

# MIMO 阵列恒定包络波形设计

蒋 敏<sup>1,2</sup>, 黄建国<sup>2</sup>, 韩 晶<sup>2</sup>

(1. 南京电子技术研究所, 江苏南京 210039; 2. 西北工业大学航海学院, 陕西西安 710072)

**摘 要:** 提出了 MIMO 阵列系统利用白高斯随机过程设计恒定包络波形算法, 实现给定发射波形的协方差矩阵. 该算法首先对白高斯随机过程去白化得到高斯随机变量, 建立恒定包络波形相关矩阵与高斯随机变量相关矩阵之间的关系, 再采用无记忆性非线性投影函数把高斯随机变量投影到恒定包络随机变量, 从而解出恒定包络波形. 与现有的阵列系统波形设计算法相比, 本文算法给出了波形设计的解析解, 并且对于 BPSK 和 QPSK, 波形可从有限字符中选取. 仿真结果表明, 本文算法能有效设计 MIMO 阵列恒定包络波形.

**关键词:** MIMO 阵列; 恒定包络; 投影函数; 去白化; 发射波束图

**中图分类号:** TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 09-2194-06

## Constant Envelope Waveform Design for MIMO Array

JIANG Min<sup>1,2</sup>, HUANG Jian-guo<sup>2</sup>, HAN Jing<sup>2</sup>

(College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shannxi 710072, China)

**Abstract:** An algorithm for generating constant envelope (CE) waveforms from white Gaussian random process to realize a given covariance matrix is proposed for multiple-input multiple-output (MIMO) array systems in this paper. In our method, a memoryless nonlinear function is used to map Gaussian random variables (RV's) onto CE random variables. The relationship between the covariance matrices of Gaussian RV's at the input of the nonlinear function and non-Gaussian RV's at their output is established. Thus, CE waveforms can be obtained through the nonlinear function from the Gaussian RV's resulted from de-whitening a white Gaussian random process. In contrast to available algorithms, the proposed algorithm provides a closed-form solution to find the required waveforms, and suggests that waveforms can be chosen from finite alphabets, such as BPSK and QPSK. The numerical results illustrate the effectiveness of the algorithm proposed for MIMO array CE waveform design.

**Key words:** MIMO array; constant envelope; mapping function; de-whitening; transmit beam pattern

## 1 引言

多输入多输出 (Multiple-input multiple-output, MIMO) 雷达是近年来提出的一种新体制雷达<sup>[1,2]</sup>. 根据天线阵列构型, MIMO 雷达可分为分布式 MIMO 雷达和共址 MIMO 雷达. 前者, 发射天线相距很远<sup>[3]</sup>, 每个天线可独立观察目标不同的雷达反射截面 (RCS), 从而提高系统的空间分集增益<sup>[4]</sup>; 后者, 发射天线相距很近<sup>[5]</sup> (可与载波半波长相比拟), 利用波形分集增加系统自由度, 从而使发射信号和波束图设计更加灵活<sup>[6-8]</sup>, 从而显著改善共址 MIMO 雷达系统或 MIMO 声纳系统目标检测和方位估计性能<sup>[9]</sup>. 本文将雷达天线或声纳换能器统一视为阵元, 针对共址 MIMO 雷达或 MIMO 声纳中的阵列系统, 研究 MIMO 阵列恒定包络波形设计方法.

在文献[6~8]中, 通过合成 MIMO 雷达发射波形的

协方差矩阵获得期望的波束图. 文献[7]推广了文献[6]的工作, 设计了实际的发射波形. 这都源于一个假设, 那就是具有恒定包络并且能从一些有限字符点上取值的发射波形不能实现给定的协方差矩阵. 若对发射波形包络恒定这一要求做折衷处理, 即允许发射波形幅度有很小的波动, 并满足低峰平功率比的条件, 为此, 文献[7]中提出了一种循环算法设计波形, 但该算法需要进行多次的迭代, 而且不能从有限点中选取波形.

雷达/声纳阵列系统中, 功率放大器常常要求发射波形具有恒定包络, 本文针对 MIMO 阵列系统提出了一种具有恒定包络的波形设计方法. 白高斯随机过程通过去白化处理就可以得到具有任意相关性的高斯随机变量, 利用无记忆性非线性函数把该高斯随机变量波形投影生成具有给定相关特性的恒定包络波形. 尽管无记忆性和非线性改变了波形之间的相关性, 并且同时也改

变了协方差矩阵,但这种改变可用一系列 Hermite 多项式精确定义,而且是可逆的<sup>[10]</sup>.因此,可以用一个协方差矩阵作为无记忆非线性函数的输入,从而得到期望的输出协方差矩阵.文献[11]已使用过类似方法产生相关的伽马过程来模拟雷达海杂波.这里,本文推广文献[11]的方法,设计 MIMO 阵列恒定包络信号.

## 2 信号模型

假定 MIMO 阵列有  $M$  个阵元,所有阵元收发共用.用列向量  $\mathbf{x}_m$  表示阵元  $m$  上发射的  $N$  个字符序列.  $M$  个阵元上的所有发射字符序列用  $N \times M$  矩阵  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_M]$  来表示.为实现 MIMO 阵列期望的波束图,先要合成具有该期望波束图的波形协方差矩阵  $\mathbf{R}$ ,然后再通过  $\frac{\mathbf{X}^H \mathbf{X}}{N} = \mathbf{R}$  解出发射波形矩阵  $\mathbf{X}$ .给定期望的协方差矩阵,波形矩阵通过下式得到

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}^H \quad (1)$$

其中  $\mathbf{T}$  是由零均值,单位方差的独立高斯随机向量构成的  $N \times M$  矩阵,  $\mathbf{\Lambda}$  是矩阵  $\mathbf{R}$  的特征值矩阵,  $\mathbf{U}$  是  $\mathbf{R}$  的特征向量矩阵.在雷达或声纳等阵列系统中,工程上常常要求发射信号具有恒定包络.而式(1)中  $\mathbf{X}$  的列中的元素服从高斯分布,并不能保证  $\mathbf{X}$  中波形包络是恒定的.因此,可以考虑将式(1)中的高斯随机变量波形投影到具有恒定包络的信号.

若非高斯随机变量  $y_p$  和  $y_q$  是高斯随机变量  $x_p$  和  $x_q$  的无记忆非线性函数,那么  $y_p$  和  $y_q$  之间的互相关可定义为

$$\psi_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_p y_q^* p(x_p, x_q; \gamma_{pq}) dx_p dx_q \quad (2)$$

其中  $p(x_p, x_q; \gamma_{pq})$  表示  $x_p$  和  $x_q$  的联合概率密度,  $\gamma_{pq} = \frac{E\{x_p x_q^*\}}{\sigma_p \sigma_q}$  表示互相关系数,  $\sigma_m$  表示  $x_m$  的方差的平方根.

式(2)给出了高斯和非高斯随机变量的互相关之间的关系.若令无记忆性非线性投影函数为  $f(x)$ ,并假定  $\sigma_p = \sigma_q = \sigma$ ,  $p(x)$  是高斯随机变量的概率密度函数,则利用 Hermite 多项式分离式(2)中的双重积分式<sup>[10]</sup>化简如下

$$\psi_{pq} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n \left( \frac{x}{\sigma\sqrt{2}} \right) p(x) dx \right|^2 \frac{\gamma_{pq}^n}{2^n n!} \quad (3)$$

其中  $p(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_m^2}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2\sigma_m^2}\right)$  表示高斯随机变量  $x_m$  的概率密度函数,  $H_n(x_m) = (-1)^n e^{\frac{x_m^2}{2}} \frac{d^n}{dx_m^n} e^{-\frac{x_m^2}{2}}$  是 Hermite 多项式.  $f(x_p)$  和  $f(x_q)$  具有相同的概率密度函数.这里应该注意的是,协方差矩阵  $\mathbf{R}_g$  是正定或半正定矩阵是产生非高斯随机变量的一个必要条件.

## 3 信号设计

### 3.1 BPSK 信号设计

用  $s_m$  表示阵元  $m$  上发射的 BPSK 信号,相应的高斯随机变量表示为  $x_m$ , BPSK 信号可用高斯随机变量投影表示为

$$s_m = \sqrt{\frac{E}{M}} \text{sign}(x_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (4)$$

其中  $E$  是  $M$  个阵元发射的总功率,  $\text{sign}(\cdot)$  表示符号函数.定义  $s_p = \sqrt{\frac{E}{M}} \text{sign}(x_p)$  和  $s_q = \sqrt{\frac{E}{M}} \text{sign}(x_q)$  为从阵元  $p$  和阵元  $q$  上发射的 BPSK 信号,  $\beta_{pq} = E\{s_p s_q^*\}$  为它们之间的互相关.则  $\beta_{pq}$  和  $\gamma_{pq}$  之间的关系可通过式(3)给出如下

$$\beta_{pq} = \frac{2E}{M\pi} \sin^{-1}(\gamma_{pq}) \quad (5)$$

由上式可得高斯随机变量互相关系数  $\gamma_{pq}$  为

$$\gamma_{pq} = \sin\left(\frac{2E}{M\pi} \beta_{pq}\right) \quad (6)$$

相关系数为  $\gamma_{pq}$  的高斯随机变量可用独立高斯随机变量解白化变换方法很容易确定.一旦  $x_p$  和  $x_q$  确定,相关系数为  $\beta_{pq}$  的 BPSK 信号  $s_p$  和  $s_q$  就可以通过式(4)得到.

为设计  $M$  个 BPSK 波形,使其协方差矩阵为  $\mathbf{R}$ ,则相应的高斯随机变量的相关矩阵  $\mathbf{R}_g$  应由下式给出

$$\mathbf{R}_g(i, j) = \sigma^2 \sin\left(\frac{M\pi}{2E} \mathbf{R}(i, j)\right), \quad i, j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (7)$$

则具有相关矩阵为  $\mathbf{R}_g$  的高斯随机变量矩阵  $\mathbf{X}$  可用式(1)产生.具有协方差矩阵为  $\mathbf{R}$  的 BPSK 信号矩阵可用式(4)的投影函数由高斯随机变量产生.这里,应该注意的是,对式(7)做泰勒展开,根据矩阵 Hadamard 积和 schur 积的性质可以判定<sup>[12]</sup>,  $\mathbf{R}_g$  是半正定矩阵.

因为上述这种算法设计的是 BPSK 信号,所以其协方差矩阵  $\mathbf{R}$  的元素不可能有复值.可以将上述算法进行推广,设计 QPSK 信号,这样就可以有复的相关系数.

### 3.2 QPSK 信号设计

如果用  $z_m$  表示从阵元  $m$  上发射的 QPSK 信号,用  $x_m$  和  $y_m$  表示投影高斯随机变量,则它们之间的关系建立如下

$$z_m = \sqrt{\frac{E}{2M}} (\text{sign}(x_m) + j \text{sign}(y_m)), \quad m \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (8)$$

为建立 QPSK 和高斯随机变量的相关矩阵之间的关系,用  $\rho_{pq} = E\{z_p z_q^*\}$  表示  $z_p$  和  $z_q$  之间的互相关,则有

$$\rho_{pq} = \rho_{Rpq} + j\rho_{Ipq}$$

$$= \frac{E}{2M} E\{\text{sign}(x_p)\text{sign}(x_q) + \text{sign}(y_p)\text{sign}(y_q)\} \\ + j \frac{E}{2M} E\{\text{sign}(y_p)\text{sign}(x_q) - \text{sign}(x_p)\text{sign}(y_q)\} \quad (9)$$

其中  $\rho_{Rpq}$  和  $\rho_{Ipq}$  分别是  $\rho_{pq}$  的实部和虚部, 进一步做简化处理, 令

$$E\{\text{sign}(x_p)\text{sign}(x_q)\} = E\{\text{sign}(y_p)\text{sign}(y_q)\}$$

和

$$E\{\text{sign}(x_p)\text{sign}(y_q)\} = -E\{\text{sign}(y_p)\text{sign}(x_q)\}$$

那问题就可进行简化,  $\rho_{pq}$  的实部和虚部就可以写成下面更加紧凑的形式

$$\rho_{Rpq} = \frac{E}{M} E\{\text{sign}(x_p)\text{sign}(x_q)\}, \quad (10)$$

$$\rho_{Ipq} = \frac{E}{M} E\{\text{sign}(y_p)\text{sign}(x_q)\}$$

将式(5)应用在式(10), 可得

$$\rho_{Rpq} = \frac{2E}{M\pi} \sin^{-1}(\gamma_{rpq}), \quad (11)$$

$$\rho_{Ipq} = \frac{2E}{M\pi} \sin^{-1}(\gamma_{ipq})$$

其中  $\gamma_{rpq} = \frac{E\{x_p x_q^*\}}{\sigma^2}$  是高斯随机变量  $x_p$  和  $x_q$  的互相关

系数,  $\gamma_{ipq} = \frac{E\{x_p y_q^*\}}{\sigma^2}$  是高斯随机变量  $x_p$  和  $y_q$  的互相关系数. 则由式(11)可得高斯随机变量的互相关为

$$E\{x_p x_q^*\} = \sigma^2 \sin\left(\frac{M\pi}{2E} \rho_{Rpq}\right), E\{x_p y_q^*\} = \sigma^2 \sin\left(\frac{M\pi}{2E} \rho_{Ipq}\right) \quad (12)$$

要设计  $M$  个 QPSK 信号, 并使它们能实现给定的协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}$ , 就必须要求有相应的  $2M \times 2M$  实值的协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_g$ . 为确定协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_g$ , 可考虑包含  $2M$  个高斯随机变量的向量  $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_M y_1 \cdots y_M]^T$ , 其中  $x_m$  和  $y_m$  分别是  $z_m$  的实部和虚部. 利用式(12)并由对称性质可得随机向量  $\mathbf{x}$  的协方差矩阵为  $\tilde{\mathbf{R}}_g = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\}$ , 那用式(1)就可以得到高斯随机变量矩阵  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_M \mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_M]$ , 它能实现协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_g$ . 类似地, QPSK 信号矩阵就可由式(8)由高斯随机变量投影产生, 它的协方差矩阵为  $\tilde{\mathbf{R}}$ .

### 3.3 复指数函数投影恒定包络信号

本小节采用复指数函数  $e^{j\theta(x)}$  把高斯随机变量投影产生恒定包络随机变量. 与 BPSK 和 QPSK 不同, 该恒定包络随机变量不能从有限字符点中选取. 复指数函数对高斯随机变量  $x_m$  的二次函数投影, 得到期望的恒定包络随机变量  $v_m$  为

$$v_m = \sqrt{\frac{E}{M}} \exp\left\{j\left[a \frac{x_m^2}{2\sigma^2} + b \frac{x_m}{\sqrt{2}\sigma} + c\right]\right\} \quad (13)$$

其中  $a, b, c$  都是常数. 令  $\alpha_{pq}$  表示  $v_p$  和  $v_q$  之间的互相

关. 由式(3)可得  $\alpha_{pq}$  和  $\gamma_{pq}$  之间的关系为

$$\alpha_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_p v_q^* P(x_p, x_q, \gamma_{pq}) dx_p dx_q \quad (14)$$

对上式展开化简, 并做变量代换, 令  $x_p = \sqrt{2}\sigma\bar{x}_p$ ,  $x_q = \sqrt{2}\sigma\bar{x}_q$ , 带入式(14)并整理可得

$$\alpha_{pq} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E\gamma_{pq}}{M\pi 2^n n!} \exp\left(-\frac{b^2}{2(a^2+1)}\right) \\ \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-(1-aj)\left(\bar{x}_p + \frac{(a-j)b}{2(a^2+1)}\right)^2\right\} \\ \cdot H_n(\bar{x}_p) d\bar{x}_p \\ \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-(1+aj)\left(\bar{x}_q + \frac{(a+j)b}{2(a^2+1)}\right)^2\right\} \\ \cdot H_n(\bar{x}_q) d\bar{x}_q \quad (15)$$

由式(15)可看出, 恒定包络随机变量的互相关  $\alpha_{pq}$  与高斯随机变量的互相关系数  $\gamma_{pq}$  之间的关系与常数  $c$  无关. 利用文献[13]的积分公式和 Hermite 多项式对式(15)化简计算可得恒定包络随机变量互相关为

$$\alpha_{pq} = \frac{E}{M\sqrt{1+a^2-\gamma_{pq}^2}a^2} \exp\left(\frac{b^2}{2(a^2\gamma_{pq}^2-a^2-1)}\right) \quad (16)$$

上式给出了在高斯随机变量的二次函数复指数投影条件下,  $\alpha_{pq}$  和  $\gamma_{pq}$  的一般关系. 注意到上式比较复杂. 因此下面仅考虑对于常数  $a$  和  $b$  取值的两种特殊组合情形.

(1)  $a=0$  且  $b>0$

这种情形下, 阵元  $m$  上的发射信号可表示为

$$v_m = \sqrt{\frac{E}{M}} \exp\left\{j\left(b \frac{x_m}{\sqrt{2}\sigma} + c\right)\right\} \quad (17)$$

恒定包络随机变量互相关和高斯随机变量互相关系数之间的关系变为

$$\alpha_{pq} = \frac{E}{M} \exp\left(\frac{b^2}{2}(\gamma_{pq}-1)\right) \quad (18)$$

从而解得高斯随机变量互相关系数

$$\gamma_{pq} = 1 + \frac{2}{b^2} \ln\left(\frac{M\alpha_{pq}}{E}\right) \quad (19)$$

为产生  $M$  个恒定包络波形, 则对应的高斯随机变量的协方差矩阵应为

$$\bar{\mathbf{R}}_g = \sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{b^2} \ln\left(\frac{M\bar{\mathbf{R}}(i,j)}{E}\right), i, j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (20)$$

类似地, 协方差矩阵为  $\bar{\mathbf{R}}_g$  的高斯随机变量由式(1)独立随机高斯变量去白化得到, 从而就可以通过式(13)投影产生恒定包络随机变量. 这里应注意的是, 由于高斯随机变量  $x_p$  和  $x_q$  都取实值, 其互相关系数也必定是实值, 因此恒定包络随机变量互相关不可能取负值, 这也是当设置  $a=0$  且  $b>0$  时该算法的缺点.

令  $M = 10, E = 10$ , 参数  $b$  取不同值条件下, 图 2 画出了高斯随机变量互相关系数  $\gamma_{pq}$  和恒定包络随机变量互相关  $\alpha_{pq}$  之间的关系. 由图 1 可以看出, 随着  $b$  值增大, 曲线变得平坦. 当  $b$  非常大时, 曲线几乎在  $0 < \alpha_{pq} < 1$  整个范围内都是平坦的, 这将必然带来一个缺点, 投影高斯随机变量的互相关即使存在一个小的误差, 都会给恒定包络复随机变量的互相关带来很大的误差, 从而使得设计信号的波束图就不准确. 这种情况下, 为减小误差, 一个可行的办法是增大高斯随机变量样本序列数  $N$ .

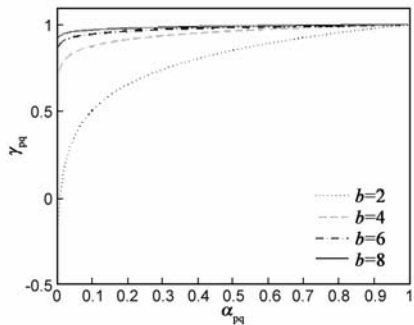


图1 不同 $b$ 值条件下 $\gamma_{pq}$ 和 $\alpha_{pq}$ 之间的关系

(2)  $a > 0$  且  $b = 0$

这种情形下, 阵元  $m$  上的发射信号可表示为

$$v_m = \sqrt{\frac{E}{M}} \exp \left\{ j \left( a \frac{x_m^2}{2\sigma^2} + c \right) \right\} \quad (21)$$

解得高斯随机变量互相关系数

$$\gamma_{pq} = \sqrt{\frac{M^2 \alpha_{pq}^2 - E^2}{a^2 M^2 \alpha_{pq}^2} + 1} \quad (22)$$

为使得  $\gamma_{pq}$  取实值, 应使得下式成立

$$a \geq \sqrt{\frac{E^2 - M^2 \min(|\bar{R}(i, j)|)^2}{M^2 \min(|\bar{R}(i, j)|)^2}}, i, j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (23)$$

当  $\min(|\bar{R}(i, j)|^2), i, j = \{1, 2, \dots, M\}$  分别取 0.05, 0.1, 0.15 和 0.2 时, 可分别取  $a$  值为 3, 4, 6 和 8, 此种取值情况下, 令  $M = 10, E = 10$ , 图 2 给出了高斯随机变量互相关系数和恒定包络随机变量互相关之间的关系. 由图可以看到, 当  $\alpha_{pq}$  的值接近于零时, 曲线都非

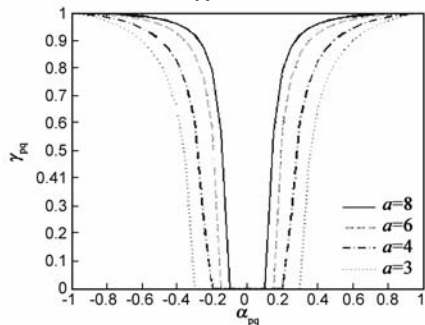


图2 不同 $a$ 值条件下 $\gamma_{pq}$ 和 $\alpha_{pq}$ 之间的关系

常陡峭, 这就表明此时投影高斯随机变量的互相关系数即使存在一个小的误差, 对投影产生的恒定包络随机变量的互相关的误差可以忽略. 然而, 当  $\alpha_{pq}$  的值接近于 1 时, 曲线变得平坦, 此时, 投影高斯随机变量的互相关系数即使存在一个小的误差, 也会对投影产生的恒定包络随机变量互相关带来一个很大的误差. 此种情形下该算法更适合于恒定包络随机变量协方差矩阵的元素接近于零, 且可用的样本序列  $N$  较小的情况.

## 4 计算量分析

对本文所提出的恒定包络波形设计的计算量和文献[7]波形设计的计算量做比较. 首先对给定的协方差矩阵取正弦函数或取对数得到高斯随机变量的相关矩阵, 再做特征分解, 计算量为  $O(M^3)$ , 然后由式(1)给出  $N \times M$  的高斯随机变量矩阵, 计算量为  $O(M^2 N)$ , 最后对高斯随机变量取符号函数或复指数就可得恒定包络信号, 因此总计算量为  $O(M^3 + M^2 N)$ . 文献[7]提出的迭代算法设计信号, 首先, 每次迭代都需要对  $M \times N$  矩阵做奇异值分解, 奇异值分解的计算量为  $O(M^2 N)$ , 其次, 在奇异值分解之后寻找单位矩阵并且更新随机变量, 两者计算量都是  $O(M^2 N)$ , 最后再依据文献[13]的要求, 在每次迭代中还要包含  $O(N)$  的计算量, 因此文献[7]的迭代算法设计信号, 总的计算量为  $O(N + 3M^2 N)$ . 与文献[7]提出的迭代算法相比, 本文提出的恒定包络波形设计算法的计算复杂度显著降低.

## 5 仿真结果

利用 1 阶自回归过程的相关矩阵来定义期望的协方差矩阵如下

$$\mathbf{R} = \frac{E}{M} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{M-1} \\ \alpha & 1 & \cdots & \alpha^{M-2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{M-1} & \alpha^{M-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中  $0 < \alpha < 1$ . 在本文提出的算法中, 假定对不同的  $\alpha$ ,  $M$  以及自回归过程的不同阶数, 与矩阵  $\mathbf{R}$  对应的高斯随机变量的协方差矩阵总是半正定的.

假定 MIMO 阵列系统的  $M$  个阵元构成均匀线列阵, 则其发射波束图为

$$P(\theta) = \mathbf{v}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{v}(\theta) \quad (25)$$

其中  $\mathbf{v}(\theta) = [1 \quad e^{-j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta)} \quad \cdots \quad e^{-j2\pi (M-1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta)}]^T$  表示阵列扫描向量,  $d$  是相邻阵元间距,  $\lambda$  表示发射信号波长.

令  $\alpha = 0.7, M = 10, E = 1$ , 由式(24)可以给出期望的协方差矩阵, 并可得到相应的波束图. 用本文提出的算法对独立高斯随机变量去白化后投影产生 BPSK 信号,

从而得到协方差矩阵和对应的波束图.图3对期望的协方差矩阵的波束图和本文算法设计的 BPSK 信号的波束图进行比较.从图3可以看出,本文算法产生的 BPSK 信号的波束图能几乎完全匹配期望的协方差矩阵的波束图,从而说明了本文产生 BPSK 信号设计算法的有效性.

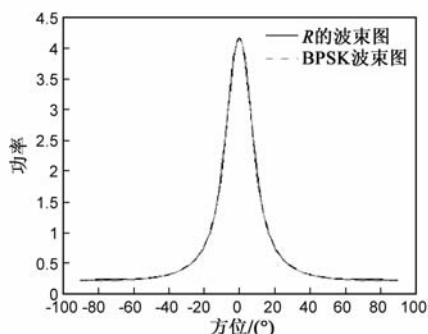


图3 BPSK波束图和给定协方差矩阵 $R$ 的波束图

对称的波束图一般能通过实的协方差矩阵产生,如果要求波束图旋转一个角度 $\varphi$ ,那所对应的协方差矩阵必须是复的.而对含有复值的协方差矩阵,可以采用 QPSK 信号来得到,但同时也可以通过把对称波束图的波形乘以一个相应的角度来得到旋转后的波束图,亦即将实值协方差矩阵 $R$ 与一个旋转矩阵 $R_\varphi$ 做 Hadamard 积,该旋转矩阵可表示为

$$R_\varphi = \mathbf{b}(\varphi) \mathbf{b}^H(\varphi) \quad (26)$$

其中 $\mathbf{b}(\varphi) = [1 \quad e^{-j2\pi\frac{d}{\lambda}\sin(\varphi)} \quad \dots \quad e^{-j2\pi(M-1)\frac{d}{\lambda}\sin(\varphi)}]^T$ 表示旋转向量.图4给出了旋转后的波束图,期望的实值协方差矩阵可通过式(24)令 $\alpha = 0.75$ , $M = 10$ , $E = 1$ 得到.从图4可以看出三个波束图几乎一样,只是平移了一个角度,说明本文 QPSK 信号设计算法和 BPSK 信号设计算法准确有效.

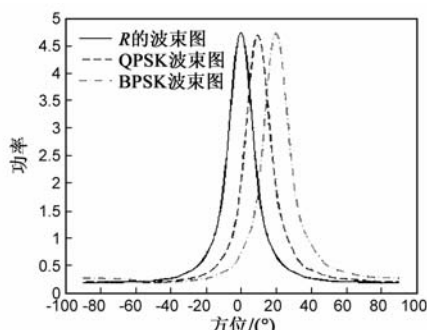


图4 QPSK和BPSK信号波束图旋转 $10^\circ$ 和 $20^\circ$

针对恒定包络波形设计,同样令 $\alpha = 0.75$ , $M = 10$ , $E = 1$ ,图5给出了本文算法设计的恒定包络信号的波束图和给定协方差矩阵 $R$ 的波束图.显然,图5中两个波束图完全重合,从而也就表明了本文复指数投影恒定包络波形设计算法准确有效.

此外,本文采用 BPSK 信号设计算法合成文献[6]中的一个波束图,即发射功率在 $-20^\circ \leq \theta \leq 20^\circ$ 方向上

均匀分布,而在其他方向上发射功率最小.这是一个对称波束图.文献[6]中采用波束图匹配方法合成了协方差矩阵 $R$ .合成的协方差矩阵元素都是实的,因此这里只考虑设计 BPSK 信号.假设每个阵元发射功率为1,即 $E = 10$ ,采用一个 $M = 10$ 均匀线列阵,相邻阵元间隔为半波长,图6给出了期望的波束图、文献[6]波束图匹配方法合成的协方差矩阵 $R$ 的波束图和本文算法设计的 BPSK 信号波束图.从图上可看出,本文算法的 BPSK 信号波束图与文献[6]合成的协方差矩阵的波束图几乎重合,从而也说明了本文 BPSK 信号设计算法是准确的.

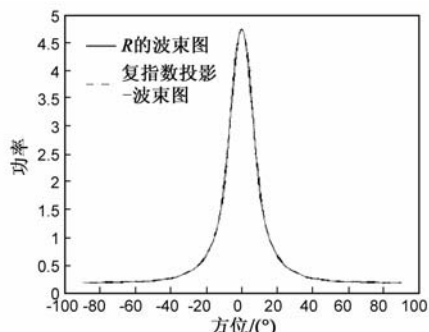


图5 复指数投影-波束图和 $R$ 的波束图

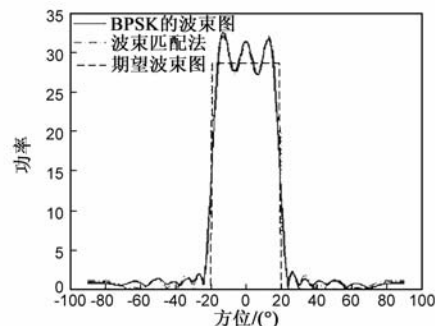


图6 期望波束图、波束匹配法合成 $R$ 的波束图以及BPSK波束图

## 6 结论

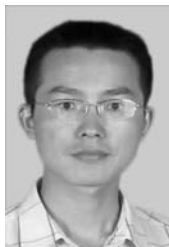
本文针对 MIMO 阵列系统提出了具有给定协方差矩阵的恒定包络波形设计算法.该算法通过投影函数和 Hermite 多项式建立高斯随机变量互相关系数与恒定包络随机变量的互相关之间的关系,这种关系可从给定的协方差矩阵中得到高斯随机变量协方差矩阵,然后利用该协方差矩阵对独立高斯随机变量去白化,最后就可以通过投影函数从白化后的高斯随机变量中解出恒定包络波形.与现有的算法相比,本文算法为实现给定协方差矩阵的波形设计提供了解析解,并且对于 BPSK 和 QPSK,波形可从有限字符点选取;此外该计算复杂度更低.

## 参考文献

- [1] E Fishler, A M Haimovich, R S Blum, et al. MIMO radar: An idea whose time has come[A]. J K Smith IEEE Radar Confer-

- ence[C]. Philadelphia: IEEE AESS, 2004. 71 – 78.
- [2] 何子述, 韩春林, 刘波. MIMO 雷达概念及其技术特点分析[J]. 电子学报, 2005, 33(12A): 2441 – 2445.  
He Zi-shu, et al. MIMO radar and its technical characteristic analyses[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(12A): 2441 – 2445. (in Chinese)
- [3] A M Haimovich, R S Blum, L J Cimini. MIMO radar with widely separated antennas[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(1): 116 – 129.
- [4] E Fishler, A M Haimovich, R S Blum, et al. Spatial diversity in radars-models and detection performance[J]. IEEE Trans on signal Processing, 2006, 54(3): 823 – 838.
- [5] J Li, P Stoica. MIMO radar with co-located antennas: Review of some recent work[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(5): 106 – 114.
- [6] P Stoica, J Li, Y Xie. On probing signal design for MIMO radar[J]. IEEE Trans on signal Processing, 2007, 55(8): 4151 – 4161.
- [7] P Stoica, J Li, X Zhu. Waveform synthesis for diversity-based transmit beampattern antennas design[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(6): 2693 – 2598.
- [8] D R Fuhrmann, J S Antonio. Transmit beamforming for MIMO radar systems using signal cross-correlation[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronics Systems, 2008, 44(1): 171 – 185.
- [9] I Bekkeman, J Tabrikian. Target detection and localization using MIMO radars and sonars[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2006, 54(2): 3873 – 3883.
- [10] R J A Tough, K D Ward. The correlation properties of gamma and other non-Gaussian processes generated by memoryless nonlinear transformation[J]. J Phys D: Appl Phys, 1999, 32(23): 3075 – 3084.
- [11] J Brown Junior. On the expansion of the bi-variate Gaussian probability density using results of nonlinear theory[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1968, 14(1): 158 – 159.
- [12] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. 101 – 102.
- [13] A Jeffrey, D Zwillinger. Table of integrals, series, and products[M]. 7th Edition. Massachusetts: Academic Press, Elsevier, 2007. 106 – 110.

### 作者简介



**蒋 敏** 男, 1982 年 4 月出生于湖北汉川. 现为西北工业大学航海学院博士研究生, 主要从事阵列信号处理, 目标检测与参数估计方面的有关研究.

E-mail: jiangmin9527@mail.nwpu.edu.cn



**黄建国** 男, 1945 年 2 月生于湖南长沙, 现为西北工业大学航海学院教授、博士生导师, 上海交通大学兼职教授, IEEE 西安分会主席、高级会员, “水下信息处理与控制”和“雷达信号处理”国家重点实验室学术委员会委员, 中国电子学会会士. 1993 年起享受国务院政府特殊津贴, 主要从事阵列信号处理、无线通信以及水下目标探测等方面的研究工作. jghuang@nwpu.edu.cn