

# 运动薄壳体上电磁场平均边界条件

刘宝林<sup>1</sup>, 范 辉<sup>2</sup>, 马信山<sup>3</sup>

(1. 清华大学计算机与信息管理中心, 北京 100084; 2. 清华大学自动化系, 北京 100084; 3. 清华大学电机工程与应用电子技术系, 北京 100084)

**摘 要:** 考虑到采用电磁场精确边界条件处理电磁屏蔽问题的复杂性, 为简化电磁屏蔽边值问题的分析及计算, 本文利用局部平面波近似法, 导出了运动薄导体壳上电磁场的平均边界条件, 计算结果表明用该边界条件完全可以取代电磁场的精确边界条件。

**关键词:** 电磁场; 运动薄导体壳; 平均边界条件

**中图分类号:** TM 154.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 06-0780-04

## Averaged Boundary Conditions for Electromagnetic Fields on a Moving Thin Conducting Shell

LIU Bao-lin<sup>1</sup>, FAN Hui<sup>2</sup>, MA Xin-shan<sup>3</sup>

(1. Computer and Information Management Center, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

3. Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Considering the complexity of solution for the problem of electromagnetic shielding by using the precise boundary condition, in order to simplify analysis and calculation of the boundary value problem of electromagnetic shielding, averaged boundary condition on a moving thin conducting shell is derived out by using approximation of locally plane wave. General vector expressions of the averaged boundary condition are given. Its applied limit is investigated by computer simulation and the result shows that the precise boundary condition of electromagnetic field can be replaced by the averaged boundary condition in this paper.

**Key words:** electromagnetic field; moving thin conducting shell; averaged boundary condition

### 1 引言

利用电磁场中精确边界条件处理电磁屏蔽问题是常用的方法, 但由于数学模型的建立较为复杂, 加之运算量大, 给处理问题造成许多不便。长期以来, 人们试图建立一种近似边界条件来取代电磁场中精确边界条件。1948年苏联科学家里昂托维奇(Льонтович)在研究无线电波绕地球传播问题时提出了阻抗边界条件, 它是阻抗性物体表面上电场和(或)磁场所满足的一种关系式<sup>[1]</sup>, 用Льонтович阻抗边界条件替代电磁场中经典边界条件, 可以大大简化许多非理想导体目标的电磁散射分析。作者基于这种思想研究了带有运动介质的薄壳体的电磁屏蔽问题, 利用局部平面波近似法, 导出了运动薄壳体上电磁场的一种新的近似边界条件, 称之为平均边界条件, 该边界条件与薄壳体两侧的电磁场有关, 而与薄壳体体内的电磁场无关。利用该边界条件在处理运动薄壳的电磁屏蔽边值问题时, 将薄壳体用一理想的面 $S$ 替代, 使得该面与薄壳体的中界面重合, 在该面上引入平均边界条件, 这样可将三个区域内的电磁场问题转化为两个区域内的电磁场问题, 大大地简

化了数学模型的建立及运算步骤, 且所得近似传输系数的值与利用精确边界条件下薄壳准确传输系数的值符合得很好。

### 2 平均边界条件的推导

在均匀的各向同性的空间中有一封闭的薄壳体 $S_\Delta$ , 厚度为 $\Delta$ , 内外面 $S_1$ 和 $S_2$ 非常光滑。假设在薄壳体内介质以速度 $V$ 沿薄壳体表面切线方向运动。用 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 分别表示薄壳体 $S_\Delta$ 的内侧和外侧区域, 在区域 $\Omega_j(j=1, 2)$ 内, 介质的电导率、介电常数和磁导率分别为 $\sigma_j=0$ ,  $\epsilon_j$ 和 $\mu_j$ , 薄壳体受到来自区域 $\Omega_2$ 内初始场 $E_0, H_0$ 的作用, 在区域 $\Omega_j$ 内电磁场分别用 $E_j, H_j$ 表示, 且 $E_2=E_0+E'_2, H_2=H_0+H'_2$ , 其中 $E'_2, H'_2$ 为反射场, 假定时谐因子为 $e^{-iq}$ 。

电磁场 $E_j, H_j$ 在区域 $\Omega_j$ 内满足麦克斯维方程

$$\text{rot } H_j = -i\omega\epsilon_j E_j, \text{rot } E_j = i\omega\mu_j H_j \quad (1)$$

在薄壳体 $S_\Delta$ 内, 电磁场 $E, H$ 满足如下形式的麦克斯维方程<sup>[2,3]</sup>

$$\text{rot } E = i\omega\mu H, \text{rot } H = -i\omega\epsilon E + \text{grad}[V \times H] \quad (2)$$

其中  $\epsilon' = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$ ,  $\omega$ —场的角频率.

下面将推导平均边界条件. 首先将薄壳体进行离散, 这样离散后的每一小块可以看成平面块, 且每一小块的各个参数都是恒定的, 为此, 可借助于以恒定速度  $V = V_x e_x + V_y e_y$  运动的无限大的平面块  $D(0 \leq z \leq \Delta)$  来导出平均边界条件. 设  $\Gamma_1$  ( $z = 0$ ) 和  $\Gamma_2$  ( $z = \Delta$ ) 分别表示平面块  $D$  的两个面, 在  $D$  内电磁场  $E, H$  满足方程 (2), 而场  $E_j, H_j$  在相应区域  $D_1(z < 0)$  和  $D_2(z > \Delta)$  内满足方程 (1).

由方程 (2) 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} H_\tau &= i\omega\epsilon' [n \times E] + \text{grad}_\tau \frac{1}{i\omega\mu} (\text{rot} E, n) - \frac{\sigma}{i\omega} V (\text{rot} E, n) \\ \frac{\partial}{\partial z} E_\tau &= -i\omega\mu [n \times H] + \text{grad}_\tau \left[ -\frac{1}{i\omega\epsilon'} (\text{rot} H, n) - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon'} (V \times H, n) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $H_\tau = [n \times [H \times n]]$ ,  $E_\tau = [n \times [E \times n]]$ ,  $n = e_z$ — $D$  表面上的单位法向量.

在区间  $[0, \Delta]$  上, 对式 (3) 关于  $z$  积分, 得

$$\begin{aligned} E_\tau|_{z=\Delta} - E_\tau|_{z=0} &= -i\omega\mu [n \times \int_0^\Delta H_\tau dz] \\ &\quad - \text{grad}_\tau \left[ \frac{1}{i\omega\epsilon'} (\text{rot} \int_0^\Delta H_\tau dz, n) - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon'} (V \times \int_0^\Delta H_\tau dz, n) \right] \\ H_\tau|_{z=\Delta} - H_\tau|_{z=0} &= i\omega\epsilon' [n \times \int_0^\Delta E_\tau dz] \\ &\quad + \text{grad}_\tau \left[ \frac{1}{i\omega\mu} (\text{rot} \int_0^\Delta E_\tau dz, n) - \frac{\sigma}{i\omega} V (\text{rot} \int_0^\Delta E_\tau dz, n) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

计算平均值  $\tilde{H}_\tau = \int_0^\Delta H_\tau dz$  和  $\tilde{E}_\tau = \int_0^\Delta E_\tau dz$ .

在一般情况下, 薄壳体  $S_\Delta$  内场  $E, H$  的结构是未知的, 因此, 每一局部小平面积中的场可用平面场的线性组合近似表示, 即采用局部平面波近似法<sup>[2]</sup>. 这样区域  $D$  内的场可表示成沿  $Oz$  轴正方向和负方向传播的平面场的线性组合的形式

$$H = \sum_{j=1}^2 (A_j H_j^{(+)} + B_j H_j^{(-)}) \quad (5)$$

$$E = \sum_{j=1}^2 (A_j E_j^{(+)} + B_j E_j^{(-)}) \quad (6)$$

其中麦克斯维方程 (2) 的平面解由如下表达式确定:

$$H_1^{(\pm)} = H_0 (e_y \mp f_0 e_z) \Phi^{(\pm)}, H_2^{(\pm)} = H_0 (e_x \mp g_0 e_z) \Phi^{(\pm)},$$

$$E_1^{(\pm)} = E_0 C (\pm f_1 e_x \pm f_2 e_y + f_3 e_z) \Phi^{(\pm)}, \quad (7)$$

$$E_2^{(\pm)} = E_0 C (\pm g_1 e_x \pm g_2 e_y + g_3 e_z) \Phi^{(\pm)}$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi^{(\pm)} &= \exp[i(\alpha x + \beta y \pm v z)], f_1 = -\alpha \omega \mu V_x - i(K^2 - \alpha^2), f_2 = \\ &\beta(i\alpha - \omega \mu V_x), f_3 = v(i\alpha - \omega \mu V_x), g_1 = \alpha(\omega \mu V_y - i\beta), g_2 = \beta \omega \mu V_y \\ &+ i(K^2 - \beta^2), g_3 = v(\omega \mu V_y - i\beta), f_0 = \frac{\beta}{v}, g_0 = \frac{\alpha}{v}, C = \\ &\frac{K_0}{\omega^2 \mu_0 \epsilon' v}, K_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, v = \sqrt{K^2 - \alpha^2 - \beta^2 - i\omega \mu (\alpha V_x + \beta V_y)}, \end{aligned}$$

$$0 \leq \arg v < \pi, K = \omega \sqrt{\epsilon' \mu}, 0 \leq \arg K < \pi, H_0 = -i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0,$$

$E_0$ —带量纲的电场强度标量:  $\alpha = K_2 \cos \varphi_0 \sin \theta_0$ ,  $\beta = K_2 \sin \varphi_0 \sin \theta_0$ ,  $a = K_2 \cos \theta_0$ ,  $K_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ ;  $\theta_0, \varphi_0$ —球角, 决定着局部坐标系  $(v_1, v_2, n)$  下初始平面场的波向量  $(\alpha, \beta, a)$ , 其中  $v_1, v_2$  为与面  $S_2$  相切的单位向量,  $n$  为面  $S_2$  上的单位法向量, 方向指向区域  $\Omega_2$ .

下面来确定式 (5) 和式 (6) 中的未知系数  $A_j, B_j$

$$\text{设 } H_\tau|_{z=0} = H_0 (a_1 e_x + b_1 e_y) \phi(\alpha, \beta) \equiv H_\tau^{(1)}, \quad (8)$$

$$H_\tau|_{z=\Delta} = H_0 (a_2 e_x + b_2 e_y) \phi(\alpha, \beta) \equiv H_\tau^{(2)}$$

$$E_\tau|_{z=0} = E_0 (c_1 e_x + d_1 e_y) \phi(\alpha, \beta) \equiv E_\tau^{(1)}, \quad (9)$$

$$E_\tau|_{z=\Delta} = E_0 (c_2 e_x + d_2 e_y) \phi(\alpha, \beta) \equiv E_\tau^{(2)}$$

其中  $\phi(\alpha, \beta) = \exp[i(\alpha x + \beta y)]$ ;  $H_\tau^{(1)}, H_\tau^{(2)}, E_\tau^{(1)}, E_\tau^{(2)}$ ——为场在面  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  上切线方向分向量的边界值.

将式 (7) 代入式 (5), 得

$$H_\tau = H_0 [(A_2 e^{ivz} + B_2 e^{-ivz}) e_x + (A_1 e^{ivz} + B_1 e^{-ivz}) e_y] \phi(\alpha, \beta) \quad (10)$$

结合式 (8), 计算得

$$A_1 = \frac{1}{g} (-b_1 e^{-iv\Delta} + b_2), A_2 = \frac{1}{g} (-a_1 e^{-iv\Delta} + a_2) \quad (11)$$

$$B_1 = \frac{1}{g} (b_1 e^{iv\Delta} - b_2), B_2 = \frac{1}{g} (a_1 e^{iv\Delta} - a_2)$$

其中  $g = 2i \sin v \Delta$ .

将式 (11) 代入式 (10), 得

$$H_\tau = \frac{\sin v(\Delta - z)}{\sin v \Delta} H_\tau^{(1)} + \frac{\sin vz}{\sin v \Delta} H_\tau^{(2)} \quad (12)$$

同理可得

$$E_\tau = \frac{\sin v(\Delta - z)}{\sin v \Delta} E_\tau^{(1)} + \frac{\sin vz}{\sin v \Delta} E_\tau^{(2)} \quad (13)$$

在区间  $[0, \Delta]$  上, 对式 (12) 和式 (13) 分别关于  $z$  积分, 计算平均值

$$\int_0^\Delta H_\tau dz = \delta (H_\tau^{(1)} + H_\tau^{(2)}), \int_0^\Delta E_\tau dz = \delta (E_\tau^{(1)} + E_\tau^{(2)}) \quad (14)$$

其中  $\delta = \frac{1}{v} \lg \frac{v\Delta}{2}$ .

将式 (14) 代入式 (4), 并考虑到场在面  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) 上切线方向分向量的连续性, 得到如下形式的平均边界条件, 该边界条件与  $D$  两侧的电磁场有关, 而与  $D$  内的电磁场无关

$$\begin{aligned} [(E_2 - E_1) \times n] &= -i\omega\mu \delta [n \times [(H_1 + H_2) \times n]] \\ &\quad - \frac{1}{i\omega} \int \text{grad} \frac{1}{\epsilon'} (\text{rot} \delta (H_1 + H_2), n) \times n \\ &\quad + \frac{1}{i\omega} \int \text{grad} \frac{\sigma}{\epsilon'} ([V \times \delta (H_1 + H_2)], n) \times n \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} [(H_2 - H_1) \times n] &= i\omega\epsilon' \delta [n \times [(E_1 + E_2) \times n]] \\ &\quad + \frac{1}{i\omega} \int \text{grad} \frac{1}{\mu} (\text{rot} \delta (E_1 + E_2), n) \times n \\ &\quad - \frac{\sigma}{i\omega} \int \text{rot} \delta (E_1 + E_2), n [V \times n] \end{aligned}$$

其中  $\delta = \frac{1}{v} \lg \frac{v\Delta}{2}$ ,  $v = \sqrt{K^2 - \alpha^2 - \beta^2 - i\omega \mu (\alpha V_x + \beta V_y)}$ .

将平均边界条件式 (15) 推广到薄壳体  $S_\Delta$  上. 式 (15) 中场  $E_j, H_j$  相应地在点  $M_j$  得到计算, 点  $M_j$  为薄壳体中界面  $S$  上的法向量  $n$  与薄壳体内外面  $S_j$  ( $j = 1, 2$ ) 的交点, 法向量  $n$  的

方向指向区域  $\Omega_2$ .

平均边界条件式(15)中的系数与初始场有关. 若薄壳体本身介质的运动速度很小( $|V| \ll c$ ), 则  $v \approx K$ , 考虑到式(1), 得

$$\begin{aligned} [(E_2 - E_1) \times n] &= -iN[n \times [(H_1 + H_2) \times n]] \\ &\quad - \omega P[n \times \text{grad}(\varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_2 E_2, n)] \\ &\quad + iQ[n \times \text{grad}([V \times (H_1 + H_2)], n)] \quad (16) \\ [(H_2 - H_1) \times n] &= iF[n \times [(E_1 + E_2) \times n]] \\ &\quad - \omega G[n \times \text{grad}(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2, n)] \\ &\quad - \omega M(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2, n)[V \times n] \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} N &= \omega \mu \delta, P = \delta / \omega \epsilon', Q = \sigma \mu \delta / \omega \epsilon', F = \omega \delta \epsilon', G = \delta / \omega \mu, M = \\ &\sigma \delta / \omega, \delta = \frac{1}{K} \lg \frac{K \Delta}{2}, K = \omega \sqrt{\epsilon' \mu} \end{aligned}$$

### 3 算例

在真空中有一均匀薄板, 厚度为  $\Delta$ , 其表面尺寸远大于其厚度和场源距薄板的距离, 故在分析中将其表面视为无限大平面, 设其上下表面分别为  $\Gamma_2(z = \Delta/2)$  和  $\Gamma_1(z = -\Delta/2)$  (如图 1 所示), 薄板的介电常数、电导率和磁导率分别为  $\varepsilon, \sigma$  和  $\mu$ . 薄板内任意一点介质的运动速度为  $V = V_x e_x + V_y e_y$ , 其中  $V_x, V_y$  为常数. 区域  $D_1, D_2$  内为真空, 介电常数和磁导率分别为  $\varepsilon_0$  和  $\mu_0$  (电导率  $\sigma_0 = 0$ ). 薄板受到来自区域  $D_1$  内初始平面场  $\{E_0, H_0\}$  的作用, 且其传播方向由球角  $\theta_0, \phi_0$  确定. 结果在区域  $D_j(j = 1, 2)$  内形成场  $\{E_j, H_j\}$ , 且  $E_1 = E_0 + E'_1, H_1 = H_0 + H'_1$ , 其中  $\{E'_1, H'_1\}$  为反射场. 当薄板非常薄时, 为简化电磁场的计算, 将薄板用其中界面  $\Gamma(z = 0)$  来替代, 然后在该中界面上利用作者所得到的平均边界条件, 以取代薄板两侧的界面条件, 这样就将三个区域内的电磁场问题转化为两个区域内的电磁场问题.

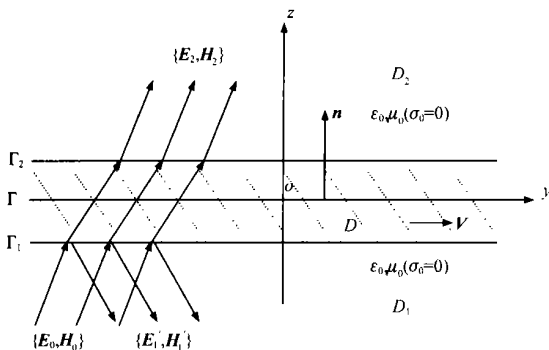


图 1 运动薄板对平面电磁波的屏蔽作用  
计算磁场强度  $H_2^{[4]}$ , 从而确定近似传输系数

$$T_1 = \frac{|H_2|}{|H_0|} \quad (17)$$

通过编程上机计算, 在下列参数变化范围内, 得到了运动薄板近似传输系数的值  $T_1$ , 同时与精确边界条件下运动薄板精确传输系数的值  $T_2^{[3]}$  作了比较, 发现两种结果符合得很好, 这表明本文中的方法不仅是简便易行的, 且足可以准确描述运动薄板两侧电磁场的分布情况.

$$0 < f \leq 10^8 (\text{Hz}), 57 \times 10^2 (\text{S/m}) \leq \sigma \leq 57 \times 10^{10} (\text{S/m}), 1 \leq \mu / \mu_0 \leq 10^4, \Delta \leq 0.01 (\text{m}), 0 \leq |V| \ll 3 \times 10^8 (\text{m/s}), \Delta/h \leq 15$$

其中  $f = \omega / 2\pi, h = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0}}$  ——透入深度,  $\Delta/h$  为薄板厚度与透入深度之比.

表 1 运动薄板近似传输系数与精确传输系数的比较

$\Delta(\text{m})$	$10^{-4}$	0.001	0.003	0.01	0.017
$\Delta/h$	0.15	1.5	4.5	15	25.5
$T_1$	0.658E-6	0.594E-7	0.310E-8	0.853E-13	0.290E-16
$T_2$	0.658E-6	0.594E-7	0.310E-8	0.853E-13	0.235E-17

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} 10^{-9} (\text{F/m}), \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{H/m}), \sigma = 57 \times 10^6 (\text{S/m}), f = 10^4 (\text{Hz}), \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \phi_0 = 0, A = 1, B = 0, V_x = 0, V_y = 500 \\ &(\text{m/s}) \end{aligned}$$

表 2 运动薄板近似传输系数与精确传输系数的比较

$f(\text{Hz})$	$10^4$	$10^6$	$10^7$	$10^8$	0.3E9
$\Delta/h$	0.15	1.5	4.74	15	25.98
$T_1$	0.658E-6	0.594E-6	0.769E-7	0.853E-11	0.161E-14
$T_2$	0.658E-6	0.594E-6	0.769E-7	0.853E-11	0.252E-15

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} 10^{-9} (\text{F/m}), \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{H/m}), \sigma = 57 \times 10^6 (\text{S/m}), \Delta = 10^{-4} (\text{m}), \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \phi_0 = 0, A = 1, B = 0, V_x = 0, V_y = 500 \\ &(\text{m/s}) \end{aligned}$$

表 3 运动薄板近似传输系数与精确传输系数的比较

$\sigma(\text{S/m})$	57E6	57E8	57E9	57E10	11.4E11
$\Delta/h$	0.15	1.5	4.74	15	21.22
$T_1$	0.658E-6	0.594E-8	0.769E-10	0.862E-15	0.432E-16
$T_2$	0.658E-6	0.594E-8	0.769E-10	0.853E-15	0.121E-17

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} 10^{-9} (\text{F/m}), \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{H/m}), f = 10^4 (\text{Hz}), \Delta = 10^{-4} (\text{m}), \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \phi_0 = 0, A = 1, B = 0, V_x = 0, V_y = 500 (\text{m/s}) \end{aligned}$$

表 4 运动薄板近似传输系数与精确传输系数的比较

$\mu(\text{H/m})$	$4\pi \times 10^{-7}$	$4\pi \times 10^{-5}$	$4\pi \times 10^{-4}$	$4\pi \times 10^{-3}$	$4\pi \times 10^{-2}$
$\Delta/h$	0.15	1.5	4.74	15	47.437
$T_1$	0.658E-6	0.594E-6	0.769E-7	0.853E-11	0.983E-16
$T_2$	0.658E-6	0.594E-6	0.769E-7	0.853E-11	0.220E-24

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} 10^{-9} (\text{F/m}), \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{H/m}), f = 10^4 (\text{Hz}), \sigma = 57 \\ &\times 10^6 (\text{S/m}), \Delta = 10^{-4} (\text{m}), \theta_0 = \frac{\pi}{4}, \phi_0 = 0, A = 1, B = 0, V_x = 0, V_y = 500 (\text{m/s}) \end{aligned}$$

### 4 结论

利用本文所得到的平均边界条件在求解运动薄壳体的电磁屏蔽问题时, 使得不必考虑薄壳体内的场, 只需考虑薄壳体内外的场, 这样就将三个区域内的电磁场问题转化为两个区域内的电磁场问题, 大大简化了数学模型的建立及运算步骤, 给问题的分析处理带来很大的便利. 值得指出的是, 本文所得平均边界条件同样适合于求解静止薄壳体的电磁屏蔽

问题.

#### 参考文献:

- [ 1 ] Лёгитович М. А. Investigations on Radio Wave Propagation Part II [ M ]. Moscow : Academy of Sciences, 1948.
- [ 2 ] Аполлунский С. М., Ерофеев В. Т. Электромагнитные Поля в Экранирующих Оболочках [ M ]. Минск: Университетское, 1988.
- [ 3 ] Лю Баолин. Математическое Моделирование Тонких электромагнитных экранов с Движущимися Средами [ D ]. Минск: БГУ, 1997.
- [ 4 ] 刘宝林, 袁建生, 马信山. 平面电磁波在运动薄板上的反射与透射 [ J ]. 清华大学学报, 1999, 39( 9 ): 44- 46.

#### 作者简介:



刘宝林 男, 1964 年 12 月生于河北省保定, 1997 年在国立白俄罗斯大学获博士学位, 1997 年至 1999 年在清华大学电机工程与应用电子技术系做博士后研究工作, 现为清华大学副教授, 主要研究方向为数学模型、算法、电磁兼容及电磁场数值计算.

范 辉 男, 1979 年 2 月生于北京, 清华大学在读硕士研究生.

马信山 男, 1934 年 3 月生于天津, 清华大学电机工程与应用电子技术系教授, 博士生导师, 主要研究方向为电磁场理论.