

# X-CT 有限角投影图像重建的截断奇异函数分析法

骆建华<sup>1</sup>, 姚 敏<sup>2</sup>, 楼正国<sup>3</sup>, 庄天戈<sup>1</sup>

(1. 上海交通大学医学院, 上海 200030, 2. 浙江大学计算机系, 杭州 310028, 3. 浙江大学医学院, 杭州 310027)

**摘 要:** 本文提出一种新的 X-CT 截断投影数据图像重建方法. 本文的方法是从采集到的 X-CT 有限角截断投影数据中提取用于重建图像的特征信息, 并用这些特征信息构造截断奇异函数, 再由这些截断奇异函数的线性泛函来重构 X-CT 图像, 达到消除 X-CT 有限角投影数据图像重建中的截断伪影之目的. 实际和模拟结果都表明这种方法效果高于现有方法.

**关键词:** 截断奇异函数; 奇异点; 有限角投影数据

**中图分类号:** R318.04; R318.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 07-0070-04

## X-CT Image Reconstruction from Finite Angle Project Data Using Truncated Singularity Function Analysis

LUO Jiar-hua<sup>1</sup>, YAO Min<sup>2</sup>, LOU Zheng-guo<sup>3</sup>, ZHUANG Tian-ge<sup>1</sup>

(1. Biomedical Engineering Dept, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China;

2. Dept of Computer, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China;

3. Biomedical Engineering Dept, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;)

**Abstract:** In this paper, we present a new method on X-CT image reconstruction from finite angle projections data. In this way, firstly characteristic parameters are extracted from X-CT finite angle project data, then some truncated singularity functions are constructed using those characteristic parameter, and finally X-CT images are reconstructed by those truncated singularity functions. Thus non truncated artifacts X-CT image from finite angle project data can be gained. Experimental and simulated results show that this method gives much better reconstructed image than available methods.

**Key words:** truncated singularity function; singularity points; truncated spectrum

### 1 引言

计算机断层成像(CT)已广泛地应用于医学成像、地震探测、材料非损伤检测等各种领域. CT 成像效果常常依赖于采集 CT 投影数据条件与理想条件的差距. 例如, 投影数据和旋转角的采样. 在工业应用中, 常常遇见被 CT 检查对象的尺寸比 CT 扫描系统检测器的宽度大得多, 只能用有限角投影数据重建图像. 这种有限角投影数据用现有方法重建的图像总有伪影<sup>[1]</sup>. 旋转角只能分布在  $\phi_1 \sim \phi_2$  之间, 不能均匀分布于  $(0, \pi)$ . 虽然, 在  $\phi_1 \sim \phi_2$  之间可以分割成足够多的角度, 投影数据也可以采样成足够多的值, 用于投影图像重建. 但这样构成的图像重建方程组往往是严重病态的和欠定的, 不满足 X-CT 投影数据重建图像的完备性条件<sup>[1]</sup>, 得到的图像有严重伪影. 完全投影和有限角在  $\phi_1 \sim \phi_2$  的截断投影数据集对应的频域分布如图 1(a)和(b)所示. 目前国内外解决截断投影成像中伪影问题主要且较有效的方法是最大熵和最小交叉熵多目标优化迭代重建方法<sup>[2,3]</sup>.

本文从分析图像截断伪影形成的数学本质开始, 从 CT 截断投影数据中提取的特征信息, 重建缺损投影数据, 最后重建 CT 图像, 达到消除截断伪影, 准确重建图像之目的. 这个是目前国际 CT 成像领域中是所没有的, 先进的, 可望在精度和速度方面比现有的方法有重大突破. 本文第二部分介绍奇异谱分析理论; 第三部分介绍从 CT 截断投影中, 用奇异谱分析法重建缺损频谱; 第四部分介绍 CT 截断投影图像重建算法

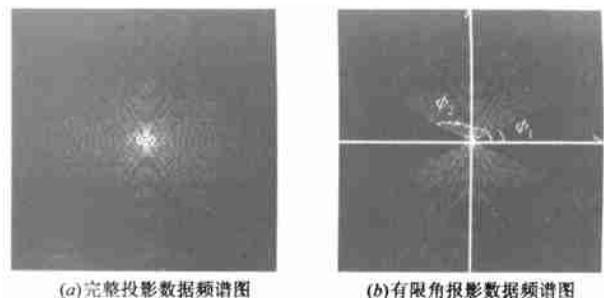


图1 投影数据示意图

收稿日期: 1999-11-25; 修订日期: 2000-03-31

基金项目: 国家自然科学基金(No. 39870211 和 No. 39970219) 资助课题

实现及讨论. 第五部分结论.

## 2 数学模型

根据奇异谱分析理论有以下结论:

第一、对于任意一维离散函数, 可用奇异空间  $\{W_k(i)\}$  中的线性泛函表示<sup>[4]</sup>. 即:

对于任一离散函数  $g(j)$ , 其中  $j=0, 1, \dots, N-1$ , 能够找到  $N$  个系数  $a_k, k=0, 1, \dots, N-1$ , 使得下式成立:

$$g(j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k w_k(j), \quad j \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (1)$$

其中,  $w_k(j) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j < k \\ 1, & k \leq j < N \end{cases}$

$a_k$  为  $w_k(j)$  的加权系数. 可以证明<sup>[4]</sup>, 它可表示为:

$$a_k = \begin{cases} g(k), & k=0; \\ g(k) - g(k-1), & k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

由于信号存在结构冗余,  $a_k$  多数为零.

第二、(信号奇异谱分析定理). 任何一个离散函数  $g(j)$  的频谱函数  $G(u)$  都可以表示为奇异谱空间  $\{W_k(u) | k, u$  为整数  $\}$  中的线性泛函<sup>[4]</sup>.

$$G(u) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k W_k(u), \quad u \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (2)$$

其中,  $W_k(u) = F[w_k(j)]$ ,  $G(u) = F[g(j)]$ ,  $F[\cdot]$  为傅里叶变换算子. 若信号中仅有  $Q$  个奇异点 (在  $a_k, k=0, 1, \dots, N-1$  中仅有  $Q$  个不为 0), 则信号的谱函数  $G(u)$  可由  $\{W_k(u) | k=0, 1, \dots, N-1\}$  中对应的  $Q$  个奇异谱函数的线性泛函表示. 即

$$G(u) = \sum_{i=1}^Q a_{b_i} W_{b_i}(u), \quad a_{b_i} \neq 0 \quad (2)$$

其中  $W_{b_i}(u)$  是以  $b_i$  位置为奇异点的奇异谱函数,  $a_{b_i}$  是  $W_{b_i}(u)$  的权系数. 所以, 获得信号的奇异点及其奇异谱分析加权系数就等价于获取信号的频谱数据.

## 3 模型参数的求取

根据投影定理, X-CT 投影数据  $p_y(x)$  与  $g(x, y)$  的频谱  $G(\cdot, \phi)$  之间存在以下关系:

$$G(\cdot, \phi) = \int p_y(x) e^{-j \cdot x} dx \quad (4)$$

对于有限角范围投影数据集, 可以由投影定理获得有限角范围内的 CT 截断频谱 (简称为有限角截断频谱), 如图 1(b) 所示. 即, X-CT 有限角截断投影图像重建问题可以转变为有限角截断频谱的图像重建问题.

对于有限角截断频谱的图像重建问题, 由于信号能量损失严重, 小波系数误差太大, 故不能用类似磁共振截断频谱图像重建方法的思路, 用小波变换方法预选信号的奇异点<sup>[5,6]</sup>. 为此, 根据奇异谱分析理论, 运用层析法筛选信号的奇异点, 确定奇异谱分析的加权系数.

### 3.1 层析法测定奇异点

一般, 对于非截断频谱重建的信号来说, 确定奇异点和奇异强度是非常容易的事.

首先, 分析截断频谱对检测奇异点和奇异点强度的影响.

设  $g(j)$  是长度为  $N$  的数字信号, 仅有的  $Q$  个奇异点为  $\{b_0, b_1, \dots, b_{Q-1}\}$ , 由公式 (1) 可以推知其差分信号  $D(j) = g(j) - g(j-1)$  可以表示为:

$$d(j) = \sum_{i=0}^{Q-1} a_{b_i} (j - b_i), \quad j=0, 1, \dots, N-1,$$

其中,  $(j - b_i) = \begin{cases} 1, & j = b_i \\ 0, & j \neq b_i \end{cases} \quad (5)$

当且仅当  $j = b_0, b_1, \dots, b_{Q-1}$  时,  $d(j) \neq 0$ . 对式 (5) 两边取傅里叶变换得:

$$D(u) = \sum_{i=0}^{Q-1} a_{b_i} F[(j - b_i)], \quad u=0, 1, \dots, N-1$$

其中  $D(u) = F[d(j)]$ . 用频域矩形函数  $R_{u_1-u_2}(u)$ :

$$R_{u_1-u_2}(u) = \begin{cases} 1, & u_1 \leq u < u_2 \\ 0, & u < u_1 \text{ 或 } u \geq u_2 \end{cases}$$

取  $D(u)$  的截断频谱  $D_{u_1-u_2}(u)$ :

$$D_{u_1-u_2} = D(u) R_{u_1-u_2}(u) \quad (6)$$

对截断频谱  $D_{u_1-u_2}(u)$  取傅里叶逆变换得:

$$F^{-1}[D_{u_1-u_2}(u)] = F^{-1}[D(u) R_{u_1-u_2}(u)]$$

$$d_{u_1-u_2}(j) = F^{-1}[D_{u_1-u_2}(u)], \quad r_{u_1-u_2}(j) = F^{-1}[R_{u_1-u_2}(u)]$$

可以证明  $r_{u_1-u_2}(j)$  是一个随着绝对值  $|j|$  的增大而正弦振荡衰减函数. 则由卷积定理得:

$$d_{u_1-u_2}(j) = d(j) * r_{u_1-u_2}(j)$$

把式 (2) 代入上式得:

$$d_{u_1-u_2}(j) = \sum_{i=0}^{Q-1} a_{b_i} (j - b_i) * r_{u_1-u_2}(j)$$

由卷积的筛选性质, 上式变为:

$$d_{u_1-u_2}(j) = \sum_{i=0}^{Q-1} a_{b_i} r_{u_1-u_2}(j - b_i), \quad j=0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

由式 (7) 知, 截断频谱重建信号的差分可以表示为  $Q$  个正弦振荡衰减函数  $a_{b_i} r_{u_1-u_2}(j - b_i)$  的迭加. 当  $j \notin \{b_0, b_1, \dots, b_{Q-1}\}$  时, 因各个  $a_{b_i} r_{u_1-u_2}(j - b_i)$  的影响, 使得不能确保  $d_{u_1-u_2}(j) = 0$ . 当  $j \in \{b_0, b_1, \dots, b_{Q-1}\}$  时, 小奇异强度的奇异点被大奇异强度的奇异点的振荡余波所淹没, 也不能保证  $d_{u_1-u_2}(j) \neq 0$ . 故常规差分检测奇异点方法陷入困境. 所幸的是, 最大奇异强度的奇异点往往是  $\{|d_{u_1-u_2}(0)|, |d_{u_1-u_2}(1)|, \dots, |d_{u_1-u_2}(N-1)|\}$  中的取最大值的点. 另一方面, 最大奇异强度的奇异点对应的正弦振荡衰减函数对其余奇异检测的干扰最强. 为此, 本文提出找到最大奇异强度的奇异点, 便从含截断伪影的差分信号中, 从大到小的顺序检测奇异点, 即层析法检测奇异点算法如下:

第一步, 初始化. 置奇异点集  $A$  为空. 奇异点集元素个数计数器  $Q$  归零.

第二步, 找出最大值点  $b_1, a = \max\{|d_{u_1-u_2}(0)|, |d_{u_1-u_2}(1)|, \dots, |d_{u_1-u_2}(N-1)|\}$ ; 如果  $b_1 \notin A$ , 则  $b_1$  加入到奇异点集  $A$  中, 并且计数器  $Q$  加 1.

第二步, 估算  $b_1$  的奇异强度  $a_{b_1} = [N / (u_2 - u_1)] a$

第三步,从  $d_{u_1 - u_2}(j)$  减法正弦振荡衰减信号  $a_{b_1} r_{u_1 - u_2}(j - b_1)$ , 即

$$d_{u_1 - u_2}(j) = d_{u_1 - u_2}(j) - a_{b_1} r_{u_1 - u_2}(j - b_1), j=0, 1, \dots, N-1.$$

第四步,如果  $a > T$  (预先给定的阈值,一般取初始  $d_{u_1 - u_2}(j)$  最大值的 1.0%), 则转回到第二步。

第五步,输出奇异点集  $A$  及奇异点个数计数器值  $Q$ 。

第六步,结束。

### 3.2 加权系数确定

设信号  $g(k), k=0, 1, \dots, N-1$  的频谱为  $G(u), u = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1$ , 由层析法测得的信号的奇异点为  $b_i, i=1, 2, \dots, Q$ 。由奇异谱分析定理知,信号  $g(k), k=0, 1, \dots, N-1$  的 Fourier 系数为

$$G(u) = \sum_{i=1}^Q y_{bi} W_{bi}(u)$$

其中  $y_{bi}$  为待定权重系数。对于已知的  $u_1, u_1+1, \dots, u_2-1$  各频率分量可以构成方程组:

$$\begin{cases} y_{b1} W_{b1}(u_1) + y_{b2} W_{b2}(u_1) + \dots + y_{bQ} W_{bQ}(u_1) = G(u_1) \\ y_{b1} W_{b1}(u_1+1) + y_{b2} W_{b2}(u_1+1) + \dots + y_{bQ} W_{bQ}(u_1+1) = G(u_1+1) \\ \dots \\ y_{b1} W_{b1}(u_2-1) + y_{b2} W_{b2}(u_2-1) + \dots + y_{bQ} W_{bQ}(u_2-1) = G(u_2-1) \end{cases} \quad (8)$$

记  $y = \{y_{b1}, y_{b2}, \dots, y_{bQ}\}^T$  为  $Q$  维权矢量,式(8)的矩阵形式为:

$$W \cdot y = G \quad (9)$$

其中  $G = \{G(u_1), G(u_1+1), \dots, G(u_2-1)\}^T$  为  $u_2 - u_1$  维截断频谱矢量,  $W$  为  $(u_2 - u_1) \times Q$  阶矩阵:

$$W = \begin{bmatrix} W_{b1}(u_1) & W_{b2}(u_1) & \dots & W_{bQ}(u_1) \\ W_{b1}(u_1+1) & W_{b2}(u_1+1) & \dots & W_{bQ}(u_1+1) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ W_{b1}(u_2-1) & W_{b2}(u_2-1) & \dots & W_{bQ}(u_2-1) \end{bmatrix}$$

显然,在奇异点测定正确的前提下,方程组(9)相容,并且: $A$ 、当  $u_2 - u_1 \geq Q$  时,可以证明  $W$  的秩为  $Q$ ,按线性方程组解的性质可得唯一解,高频频谱得到准确恢复; $B$ 、当  $u_2 - u_1 < Q$  时,可以证明  $W$  的秩为  $u_2 - u_1$ ,按线性方程组解的性质可得唯一伪逆解,高频频谱得到最佳恢复。

### 3.3 X-CT 有限角截断投影数据奇异谱分析图像重建算法

第一步,根据投影定理,把原始有限角截断投影数据转变为有限角截断频谱数据,如图 1(b) 所示。

第二步,按列计算截断频率(参见图 2):

$$u_1 = N/2 * \text{tg} \phi, u_2 = -N/2 * \text{tg} \phi$$

第三步,对第  $u_1 \sim N/2$  和  $u_2 \sim -N/2$  各行进行 FOURIER 反变换。

第四步,从 0 到  $N-1$  列分别执行:

(1) 运用层析法检测奇异点。

(2) 频建立诸奇异点对应的奇异谱函数的线性泛函,并由原始截断频谱数据确定其中的加权系数。

第五步,通过奇异谱分析算出高频分量:

$$G(u) = \sum_{i=1}^Q y_{bi} W_{bi}(u), u \in \{-N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1\}$$

第六步,用 FOURIER 变换方法重建信号。

## 4 实现及讨论

X-CT 有限角截断投影数据奇异谱分析图像重建算法简称奇异谱分析法。这种重建算法的测试是在一台 586/133 的微机上进行的。为了充分认识奇异谱分析成像方法的效果,用对有噪声的、无噪声的,实际的和模拟的 X-CT 有限角截断投影数据进行了成像算法测试,并把重建的图像和滤波反投影重建的图像进行如下比较。

### 4.1 计算机模拟有限角投影数据成像的图像比较

无噪声情况:图 3(a) 是  $128 \times 128$  个像素的无噪声标准图像。图 3(b) 和 (c) 是图 3(a) 的有限角 ( $27^\circ 153'$ ) 投影数据分别用滤波反投影和奇异谱分析方法重建的图像。把图 3(b)、(c) 分别和图 3(a) 比较得,图 3(b) 比图 3(c) 有多得多的伪影,这说明奇异谱成像法能完全消除截断伪影,由表 1 知奇异谱成像法的保真指标比滤波反投影高出三个数量级。

有噪声情况:图 4(a) 是  $128 \times 128$  个像素的含 5% 噪声标准图像。图 4(b) 和 (c) 是图 4(a) 的有限角 ( $27^\circ 153'$ ) 投影数据分别用滤波反投影和奇异谱分析方法重建的图像。把图 4(b)、(c) 分别和图 4(a) 比较得,图 4(b) 比图 4(c) 有多得多的伪影。由表 2 知奇异谱成像法的保真指标比滤波反投影高出二个数量级。这说明奇异谱成像法在有噪声情况下也消除截断伪影,但由表 1、表 2 比较可见算法对噪声敏感,这是由于噪声的引入使得奇异点数量  $Q$  急剧上升,频谱数据量  $n$  小于奇异点数量  $Q$  或方程(9) 成为不相容,使方程(9) 只能得一伪逆解。

### 4.2 实际 X-CT 投影数据重建算法的比较

图 5(a) 实际 X-CT 图像,图 5(b) (c) 为图 5(a) 的有限角 ( $27^\circ 153'$ ) 投影数据分别用滤波反投影和奇异谱分析方法重建的图像。实际 X-CT 有限角 ( $27^\circ 153'$ ) 投影数据成像情况,奇异谱成像法也能很好地消除截断伪影。

### 4.3 算法的计算耗费

本算法与现有方法相比计算耗费要大些,其主要耗费有:用投影定理把投影数据转换为频谱数据;用快速傅里叶反变换成像;找奇异点、解方程。本算法计算耗费还与被成像的图像特性有一定关系。简单图像(灰度的变化不太频繁,奇异点个数少)计算速度会快些,否则就慢些。实验结果表明其成像时间一般是滤波反投影算法成像的 1.5 至 2.5 倍。

## 5 结论

在奇异点个数较少的情况下,奇异谱分析法重建图像的误差仅由计算工具精度决定,即理论上讲缺损频率分量可以准确恢复。但对于含噪声情况下,由于在预测奇异点时采用层析法,得到重建图像的优化解。使得奇异谱分析成像,不论含噪声的还是无噪声的、对实际的还是对计算机模拟的 X-CT 有限角投影数据的实验结果,都表明了奇异谱分析成像是一种适合于有限角投影数据图像重建的高精度重建方法,保证能

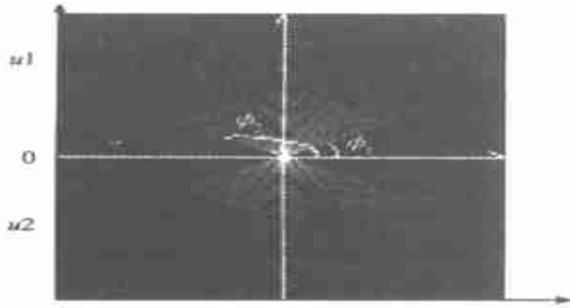


图 2

消除重建的图像的截断伪影, 图像的质量大大优于用传统方法重建的图像。



图 3 无噪声 X-CT 有限角投影数据图像重建算法比较

表 1 无噪声时的算法重建误差比较表<sup>[7]</sup>

算法	归一化均方误差	归一化绝对误差
滤波反投影	0.2308772	0.5937076
奇异函数分析	0.0002016	0.0006317



图 4 有噪声 X-CT 有限角投影数据图像重建算法比较

表 2 含 5% 高斯噪声时的算法重建误差比较表

算法	归一化均方误差	归一化绝对误差
滤波反投影	0.3033662	0.5854027
奇异函数分析	0.0040634	0.0058211



图 5 实际 X-CT 有限角投影数据图像重建算法比较

参考文献

[ 1 ] Martin Müller and Gonzalo R. Arce, Truncation artifacts in tomographic reconstruction from projections, Applied Optics, July 1996, 35 (20) : 3902 ~ 3913

[ 2 ] 朱杨明, 庄天戈, 韦钰. 用逼近定理解决有限角图像重建问题. 电子学报, 1994. 1, 22(1) : 26 ~ 31

[ 3 ] Riddell, Cyril; Savi, Annarita; Glardi, Maria Carla; Fazio, Ferruccio, Frequency weighted least squares reconstruction of truncated transmission SPECT data. IEEE Transactions on Nuclear Science, Aug 1996, 43 (4) pt 1 : 2292 ~ 2298

[ 4 ] Luo Jianhua and Zhuang Tiange. Signal reconstruction from MR truncated using singularity spectrum analysis, Proceeding of 20th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and BioLog Society, 1998. 11, 20(2) : 652

[ 5 ] 骆建华, 姚敏. B 小波和阶跃频谱分析在 MR 缺损频谱成像中的应用. 软件学报, 1999. 3, 10(3) : 317 ~ 323

[ 6 ] 骆建华, 楼正国. 磁共振截断频谱信号重建的奇异谱分析法. 电子科学学刊, 1999. 5, 21(3) : 397 ~ 403

[ 7 ] 骆建华, 吕维雪. 模糊多准则图像重建技术. 计算机学报, 1996. 8, 19(8) : 609 ~ 615



骆建华 1995 年毕业于浙江大学生物医学工程系, 获工学博士学位. 现为上海交通大学生物医学工程系副主任、副教授. 主要从事医学图像重建和处理的教学和科研工作. 获三项发明专利.

姚敏 1995 年毕业于浙江大学生医系, 获工学博士学位. 现为浙江大学计算机系统工程研究所副所长、教授. 长期从事智能信息处理与模糊系统的教学和研究工作. 出版学术专著一部, 发表研究论文一百多篇.