

基于小波的 2-D 分形布朗运动分析与合成

毛 峡¹, 陈 斌², 朱 刚¹, 牟田一弥³

(1. 北京航空航天大学电子信息工程学院, 北京 100083; 2. 中科院空间科学与应用研究中心, 北京 100080;
3. 日本京都大学电气工程系, 京都 606 - 8501)

摘 要: $1/f$ 分形随机过程广泛地存在于各种自然现象和社会现象中, 日益成为信号检测与估计、信号处理及图像处理的研究热点. 分形布朗运动是模拟此类信号的很好的数学模型. 小波因其所具有的多尺度分析能力成为分析分形信号的有力工具. 本文分析了二维分形布朗运动经小波变换后各尺度间小波系数相关结构的特性, 提出了一种合成二维分形布朗运动的算法, 并展示了其在和谐图案生成上的应用.

关键词: $1/f$ 过程; 分形布朗运动; 小波变换

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2003) 06-0825-04

Analysis and Synthesis of Two Dimensional Fractional Brownian Motion Based on Wavelet

MAO Xia¹, CHEN Bin², ZHU Gang¹, Muta Itsuya³

(1. School of Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;

2. Center for Space Science and Application Research, China Academy of Sciences, Beijing 100080, China;

3. Dept. of Electrical Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Kyoto 606 - 8501, Japan)

Abstract: The $1/f$ family of fractal processes exists widely in various physical and social phenomena and is increasingly appealing to researcher on signal detection and estimation, signal processing and image processing. Fractional Brownian motion is a convenient model for this kind of process. Wavelet transform is a useful tool to analyze fractal signal by its multi-resolution analysis capability. After analyzing the correlation structure of 2-D fBm signal's wavelet decomposition, this paper proposed a method to synthesize 2-D fBm and showed its application on producing harmonious patterns.

Key words: $1/f$ process; fractional Brownian motion; wavelet transform

1 引言

在自然地貌、股票市场的波动、心率及脑波的波动、电子元器件中的噪声等^[1,2]大量的自然现象和社会现象中存在着一类随机过程, 它们具有如下特性: 在时域或空域上有自相似性和长时相关性; 在频域上, 其功率谱密度在一定频率范围内基本符合 $1/f$ 的多项式衰减规律. 因此被称为 $1/f$ 族随机过程. 在为此类过程建模时, 由于通常采用的 ARMA 方法只适合于相关结构按指数规律衰减的过程, 其效果不好^[3], 因此人们不断地寻找各种模型来模拟此类随机过程. 其中由 Mandelbrot 和 Van Ness^[4]提出的分形布朗运动 (fBm) 模型是使用最广泛的一种, 它具有以下两个重要性质:

非平稳性;

自相似性.

非平稳性是许多自然现象和社会现象的内在特性, 但对

如何定义其功率谱密度有一定的困难; 自相似性则意味着 fBm 的任意一部分都是其它尺度上部分信号在统计意义上的放大或缩小. 因此, 小波变换成为分析此类信号的有力工具. 文献[5,6]仅利用小波对一维 $1/f$ 信号进行了分析, 而本文对二维 fBm 信号的二维正交小波展开式中各小波系数间关系进行了探讨, 进而提出了合成二维 fBm 信号的新算法.

本文首先讨论了 $1/f$ 过程、二维 fBm 定义和性质; 然后利用离散栅格上二维可分离小波变换分析了二维 fBm 的小波展开式中小波系数的相关结构及方差特性; 最后利用小波方法合成了二维 fBm 信号并将其运用于和谐图案自动生成.

2 $1/f$ 过程和二维分形布朗运动的定义及性质

2.1 $1/f$ 过程

" $1/f$ 过程" 通常是指在一定频率范围内具有如下形式的功率谱密度的随机过程^[7]

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\omega} |\omega|^{-2} \quad (1)$$

其中 $0 < \alpha < 2$.

假如此定义扩展到所有频率范围,则式(1)不可积,由平稳随机过程理论可知,式(1)不是有意义的功率谱密度.因此有大量的论文试图从非平稳随机过程和谱的推广定义上去解释它^[5-9].其中文献[5]针对 fBm 分别从时间-频率角度和时间-尺度角度引入了 Wigner-Ville 谱和尺度平均谱.而文献[7]则将 $1/f$ 过程定义为:一个零均值的统计自相似随机过程 $x(t)$,如果满足以下条件,则为 $1/f$ 过程.设有理想带通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega| < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

当 $x(t)$ 经 $H(\omega)$ 滤波后所得输出 $y(t)$ 为广义平稳、有限方差的随机过程.

此定义避免了 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 2$ 的情况,并且对带通滤波器的要求很宽松,只要 $\alpha > 0$ 和 $\alpha < 2$ 时, $H(\omega) \neq 0$ 即可.文献[7]证明:谱特性为 $S_x(\omega) = \frac{2}{\omega} |\omega|^{-2}$ 的 $1/f$ 过程 $x(t)$ 经上述带通滤波器滤波后将能产生广义平稳的随机过程 $y(t)$,其功率谱密度为:

$$S_y(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega} |\omega|^{-2}, & 0 < |\omega| < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\alpha = 2H + 1$, H 为自相似指数.而且在 $0 < H < 1$ 时,分形布朗运动及相应的分形高斯噪声符合上述定义的 $1/f$ 过程.

2.2 二维 fBm 的定义及性质:

二维分形布朗运动可由一维直接推广得到.令 $B(\bar{u})$ 为二维 fBm, \bar{u} 表示某一点的位置向量 (u_x, u_y) , 则

$$\begin{aligned} B_H(\bar{u}) &= B_H(u_x, u_y) = \frac{1}{(H+1/2)} \\ &\int_{B(\bar{u})} (|\bar{u} - \bar{\gamma}|^{H-1/2} - |\bar{\gamma}|^{H-1/2}) dB(\bar{\gamma}) \\ &+ \int_{B(\bar{u})} |\bar{u} - \bar{\gamma}|^{H-1/2} dB(\bar{\gamma}) \\ &= \frac{1}{(H+1/2)} \int_{0,0}^{\bar{u}_x, \bar{u}_y} \int \left(\sqrt{(u_x - x)^2 + (u_y - y)^2} \right)^{H-1/2} \\ &- \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{H-1/2} w(x, y) dx dy \\ &+ \int_{0,0}^{\bar{u}_x, \bar{u}_y} \left(\sqrt{(u_x - x)^2 + (u_y - y)^2} \right)^{H-1/2} w(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

可以得到其相关函数为:

$$\begin{aligned} R_{B_H}(\bar{u}, \bar{v}) &= E[B_H(\bar{u}) B_H(\bar{v})] \\ &= C \cdot (|\bar{u}|^{2H} + |\bar{v}|^{2H} - |\bar{u} - \bar{v}|^{2H}) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 H 为 Hurst 指数, C 为 H 的函数, $w(x, y)$ 为二维高斯白噪.

不难推得二维 fBm 过程具有如下性质:

二维 fBm 是非平稳随机过程;

增量是 $B_H(\bar{u}) = B_H(\bar{u} - \bar{u}) - B_H(\bar{u})$ 一个平稳的零均值高斯过程;

增量的 $B_H(\bar{u})$ 方差仅仅依赖于距离 $|\bar{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$,

因此

$$E[|B_H(\bar{u})|^2] = 2C |\bar{u}|^{2H}$$

二维 fBm 的 Wigner-Ville 平均功率谱密度具有如下形式:

$$\bar{S}(\bar{\omega}) = \frac{C_2}{|\bar{\omega}|} = \frac{C_2}{(\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2})^{2H+2}} \quad (6)$$

其中 $1 < H < 3/4$, 即 $0 < \alpha < 3/2$. 其中 C_2 为与 H 有关的常数.因此二维 fBm 经理想带通滤波器

$$H(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 1, & \omega_1 < \omega_1 < \omega_1, \omega_2 < \omega_2 < \omega_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

滤波后为广义平稳的 $1/f$ 随机过程.其功率谱密度为:

$$S(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \frac{C_2}{(\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2})^{2H+2}}, & \omega_1 < \omega_1 < \omega_1, \omega_2 < \omega_2 < \omega_2 \\ \frac{C_2}{(\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2})^{2H+2}}, & \omega_2 < \omega_2 < \omega_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

3 二维 fBm 的小波分析

小波变换已日益成为图像处理、信号检测与估计的有力工具,其基本理论在文献[10~12]中有详尽论述.在此主要利用二维小波变换的基本理论分析 2-D fBm.

设有二维 fBm 信号 $X(u_x, u_y)$, u_x 与 u_y 分别为横坐标与纵坐标; (u_x, u_y) 代表二维基本小波,则其离散栅格上的二维小波变换为:

$$j, \bar{n} = |A_0|^{-j} [A_0^{-j} \bar{u} - \bar{n}] \quad (8)$$

$$WT_x(j, \bar{n}) = X(\bar{u}, j, \bar{n} \bar{u}) = |A_0|^{-j} X(\bar{u}) [A_0^{-j} \bar{u} - \bar{n}] d\bar{u} \quad (9)$$

$j, \bar{n}(\bar{u})$ 为基本小波的伸缩与移位变换,其变换尺度为 j , 位移为 \bar{n} ; $WT_x(j, \bar{n})$ 为 $X(u_x, u_y)$ 小波变换,其尺度为 j , 位移为 \bar{n} .

其中 A_0 为有旋转能力的尺度因子, $A_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A_0^{-j} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(j)} & a_{12}^{(j)} \\ a_{21}^{(j)} & a_{22}^{(j)} \end{bmatrix}$.

不同的 A_0 对应不同的采样方式,通常采用的是可分离采样,即先沿 x_1 方向作二抽取再沿 x_2 方向作二抽取(也可以颠倒次序),对应的 $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

根据多分辨率分析理论,对于可分离情况,二维小波函数及尺度函数满足如下特性:

$$\begin{aligned} \phi(u_x, u_y) &= \phi(u_x) \phi(u_y) \\ \phi^1(u_x, u_y) &= \phi(u_x) \phi(u_y) \\ \phi^2(u_x, u_y) &= \phi(u_x) \phi(u_y) \\ \phi^3(u_x, u_y) &= \phi(u_x) \phi(u_y) \end{aligned}$$

其中 $\phi(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 分别是相应的一维小波函数和尺度函数.

如果定义

$$i, k \binom{k}{m, n} (u_x, u_y) = 2^{k/2} i (2^k u_x - m, 2^k u_y - n)$$

其中 $i = 1, 2, 3$, 则

$$X(u_x, u_y) = \sum_{k=m, n} d_{m, n}^k \binom{k}{m, n} (u_x, u_y) + \sum_{k=m, n} \binom{k}{m, n} (u_x, u_y) + \sum_{k=m, n} \binom{k}{m, n} (u_x, u_y)$$

其在二维离散栅格上的小波分解结构中第 K 级平滑逼近为:

$$X_K(u_x, u_y) = \sum_{k=K, m, n} d_{m, n}^k \binom{k}{m, n} (u_x, u_y) + \sum_{k=K, m, n} \binom{k}{m, n} (u_x, u_y) + \sum_{k=K, m, n} \binom{k}{m, n} (u_x, u_y) \quad (10)$$

其中 $d_{m, n}^k$ 为第 k 级小波分解的小波系数序列.

设小波函数 $\psi(\bar{x})$ 为 $\psi(\bar{x})$ 的傅立叶变换, 则

$$\begin{aligned} j, n(\bar{x}) &= \int_{\bar{x}} A_0 \bar{x}^j [A_0 \bar{x}^j - n] e^{-j \bar{x}} d\bar{x} \\ &= \frac{A_0^{2j}}{|A_0|^{2j}} (\bar{x} \cdot A_0^j) \cdot e^{-j \bar{x} \cdot A_0^j} \bar{n} \end{aligned} \quad (11)$$

则任意两个小波变换系数 $d_{m, n}^k$ 、 $d_{l, n}^k$ 间的相关值为:

$$\begin{aligned} E[d_{m, n}^k, d_{l, n}^k] &= E[f(\bar{x}) \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x}) d\bar{x} \cdot f(\bar{y}) \cdot \binom{k}{l, n}(\bar{y}) d\bar{y}] \\ &= \binom{k}{m, n}(\bar{x}) \cdot \binom{k}{l, n}(\bar{y}) \cdot E[f(\bar{x}) \cdot f(\bar{y})] d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned} \quad (12)$$

由于 $f(x_1, x_2)$ 为广义平稳随机过程, 因此上式

$$\begin{aligned} &= \binom{k}{m, n}(\bar{x}) \cdot \binom{k}{l, n}(\bar{y}) \cdot R_f(\bar{x} - \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \\ &= \binom{k}{m, n}(\bar{x}) \cdot [R_f(\bar{x}) * \binom{k}{l, n}(\bar{x})] d\bar{x} \end{aligned}$$

其中 $R_f(\bar{x})$ 为 $f(x_1, x_2)$ 的自相关函数. 又由 Parseval 定理, 上式可记做:

$$\begin{aligned} E[d_{m, n}^k, d_{l, n}^k] &= \frac{1}{4} \frac{A_0^{2(k+1)}}{|A_0|^{k+1}} \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot e^{-j \bar{x} \cdot A_0^k} \bar{n} \\ &\quad \cdot \binom{k}{l, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot e^{-j \bar{x} \cdot A_0^k} \bar{n} \cdot \frac{C_2}{|A_0|^{2k}} d^{-} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 \bar{n} 表示取向量的范数. 由此引申可得以下特性:

- (1) $d_{m, n}^k$ 的均值为零.
- (2) 当 $k = l, m = n$ 时, 上式化为

$$E[d_{m, n}^k, d_{m, n}^k] = \text{var}[d_{m, n}^k] = \frac{1}{4} \frac{A_0^{2k}}{|A_0|^{2k}} \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot e^{-j \bar{x} \cdot A_0^k} \bar{n} \cdot \frac{C_2}{|A_0|^{2k}} d^{-} \quad (14)$$

即为 $d_{m, n}^k$ 的方差.

(3) 在同一尺度 ($k = l$) 下, 相关函数是 $(\bar{m} - \bar{n})$ 的函数. 可见在固定尺度下 $d_{m, n}^k$ 是广义平稳的随机序列.

$$\begin{aligned} E[d_{m, n}^k, d_{m, n}^k] &= \frac{1}{4} \frac{A_0^{4k}}{|A_0|^{2k}} \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot e^{-j \bar{x} \cdot A_0^k} \bar{n} \\ &\quad \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot e^{-j \bar{x} \cdot A_0^k} \bar{n} \cdot d \frac{C_2}{|A_0|^{2k}} d^{-} \\ &= \frac{1}{4} \frac{A_0^{2k}}{|A_0|^{2k}} \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{m} \cdot A_0^k) \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{m} \cdot A_0^k) \cdot \frac{C_2}{|A_0|^{2k}} \cdot e^{-j \bar{x} \cdot A_0^k} \bar{n} \cdot d^{-} \end{aligned} \quad (15)$$

(4) 对于满足 $2R$ 的基本小波, 方差才是有限值, 同一尺度下的自相关系数随 $(\bar{m} - \bar{n})$ 增大而衰减, 其衰减量级为 $(\bar{m} - \bar{n})^{-2R}$. 因此可以认为小波变换对 fBm 信号有去相关作用. 当 R 足够大时, 可以认为同一尺度下的各小波系数是

不相关的.

4 2-D FBM 的小波合成及其在和谐图案自动生成中的应用

从上述对二维 fBm 的分析中看出, 可以利用小波来合成二维 fBm 信号. 考虑二维可分离情况, 即选择 $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则式 (14) 化为:

$$\text{var}[d_{m, n}^k] = \frac{1}{4} \frac{A_0^{2k}}{|A_0|^{2k}} \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot \frac{C_2}{|A_0|^{2k}} d^{-} \quad (16)$$

$$\text{其中 } \frac{1}{4} \frac{A_0^{2k}}{|A_0|^{2k}} \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot \binom{k}{m, n}(\bar{x} \cdot A_0^k) \cdot \frac{C_2}{|A_0|^{2k}} d^{-}$$

再根据二维 fBm 小波变换系数的特性可知, 选择正规性 R 满足 $2R$ 的双正交小波 $\psi(u)$, 与零均值且方差满足式 (16) 的高斯平稳白噪声作为 $d_{m, n}^k$, 构造二维重建滤波器组, 即可合成 Wigner-Ville 谱近似为 $1/|\bar{x}|^2$ 的二维 $1/f$ 信号.

根据 $1/f$ 理论, 可以利用二维 $1/f$ 信号的数据自动生成给人以和谐感的图案. 图 1 即为利用本文所产生的二维 $1/f$ 信号数据自动生成的和谐图案.

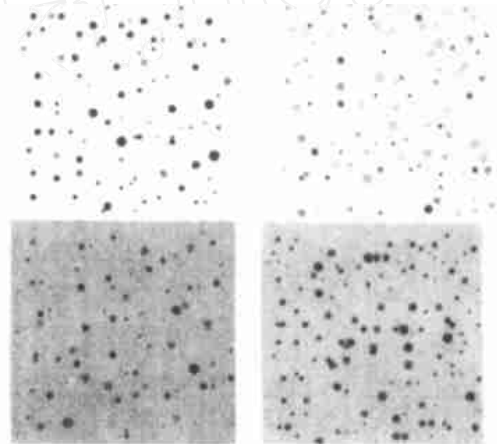


图 1 二维 fBm 信号数据生成的和谐图案

5 结论

小波理论已经被证明对于一维长相关随机过程的分析和合成是非常理想的工具. 本文展示了小波理论在二维情况下同样有效. 从分析的观点看, 二维 fBm 的小波变换仍然保留了原始信号的自相似特性. 因此小波变换成为具有分形特征图像的维数估计、图像分割及边缘检测等有力的工具.

本文根据一维 fBm 及其 Wigner-Ville 谱向二维 fBm 进行了推广, 分析了二维 fBm 的小波分解系数的相关特性. 根据此特性, 构造了二维可分离多分辨率滤波器组, 合成出二维 fBm 仿真信号, 并将此信号应用于和谐图案的自动生成, 首次从分形的角度对情感信号进行分析与合成.

参考文献:

- [1] Musha T. The World of Fluctuation [M]. Tokyo: Koudann Press, 1991.
- [2] Musha T. Thought of Fluctuation [M]. Tokyo: NHK Press, 1995.
- [3] G W Wornell, A V Oppenheim. Estimation of fractal signals from noisy

measurements using wavelets [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(3): 611 - 623.

- [4] B B Mandelbrot, H W Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications [J]. 1968, SIAM Rev, 10(4): 422 - 436.
- [5] Patrick Flandrin. On the spectrum of fractional Brownian motions [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1989, 35(1): 197 - 199.
- [6] G W Wornell. Wavelet-based representations for the $1/f$ family of fractal processes [J]. Proceedings of the IEEE, 1993, 81(10): 1428 - 1450.
- [7] M S Keshner. $1/f$ noise [J]. Proc IEEE, 1982, 70(3): 212 - 218.
- [8] B B Mandelbrot. Some noises with $1/f$ spectrum, a bridge between direct current and white noise [J]. IEEE Trans Inform Theory, 1967, IT-13(4): 289 - 298.
- [9] I S Reed, P C Lee, T K Truong. Spectral representation of fractional Brownian motion in n dimensions and its properties [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41(5): 1439 - 1451.
- [10] I Daubechies. Ten Lectures on Wavelets [M]. New York: Capital City Press, 1992.
- [11] C K Chui. An Introduction to Wavelets [M]. San Diego: Academic Press, 1992.
- [12] S Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing [M]. San Diego: Academic Press, 1998.

作者简介:



毛 峡 女, 1952 年 9 月生于浙江省杭州市, 现任北京航空航天大学电子信息工程学院教授, 博士, 中国电子学会高级会员, 主要从事情感信息处理、 $1/f$ 波动理论、图像处理、生物医学工程和 EDA 等领域的研究。



陈 斌 男, 1973 年 8 月出生于山东, 2002 年获北京航空航天大学工学硕士学位, 现任中科院空间科学与应用研究中心工程师, 主要从事空间大容量存储技术、图像处理、情感信息处理等方面的研究。

朱 刚 男, 1978 年 12 月出生于天津市, 现为北京航空航天大学电子信息工程学院硕士研究生, 研究方向为图像处理、情感信息处理。

牟田一弥 男, 日本京都大学工学部电气工程系教授, 工学博士, 主要从事超导应用、电力电子、 $1/f$ 波动理论和模糊控制理论等领域的研究。

WWW.CNKI.NET