场论说对非线性网络回路电流法一般形式方程的推导

苏武浔,王建成,陈 年
(华侨大学电子工程系,泉州 362011)

摘 要: 本文从场论说的对非线性网络中积分形式的两组最基本的独立方程组出发能严格和简练地推导出从非线性网络到线性网络的回路电流法的一般形式的状态方程,并给出回路自复阻抗和回路间互复阻抗与复阻抗之间包括正负号关系在内的普遍关系式.

关键词: 非线性网络; 回路电流法; 一般形式方程; 场论推导
中图分类号: TM13 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2000)07-0142-03

The Deduction of General Equation of Loop Current Method in Non-linear Network by Field Theory

SU Wu-xun, WANG Jian-cheng, CHEN Shen-nian
(Department of Electronic Engineering, Hua Qiao University, Quanzhou 362011, China)

Abstract: Starting from the two most basic independent integral forms equations of field theory, the most general equation of loop current method in both non-linear and linear network could be deduced strictly and simply, meanwhile the general relation of self-complex impedance of a loop and mutual complex impedance between loops with complex electrical impedance, including the sign rule, was also given.

Key words: non-linear network; loop current method; general equation; deduction by field theory

1 引言

在大规模线性和非线性分析中,回路电流法占有重要的地位,但普遍未见非拓扑图论方法的严格和一般的推导,尤其未见对非线性网络回路电流法一般形式方程的推导.本文对具有 B 条支路和 N 个节点的非线性 RLC 网络,利用文献[1]的结果,从场论说的非线性网络中两组最基本的独立方程组出发,严格地推导出从非线性网络到线性网络的回路电流法一般形式的网络状态方程,并给出各种可能情况下回路自复阻抗和回路互复阻抗之间所存在的普遍关系的数学表达式.

2 场论说给出的推导依据

对 B 条支路和 N 个节点的非线性 RLC 网络,由积分形式的第一独立方程组[1]

$$\sum_{t=1}^{B}\int \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{s}_{\mu t}=0,\ \mu=1,2,\cdots,N-1$$

可导出非独立电流支路的电流经由独立电流支路的电流线性表出的关系为[2]

$$\dot{I}_i=\sum_{k'=N}^{B}\pm\dot{I}_{k'} \tag{1}$$

又由积分形式的第二独立方程组推理得到如下包含系数为方向余弦和独立方程数目的基尔霍夫定律的新表示[1,2]

$$\sum_{t=1}^{n}\cos(\boldsymbol{K}_{k't},d\boldsymbol{l}_{k't})\varepsilon_{k't}=\sum_{t=1}^{n}\cos(\boldsymbol{j}_{k't},d\boldsymbol{l}_{k't})\dot{I}_{k't}Z_{k't}+\sum_{\substack{t=1\\(t\neq e)}}^{n}\sum_{e=1}^{B}\cos(\boldsymbol{j}_t,\boldsymbol{j}_e)\dot{I}_e|Z_{k'te}^{(M)}|,\ k'=N,N+1,\cdots,B \tag{2}$$

式中
$$Z_{k't}=Z_{k't}^{(R+r)}+Z_{k't}^{(c)}+Z_{k't}^{(L)} \tag{3}$$

为复合元件复阻抗. k' 代表独立回路数, $Z_{k't}$ 代表 k' 回路 t 支路上包含非线性电阻(包括电源非线性内阻),非线性电容和非线性电感三元件的复合元件复阻抗.对某一工作点,它是电流的函数.

3 推导回路电流法的一般形式方程

现研究一个不含互感的正弦稳态网络,它有 B 条支路和 N 个节点.所谓回路电流就是指独立电流支路的电流在它所在的独立回路中作循环流动的假想电流.用它可以把式(1)中的非独立电流支路的电流表示成该支路所属的各独立回路的回路电流的线性组合

$$\dot{I}_i=\sum_{k'=N}^{B}\pm\dot{I}_{k'g},\ i=1,2,\cdots,N-1 \tag{4}$$

式中 $\dot{I}_{k'g}$ 表示在第 k' 独立回路里流经其中第 g 支路上的回路电流. B 条支路电流包括 $N-1$ 条非独立电流支路的电流和 $B-N+1$ 条独立电流支路的电流.当 t 支路电流为非独立电流支路的电流时

$$\dot{I}_t=\dot{I}_i=\sum_{k=N}^{B}\pm\dot{I}_{k'g},\ t=i=1,2,\cdots,N-1 \tag{5}$$

当 t 支路为独立电流支路的电流时

收稿日期: 1998-11-25; 修订日期: 2000-01-08
基金项目:国家自然科学基金与福建省自然科学基金资助课题

$$\hat{j}_t = \hat{j}_{k'},\ t = k' = N, N+1, \cdots, B \tag{6}$$

上式是前一式在右边的代数和中仅取正的一项的特殊情况. 因此, 合并上两式得到全部 B 条支路电流可经所有 $B-N+1$ 个回路电流线性表出的关系

$$\hat{j}_t = \sum_{k'=N}^{B} \pm \hat{j}_{k'g},\ t = 1, 2, \cdots, B \tag{7}$$

支路电流 $\hat{j}_t$, 必然也在某一独立回路里. 为了把它所在的独立回路也表示出来, 把 $\hat{j}_t$ 改写为 $\hat{j}_{kq}$, $\hat{j}_{kq}$ 表示它是在第 k 独立回路里其中第 q 支路上的支路电流(注意, 支路电流所属的独立回路用下标不带撇的 k 表示, 而回路电流所属的独立回路用下标带撇的 k' 表示). 上式表为

$$\hat{j}_{kq} = \sum_{k'=N}^{B} \pm \hat{j}_{k'g},$$
$$k' = N, N+1, \cdots, B;\ g = 1, 2, \cdots, n_{k'};\ q = 1, 2, \cdots, n_k \tag{8}$$

式中 $n_{k'}$ 和 n_k 分别表示组成第 k' 和第 k 个独立回路的支路数. 上式中 ± 1 或 0 是如下的方向余弦的取值

$$\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g}) = \begin{cases} 1, \text{当 } q \text{ 和 } g \text{ 支路重合且两者的电流方向相同} \\ -1, \text{当 } q \text{ 和 } g \text{ 支路重合且两者的电流方向相反} \\ 0, \text{当 } q \text{ 和 } g \text{ 支路不重合为一条支路} \end{cases} \tag{9}$$

把上式代入式(8), 并以电流强度表示为

$$\sum_{k'=1}^{B-N+1} \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g}) \dot{I}_{k'g} = \dot{I}_{kq},\quad k = 1, 2, \cdots, B-N+1;$$
$$g = 1, 2, \cdots, n_{k'};\ q = 1, 2, \cdots, n_k \tag{10}$$

为书写方便, 式中已把 k' 和 k 的编号由 $N, N+1, \cdots, B$ 改为 $1, 2, \cdots, B-N+1$.

由于式(2)中的电流 $\dot{I}_{k't}$ 是表示支路电流, 用现在的符号应写成 $\dot{I}_{kq}$ 所以, 把式(2)中的 k' 和 t 都分别改写成 k 和 q 后, 再把式(10)代入, 便得到以回路电流 $\dot{I}_{k'g}$ 为变量的独立方程组

$$\sum_{k'=1}^{B-N+1} \left\{ \sum_{q=1}^{n_k} \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{k'g}) Z_{kq} \right\} \dot{I}_{k'g} = \sum_{q=1}^{n_k} \cos(\boldsymbol{K}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) \varepsilon_{kq},$$
$$k, k' = 1, 2, \cdots, B-N+1;\quad g = 1, 2, \cdots, n_{k'} \tag{11}$$

如令

$$\dot{E}_k = \sum_{q=1}^{n_k} \cos(\boldsymbol{K}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) \varepsilon_{kq} \tag{12}$$

$$Z'_{kk'} = \sum_{q=1}^{n_k} \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g}) Z_{kq}$$
$$(k, k' = 1, 2, \cdots, B-N+1;\ g = 1, 2, \cdots, n_{k'}) \tag{13}$$

则式(11)表成简练形式

$$\sum_{k'=1}^{B-N+1} Z_{k'k} \dot{I}_{k'} = \dot{E}_k,\quad k = 1, 2, \cdots, B-N+1 \tag{14}$$

当 $k = 1, 2, \cdots, B-N+1$, 得

$$\begin{aligned} Z'_{11}\dot{I}_1 + Z'_{12}\dot{I}_2 + \cdots + Z_{1,B-N+1}\dot{I}_{B-N+1} &= \dot{E}_1 \\ Z'_{21}\dot{I}_1 + Z'_{22}\dot{I}_2 + \cdots + Z_{2,B-N+1}\dot{I}_{B-N+1} &= \dot{E}_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ Z'_{B-N+1,1}\dot{I}_1 + Z'_{B-N+1,2}\dot{I}_2 + \cdots + Z_{B-N+1,B-N+1}\dot{I}_{B-N+1} &= \dot{E}_{B-N+1} \end{aligned} \tag{15}$$

式(14)中已略去回路电流 $\dot{I}_{k'g}$ 第二个下标 g. 上式就是回路电流法的一般形式的电路状态方程, 其独立方程的数目和回路电流 $\dot{I}_k$ 的变量数目都等于 $B-N+1$, 因而有唯一解.

式(12)中, 当回路绕行方向与电源极性方向一致时, $\cos(\boldsymbol{K}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) = +1$; 相反时, $\cos(\boldsymbol{K}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) = -1$. 因而式(14)中的 $\dot{E}_k$ 表示组成第 k 独立回路的所有 n_k 条支路的电压源的源电压或电动势的代数和. 若支路接有电流源时, 可先等效变换成电压源, 再按上述电压源处理.

4 回路自复阻抗和互复阻抗

从式(13)可清楚阐明回路自复阻抗和互复阻抗的意义, 这里, 方向余弦起着重要的作用. 首先, 从式(13)中的 $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g}) Z_{kq}$ 和式(9)可见, 并非 k 回路内所有 q 支路的复合复阻抗 Z_{kq} 对 $Z_{kk'}$ 都有贡献, 有贡献的仅仅是被其它 g 支路所重叠(即重合)的那些 q 支路的复合复阻抗.

当 $k' = k$, 两回路重叠成一个回路. 当 $q \neq g$, $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{kg}) = 0$; 当 $q = g$ 时, q, g 两支路不仅重合而且电流方向也必相同, $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{kg}) = 1$. 由式(13)写出

$$Z'_{kk} = \sum_{q=1}^{n_k} \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) Z_{kq},\ k = 1, 2, \cdots, B-N+1 \tag{16}$$

可知, Z'_{kk} 的物理意义是表示第 k 独立回路内所有支路上的复合复阻抗的总和, 称为回路的自复阻抗. 当选取回路的绕行方向与回路电流方向一致时, $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) = 1$, 自复阻抗恒为正, 反之, 恒为负.

当 $k \neq k'$ 时, 式(13)中的方向余弦 $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g})$ 表明:

(1) 当不同回路中的 q 支路与 g 支路不重合时, 按式(9)有 $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g}) = 0$.

(2) 当不同回路中的 q 支路与 g 支路相重合, 且两者电流方向相同时, 按式(9)有 $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g}) = 1$; 两者电流方向相反时, 按式(9)有, $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g}) = -1$. 若被重合的 q 支路的数目为 n_1, 则式(13)写成

$$Z'_{kk'} = \pm \sum_{q=1}^{n_1} \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) Z_{kq},\ k, k' = 1, 2, \cdots, B-N+1;\ k \neq k' \tag{17}$$

由此可知, $Z_{kk'}$ 的物理意义是表示两独立回路之间各个公共支路上的复合复阻抗的代数和, 称为回路的互复阻抗. 上式表明, 互复阻抗的正负还取决于方向余弦 $\cos(\boldsymbol{j}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq})$ 的正负, 即还取决于回路绕行方向相对于回路电流的方向是否一致.

可以证明, 互复阻抗对下标 k 和 k' 是对称的. 把式(13)中的 k 和 k' 交换位置, 得出

$$Z_{k'k} = \sum_{q=1}^{n_k} \cos(\boldsymbol{j}_{k'q}, d\boldsymbol{l}_{k'q}) \cos(\boldsymbol{j}_{k'q}, \boldsymbol{j}_{kg}) Z_{k'q} \tag{18}$$

对右边不等于零的项, q 与 g 两支路必须重合. 重合后, q 支路既属于回路 k, 也属于回路 k', 即有

$$Z_{k'q} = Z_{kq};\ \boldsymbol{j}_{k'q} = \boldsymbol{j}_{kq};\ d\boldsymbol{l}_{k'q} = d\boldsymbol{l}_{kq}$$

同样, g 支路既属于回路 k', 也属于回路 k, 即有 $\boldsymbol{j}_{k'g} = \boldsymbol{j}_{kg}$. 代入式(18)中, 得

$$Z'_{k'k} = \sum_{q=1}^{n_k} \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, d\boldsymbol{l}_{kq}) \cos(\boldsymbol{j}_{kq}, \boldsymbol{j}_{k'g}) Z_{kq} = Z_{kk'}$$

证毕.

由上文可见, 由场论说不仅得到回路电流法的一般形式

的状态方程(14),而且得到式(13),它是一个既可以表示自复阻抗,又可以表示互复阻抗的数学表达式.它通过方向余弦第一次深刻地揭示了,当回路的全部支路都分别被自己支路重叠时,产生了回路的自复阻抗;当回路内只有一些支路被其他回路中的支路所重叠时,产生了回路的互复阻抗;不论是自复阻抗或是互复阻抗,都是仅当两支路重叠时,两支路的复阻抗才产生共映.

式(16)和(17)是第一次给出了回路自复阻抗和回路互复阻抗各与支路复阻抗之间普遍关系的数学表达式.

5 结束语

式(11)~(18)是式(1)~(3)联立下得到的.当式(3)所包含的三种电路元件都由非线性过渡到线性时,相应地,式(11)~(18)就由非线性网络过渡到正弦稳态线性网络.当式(1)~(3)又从正弦稳态线性网络过渡到电阻性稳恒线性网络时,则只需把式(11)~(18)中的复数改为实数就可以了.所以,一般地说,除了没有考虑互感外,式(11)~(18)是代表从非线性到线性,从时变到稳恒的回路电流法的一般形式的方程,其中包括在各种情况下回路自复阻抗和互复阻抗分别与复阻抗的普遍关系及正负号法则的数学表示.

场论说在其他方面的进展,请参看文献[4].

参考文献

[1] 陈 年,何煜光.非线性网络与线性网络统一的场论说.中国科学(A辑),1994,24(12):1316~1326

[2] 陈 年.电网络基本方程的场论.电子学报,1987,15(2):113~115

[3] 陈 年,王建成.从线性到非线性的四种基本电子元件特性普遍公式.科学通报,1993,38(16):1527~1531

[4] 陈 年.网络现代场论的建立与进展.科学通报,1996,41(15):1345~1350

2000年第7期 Acta Electronica Sinica No.7 2000

电子学报

(总期196期) (Monthly) (Series No.196)

主办单位	中国电子学会	Published by the Chinese Institute of Electronics, Beijing
协办单位	中国计算机报社	China Infoworld
编辑	《电子学报》编辑委员会	Edited by Editorial Board of Acta Electronica Sinica
主编	王守觉	Chief Editor: Wang Shoujue
总编辑	刘力	Director: Liu Li
通信处	北京165信箱 (邮政编码100036)	Editorial Office of Acta Electronica Sinica (P.O.Box 165, Beijing 100036, China)
电话	(010)68285082	Tel 86-10-68285082
传真	(010)68173796	Fax 86-10-68173796
排版印刷	中国纺织印刷厂	Printed by Textile Printinghouse, China
国内总发行	北京市报刊发行局	Distributed by Domestic: Beijing Baokan Faxingju, China
国外总发行	中国国际图书贸易总公司	Foreign: China International Book Trading Corporation
国内订购处	全国各邮电局	Subscription Office——All Local Post Offices in China

刊号: ISSN 0372-2112 CN11-2087/TN 邮发代号(国内/国外):2-891/M436 国内定价 ￥20.00