4 仿真实例

为了验证上述策略的适用性, 以 Duffing 和 Vander Pol 的同步为例进行仿真, 效果良好。

二维 Duffing 系统:

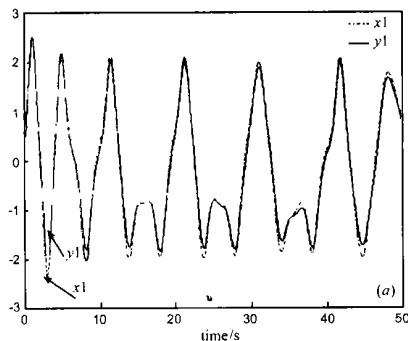
$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 1.8x_1 - 0.1x_2 - x_1^3 + 1.1\cos(0.4t) \quad (20)$$

二维 Vander Pol 系统:

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = -0.1(1 - y_1)y_2 - y_1^3 + 0.3\cos(1.0t) + u \quad (21)$$

式(20)、(21) 的同步误差系统 $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, u = 0)$ 可以表示为标准规范型: $e_1 = e_2, \dot{e}_2 = \Theta, \Theta$ 包含了式(20)、(21) 之间的系统差异, 扩张状态观测器式(16) 可以表示为 $\hat{Z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3)^T$:

$$\dot{\hat{z}}_1 = \hat{z}_2 - Lg_1 \cdot (\text{abs}(z_1 - \hat{z}_1))^{\alpha_1} \text{sign}((z_1 - \hat{z}_1))$$



$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_2 &= \hat{z}_3 - L^2 g_2 \cdot (\text{abs}(z_1 - \hat{z}_1))^{\alpha_2} \text{sign}((z_1 - \hat{z}_1)) \\ \dot{\hat{z}}_3 &= -L^3 g_3 \cdot (\text{abs}(z_1 - \hat{z}_1))^{\alpha_3} \text{sign}((z_1 - \hat{z}_1)) \end{aligned} \quad (22)$$

其中 \hat{z}_3 包含了系统之间的结构信息。于是滑模控制器式(18)、(19) 可以表示为:

$$S = \hat{z}_3 + u - \hat{z}_3(0) + \int_0^t [c_3(\hat{z}_3 + u) + c_2\hat{z}_2 + c_1\hat{z}_1] dt \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t [\alpha S - \beta \text{sgn}(S) - (c_3(\hat{z}_3 + u) + c_2\hat{z}_2 \\ &\quad + c_2\hat{z}_2 + c_1\hat{z}_1) - \dot{\hat{z}}_3] dt \end{aligned} \quad (24)$$

在式(23)、(24) 的作用下, 系统初始条件为: $(0.3, 2.1), (0.1, 1.0)$, 选择参数 $u(0) = 0, \alpha = 0.6, \beta = 0.08, [c_3, c_2, c_1] = [6, 32, 154], L = 50, (g_1, g_2, g_3) = (1.0, 2.0, 3.0)$ 同步效果良好, 结果如图 1 所示。

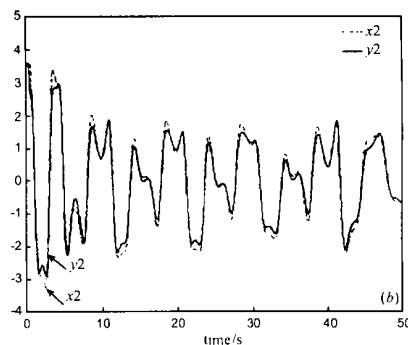


图 1 Duffing 与 Vander Pol 系统的同步。(a) (x_1, y_1) vs time(s); (b) (x_2, y_2) vs time(s)。

5 结论

本文把滑模控制策略和扩张状态观测器(ESO) 思想相结合, 实现一类可完全线性化的连续混沌系统的同步。先根据滑模控制原理求取控制形式, 再利用 ESO 的思想, 挖掘可测同步误差中所隐含的系统结构信息, 对系统的不确定性(包括系统结构或参数信息) 进行渐进估计, 把复杂的滑模控制策略变为可实现的控制方式, 以 Duffing 和 Vander Pol 的同步为例进行仿真, 效果良好。

参考文献:

- [1] Wu C W, Yang T & Chua L O. On adaptive synchronization and control of nonlinear dynamical systems [J]. Int. J. Bifur. and Chaos. 1996, 6(3): 455- 471.
- [2] Chua L O, Yang T, Zhong G Q & Wu C W. Synchronization of chaotic circuits with time varying channels and parameters [J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundamental Theory. Appl. 1996, 43(10): 862- 868.
- [3] Sirir Ramirez H. On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems [J]. Int. J. Cont. 1993(57): 1039- 1061.
- [4] Her Temg Yua, Chua' G Kuang Chen, Chieh Li Chen. Sliding mode control of chaotic systems with uncertainty [J]. Int. J. Bifur. and Chaos. 2000, 10(5): 1139- 1147.

- [5] The Lu Liao, Nann Sheng Huang. Control and synchronization of discrete time chaotic systems via variable structure control technique [J]. Physics Letter A, 1997, 234(1): 262- 268.
- [6] Han Jing qing. The "Extend state observer" of a class of uncertain systems [J]. Control and Decision, 1995, 10(1): 85- 88.
- [7] Ricard Femat, Jose Alvarez Ramirez, etc. Adaptive synchronization of high order chaotic systems: a feedback with low order parameterization [J]. Physical D, 2000, 139(2): 231- 246.
- [8] Elman Mohammed Oghu Shahverdiev. Boundedness of dynamical systems and chaos synchronization [J]. Phys. Rev. E, 1999, 60(4): 3905- 3909.
- [9] Chen C L, Lin W Y. Sliding mode control for nonlinear systems with global invariance [A]. Proc. Instn. Mech [C]. Engrs: Instn. Mech, 1997.

作者简介:

杨 涛 男, 1972 年出生于四川遂宁, 上海交通大学自动化系博士生, 目前主要研究领域为混沌同步及其应用。

陈治纲 男, 1974 出生于河南新乡, 上海交通大学自动化系博士生, 目前主要研究课题为先导过程控制。

邵惠鹤 男, 1936 出生于上海, 上海交通大学自动化系教授, 博士生导师。