通道幅相误差条件下 MUSIC 空域谱的统计性能

苏卫民[1],顾 红[1],倪晋麟[2],刘国岁[1],张光义[2]
(1. 南京理工大学电子工程技术研究中心,南京 210094; 2. 南京电子技术研究所,南京 210013)

摘 要: 本文分析了通道幅相误差对空间目标参数估计算法 MUSIC 的影响. 推导了幅相误差下空域谱的统计表达式,揭示了幅相误差对空域谱影响的机理. 计算机仿真证明了理论分析的正确性. 结果表明:幅相误差降低了空域谱峰值,从而造成方向估计误差,也降低了分辨能力. 本文给出的结果对阵列设计人员具有一定的参考价值.

关键词: 空域谱; 超分辨; 误差分析
中图分类号: TN957.52 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2000) 06-0105-03

A Statistical Performance Analysis of the MUSIC Algorithm in the Presence of Amplitude and Phase Perturbaton

SU Wei-min[1], GU Hong[1], NI Jin-lin[2], LIU Guo-sui[1], ZHANG Guang-yi[2]
(1. *Electronic Engineering Department, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094, *China*
2. *Nanjing Research Institute of Electronics Technology, Nanjing* 210013)

Abstract: This paper presents an analysis of the effect of the amplitude and phase perturbation (modeling error) on the performance of the MUSIC algorithm. The theorectical expression of the statistical spatial spectrum for the case of modeling error existing in the system is derived. The theoretical analysis reveals the relationship between the error of spectrum and the variance of perturbation. The theoretical prediction is validated by computer simulating. The amplitude and phase perturbation decrease the peak values of spectrum and lower the resolution power. The results are of great significance to the array designer.

Key words: spatial spectrum; super-resolution; error analysis

1 引言

使用多通道和多阵元传感器接收信号,并进行目标源方向估计是现代信号处理的一个重要研究领域. 经过二十多年的研究,其理论和技术得到了迅猛的发展,并已广泛地应用于无线电通信、雷达和声纳超分辨、地震探测、导航、射电天文和医学等领域. 在许多的参数估计算法中,基于特征分解的空域谱算法[1~3]得到了广泛的重视和研究. 不仅因为它们具有相对较少的计算量,而且更重要的是具有传统方法无法比拟的方向超分辨能力. 然而,这些优良的性能依赖于良好的阵元通道和外部特性,如各阵元的幅相频率特性、阵元位置、外界环境的均匀一致性等. 实际的系统不可能保证这些理想的条件,如元件参数的差异和老化而造成的频率特性的不同,安装和抖动等因素造成的阵元位置的误差,附近金属物(如机载或舰船雷达)而造成各阵元对同一信号增益的差异等. 因此,研究实际系统参数条件下的算法性能,是实际使用这些超分辨技术时不能不考虑的问题.

十几年来,许多学者,尤其是国外科技人员广泛地研究了阵元幅相误差条件下空域谱的方向估计精度和分辨能力[4,5],由于没有人能给出这种误差情况下的空域谱的解析表达式,即没有建立空域谱的误差和扰动参数之间的直接的解析表达式. 因而,这些精度和分辨能力的讨论只能局限于初步的或实验统计的,不能给出相对简洁明了的解析表达式. 本文作者推导了幅相误差条件下的空域谱的解析表达式,从而避免了实际使用中,要进行大量的试验,才能得到其统计性能的麻烦. 大量的各种参数条件下的计算机仿真结果证明了解析表达式的精确性. 本文第二部分运用误差模型进行误差分析,第三部分给出计算机仿真结果,最后对全文作出总结.

2 误差分析

在实际的天线系统中,和各阵元相对应的通道包括高频放大、混频、解调等电路. 所以,通道对接收的信号有一个幅度和相位增益. 假设理想情况下,即通道具有完全一样的幅度和相位增益,也称其为理想的频率特性或频率特性的一致性. 反之则称其为频率特性不一致或失配. 如果理想情况下的通道的幅度和相位增益为 a、$e^{j\phi}$,实际系统中各通道的频率特性不可能完全一样. 为了表征这种不一致性,引入幅度和相位扰动 Δa、$\Delta\phi$. 因此,对于和 k 阵元相对应通道的幅度和相位增益为

收稿日期:1999-03-08;修订日期:1999-09-24
基金项目:国防科工委基金资助

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\tilde{a}_k = a(1+\Delta a_k), \quad (k=1,2,\cdots,L) \tag{1}$$

$$\tilde{\varphi}_k = e^{j(\phi_k+\Delta\phi_k)}, \quad k=1,2,\cdots,L \tag{2}$$

这里的扰动参数 Δa、$\Delta\phi$ 是均值为零,方差为 σ_a^2、σ_ϕ^2 的高斯随机变量. 有时,也称这种理想和实际的频率特性之间的差异为模型误差. 本文的分析,只考虑系统存在幅相误差. 用较大的采样数来获得比较精确的协方差矩阵.

由于通道频率特性的差异,使特征分解协方差矩阵而得到的特征矢量变为

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{e}_i + \Delta\boldsymbol{e}_i, \quad i=1,2,\cdots,L \tag{3}$$

代入 MUSIC 空域谱并求期望可得到:

$$\overline{\tilde{D}(\theta)} = D(\theta) - 2\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{a}^+(\theta)\left(\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{e}_i E[\Delta\boldsymbol{e}_i^+]\right)\boldsymbol{a}(\theta)\right] - \boldsymbol{a}^+(\theta)\left(\sum_{i=1}^{M}E[\Delta\boldsymbol{e}_i\Delta\boldsymbol{e}_i^+]\right)\boldsymbol{a}(\theta) \tag{4}$$

由于特征矢量的误差来源于协方差矩阵的误差($\tilde{\mathrm{R}} = \mathrm{R} + \Delta\mathrm{R}$),协方差矩阵的误差来源于通道幅度和相位的扰动. 因此,必须建立误差特征矢量和扰动参数之间的数量关系.

考虑由式(1)、(2)引入的幅相误差,并注意到 $\Delta\phi \ll 1$ 时,$e^{j\Delta\phi} \cong 1 + j\Delta\phi$,阵列信号的协方差矩阵的某一个元素为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{R}}(k,1) \cong \mathrm{R}(k,1)(1 &+ \Delta a_k + \Delta a_1 + j\Delta\phi_k - j\Delta\phi_1 + \Delta a_k\Delta a_1 \\ &+ j\Delta a_k\Delta\phi_k + j\Delta\phi_k\Delta a_1 - j\Delta a_k\Delta\phi_1 + j\Delta\phi_k\Delta\phi_1)\end{aligned} \tag{5}$$

这里略去三次、四次误差项. 由于各通道幅度和相位扰动相互独立. 所以,$\Delta\mathrm{R}$ 的非对角元素是零均值的随机变量,且 $\Delta\mathrm{R}$ 也是一个 Hermitian 阵. 定义误差协方差矩阵为 $\Delta\mathrm{R} = \varepsilon\mathrm{B}$,其中 $0 < \varepsilon \ll 1$,这时有 $\tilde{\mathrm{R}} = \mathrm{R} + \varepsilon\mathrm{B}$,如果只考虑式(5)中的扰动一次项时,$B$ 也是一个零均值高斯随机变量组成的 Hermitian 阵. 根据文献[6],假定 $\tilde{\mathrm{R}}$ 的单重特征值和非归一化特征矢量为

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + k_1^{(i)}\varepsilon + k_2^{(i)}\varepsilon^2 + \cdots, \quad i=1,2,\cdots,M \tag{6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{e}_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{L}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{jk}^{(i)}\varepsilon^k\boldsymbol{e}_j, \quad i=1,2,\cdots,M \tag{7}$$

$\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ 表示非归一化特征矢量,将特征矢量归一化,和特征值一起代入特征问题的扰动方程,并根据 ε 的各阶系数,得到系数 $\alpha_{j1}^{(i)}$,$\alpha_{j2}^{(i)}$,再求期望 $E|\alpha_{j1}^{(i)}|$,$E|\alpha_{j1}^{(i)}|^2$,$E[\alpha_{j2}^{(i)}]$. 这里假定幅度扰动方差在数量上等于相位扰动方差. 由此可得到误差特征矢量 $\Delta\boldsymbol{e}_i$ 期望值(取式(6)、(7)的 ε 的一次项作近似)

$$E[\Delta\boldsymbol{e}_i\Delta\boldsymbol{e}_i^+] = \sigma_e^2\sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq i}}^{L}\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq i}}^{L}\frac{(\boldsymbol{e}_{j1}^+\otimes\boldsymbol{e}_i^+\ \boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_{j2})(\lambda_i^2+\lambda_{j1}\lambda_{j2})}{(\lambda_{j1}-\lambda_i)(\lambda_{j2}-\lambda_i)}\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}^+ \tag{8}$$

$$E[\Delta\boldsymbol{e}_i] = E[\tilde{\boldsymbol{e}}_i - \boldsymbol{e}_i] = -\frac{\sigma_e^2}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{L}\frac{(\boldsymbol{e}_i^+\otimes\boldsymbol{e}_j^+\ \boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\lambda_i^2+\lambda_j^2)}{(\lambda_j-\lambda_i)^2}\boldsymbol{e}_i \tag{9}$$

这里 $\otimes$ 表示矩阵或矢量的各元素相乘. $\sigma_e^2 = \sigma_a^2 + \sigma_\phi^2$ 将式(8)、(9)代入 MUSIC 空域谱,可以得到在通道频率特性不一致的情况下空域谱的一阶统计表达式

$$\overline{\tilde{D}(\theta)} = D(\theta) + \sigma_e^2\boldsymbol{a}^+(\theta)\left\{\sum_{i=1}^{M}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{L}\frac{(\boldsymbol{e}_i^+\otimes\boldsymbol{e}_j^+\ \boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)(\lambda_i^2+\lambda_j^2)}{(\lambda_j-\lambda_i)^2}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^+ - \sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq i}}^{L}\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq i}}^{L}\frac{(\boldsymbol{e}_i^+\otimes\boldsymbol{e}_{j1}^+\ \boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_{j2})(\lambda_i^2+\lambda_{j1}\lambda_{j2})}{(\lambda_{j_1}-\lambda_i)(\lambda_{j_2}-\lambda_i)}\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{e}_{j_2}^+\right]\right\}\boldsymbol{a}(\theta) \tag{10}$$

为了求幅相误差条件下空域谱的方差,定义

$$\mathrm{var}[\tilde{D}(\theta)] = \mathrm{var}[\tilde{D}_c(\theta)] = \mathrm{var}[\boldsymbol{a}^+(\theta)\left(\sum_{i=1}^{M}\tilde{\boldsymbol{e}}_i\tilde{\boldsymbol{e}}_i^+\right)\boldsymbol{a}(\theta)] \tag{11}$$

所以,这里首先计算 $\overline{\tilde{D}_c(\theta)}$,由空域谱的定义可得

$$\overline{\tilde{D}_{cp}^2(\theta)} = \boldsymbol{a}^+(\theta)\overline{\tilde{T}}\boldsymbol{a}(\theta) \tag{12}$$

这里 $\tilde{T}$ 为

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\tilde{\boldsymbol{e}}_i\tilde{\boldsymbol{e}}_j^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\tilde{\boldsymbol{e}}_j\tilde{\boldsymbol{e}}_i^+ = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}(\boldsymbol{e}_i+\Delta\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i^+ + \Delta\boldsymbol{e}_i^+)\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)(\boldsymbol{e}_j+\Delta\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_j^+ + \Delta\boldsymbol{e}_j^+) \\ &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j^+ + \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_j\Delta\boldsymbol{e}_j^+ \\ &\quad + \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\Delta\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j^+ + \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\Delta\boldsymbol{e}_j\Delta\boldsymbol{e}_j^+ \\ &\quad + \boldsymbol{e}_i\Delta\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j^+ + \boldsymbol{e}_i\Delta\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_j\Delta\boldsymbol{e}_j^+ \\ &\quad + \boldsymbol{e}_i\Delta\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\Delta\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j^+ + \Delta\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j^+ \\ &\quad + \Delta\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_j\Delta\boldsymbol{e}_j^+ + \Delta\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\Delta\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j^+ \\ &\quad + \Delta\boldsymbol{e}_i\Delta\boldsymbol{e}_i^+\,\boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j^+\end{aligned} \tag{13}$$

对上式求期望,先计算 $E[\Delta\boldsymbol{e}_{i_1}\Delta\boldsymbol{e}_{i_2}^T]$,$E[\Delta\boldsymbol{e}_{i_1}\Delta\boldsymbol{e}_{i_2}^T]$,$E[\Delta\boldsymbol{e}_i\Delta\boldsymbol{e}_i^T]$再利用式(8)、(9)、(12)可得到

(1) 单目标信号作用于阵列时:

$$\overline{\tilde{D}_c^2(\theta_1)} = 1 - 2\sigma_e^2\sum_{k=2}^{L}\frac{(\boldsymbol{e}_1^+\otimes\boldsymbol{e}_k^+\ \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_k)(\lambda_1^2+\lambda_k^2)}{(\lambda_k-\lambda_1)^2} \tag{14}$$

(2) 双目标信号作用于阵列时:

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{D}_c^2(\theta_k)} = &\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^+\boldsymbol{a}(\theta)|^2 \\ &- 2\sigma_e^2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=3}^{L}\frac{(\boldsymbol{e}_j^+\otimes\boldsymbol{e}_k^+\ \boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k)(\lambda_j^2+\lambda_k^2)}{(\lambda_k-\lambda_j)^2} \\ &+ |\boldsymbol{a}^+(\theta)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^+\boldsymbol{a}(\theta)|^2\end{aligned} \tag{15}$$

由此可以算出空域谱的方差(略去 σ_e^2 的高阶小量)

$$\mathrm{var}[\tilde{D}_c^2(\theta_1)] = \mathrm{var}[\tilde{D}_c^2(\theta_k)] \approx 0, (k=1,2) \tag{16}$$

因此,空域谱对目标的分辨能力主要由 $\overline{\tilde{D}_c(\theta)}$ 的性能决定.

3 计算机仿真结果

对上述理论结果作了计算机仿真试验. 采用 10 个阵元,间距为二分之一载波波长的线性阵. 输入两个目标信号,一般情况下,求协方差矩阵时的采样数为 1000,图 1 中实线是没有幅相误差时的 MUSIC 空域谱,虚线是阵列通道存在 - 40dB 幅相误差时的 MUSIC 空域谱(根据式(10)作出). 从图中曲线可以看出,在 20dB 信噪比的情况下,引入 - 40dB 的幅相误差时(幅度或相位只有百分之一的误差),使谱峰值降低约 47dB. 由此可以看出通道幅度和相位增益的差异对空域谱的显著影响. 主要对谱峰的影响,即在目标方向上的谱值有较大的降低,而在其它方向上的谱值基本没有变化. 图 2 画出了幅相误

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

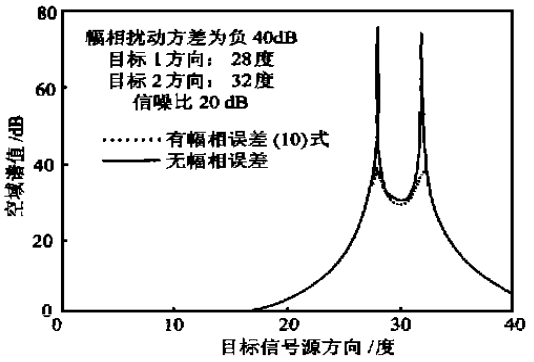


图 1　有无幅相误差条件下的空域谱比较

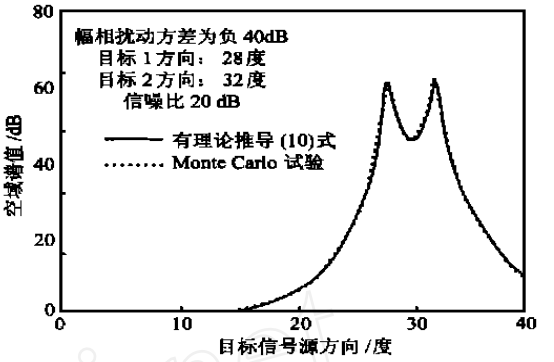


图 2　理论预测和 *Monte Carlo* 结果比较

差条件下,理论推导表达式和计算机实验仿真(Monte Carlo 实验)结果的比较.实线是理论推导得到的解析表达式(10)的结果,点线是 Monte Carlo 实验结果(10 次),从图中可以看出理论推导结果的有效性.

4　结论

本文从理论上分析了幅度和相位扰动对空域谱的影响,导出了空域谱和扰动方差的理论关系.结果表明:幅相误差所导致的空域谱误差和扰动方差成正比,其比例系数和理想情况下的特征值以及特征向量有关. Manto Carlo 试验结果证明了理论预测的正确性.从统计上说,幅相误差降低了空域谱的峰值,从而也降低了估计器对目标方向的分辨能力.

参考文献

[1] R. O. Schmidt, A signal subspace approtach to multiple emitter location, Ph. D. dissertation, Stanford Univ., Stanford, CA, 1980

[2] R. Kumaresan and D. W. Tufts. Estimating the angle of arrival of multiple plane waves. IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst., Jan. 1983, AES-19:134～139

[3] A.L. Swindlehurst and T. Kailaith. A performance analysis of subspace based methods in the presence of model errors, Part I: The MUSIC algorithm. IEEE Trans. On TASSP, 1992, 40(6):1758～1774

[4] Henry Cox, Robert M. Zeskind, and Mark M. Owen. Effects of Amplitude and Phase Errors on Linear Predicative Array Processors. IEEE Trans on TASSP, 1988, 36(1):10～19

[5] B. Friedlander. A Sensitivity Analysis of the MUSIC Algorithm. IEEE Trans on TASSP 1990, 38(10):1740～1751

[6] J. H. Winkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem. New York: Oxford University Press, 1965



苏卫民　副教授,1993 年、1998 年获南京理工大学通信与电子系统硕士、博士学位.主要从事自适应阵列信号处理技术、神经网络雷达目标识别.可视语言及数据库技术应用开发和研究工作.



顾　红　副教授,1991 年获南京理工大学通信与电子系统硕士学位.1995 年获西安电子科技大学博士学位.主要从事噪声雷达信号处理和系统、高速数字信号处理技术、神经网络和模糊系统、监控设备的开发和研制.

(上接第 113 页)

整体功能结构也可纵向划分为:管理、业务控制和呼叫/承载控制三个层次.

管理层主要面向业务生成、业务管理和业务客户化;业务控制层主要面向 PSTN 与 IP 网智能业务控制;而呼叫/承载控制层主要完成 PSTN 与 IP 网络具体业务底层执行.

本项目于 1999 年 8 月立项,计划 2000 年底完成.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net