

# 基于坐标平移不变性的 TOA 定位算法

杨天池, 金 梁

(国家数字交换系统工程技术研究中心, 河南郑州 450002)

**摘 要:** 本文提出了视距条件下利用坐标平移来实现到达时间 (TOA) 定位的新算法. 该算法首先利用基站 (BS) 与移动台 (MS) 相对地理位置关系, 采用坐标平移方法实现对 MS 位置的粗略估计; 通过对误差分量特性的分析, 提出了再次利用坐标平移消除误差分量相关性的方法, 使得误差的协方差矩阵变得易于求解, 从而实现对 MS 位置的精确估计. 仿真表明, 本文算法具有良好的性能.

**关键词:** 平移不变性; 无线定位; TOA 估计; 定位算法

**中图分类号:** TN929. 533 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2008) 09-1848-04

## The TOA Position Algorithm Based on Coordinate Shift Invariance

YANG Tian-chi, JIN Liang

(China National Digital Switching System Engineering and Technological Research Center, Zhengzhou, Henan 450002, China)

**Abstract:** A position method, based on time-of-arrival (TOA) in the line-of-sight environment, is proposed by using coordinate shift method. The rough result of the mobile station (MS) position can be calculated through the first step of coordinate shift by using the base station (BS) and MS geographical position relationship. This paper also proposed the error vector covariance by analyzing the character of the error vector, and the WLS method is used to get the second step estimation of the MS position. The simulation results verify the performance of this method.

**Key words:** coordinate shift invariance; wireless location; time-of-arrival estimation; location algorithm

### 1 引言

随着移动通信技术的不断发展, 使得对移动台 (MS) 位置的定位服务成为了可能. 服务基站 (BS) 通过与 MS 之间的信息传递, 提取各种有效的定位信息, 实现对 MS 的位置估计. 当今, 对 MS 的定位服务具有十分广泛的应用领域, 例如被困人员的辅助搜救、车辆导航、基于位置的服务等. 1996 年, 美国联邦通信委员会 (FCC) 专门制定了 E-911 规范<sup>[1,2]</sup>, 该规范要求移动运营商必须对移动台提供定位服务, 促进了无线定位技术的研究与发展.

当前, 流行的定位技术种类比较多, 根据定位参数的不同, 可分为到达角测量技术 (AOA)、到达时间定位技术 (TOA)、到达时间差定位技术 (TDOA) 等, 并由此派生出 FRIELAND<sup>[3]</sup>、CHAN<sup>[4]</sup>、泰勒级数展开<sup>[5]</sup>及分类征服 (DAC) 算法<sup>[6]</sup>等性能不同, 复杂度不同的定位算法.

在文献[7]中, CHAN 提出了一种近似最大似然估计算法 (AML), 该算法利用二次方程获取对 MS 位置的估计, 并根据代价函数大小判断最终估计结果, 该算法具有定位精度高, 计算简单的特点. 然而, 由于求解二次方程时会引入“虚假估计”解, 因此在每次迭代过程中需

要复杂的根判决过程.

本文利用坐标平移变化对 BS 与 MS 相对位置无影响这一特性, 提出了一种基于 TOA 定位的方法. 该方法首先根据 BS 与 MS 的相对地理位置关系, 确定一次坐标平移的原点位置, 实现对 MS 位置的粗略估计; 通过对误差的分析, 再次利用坐标平移消除误差分量的相关性, 从而达到对 MS 位置进行精确估计的目的. 本文方法具有定位精度高、计算简单等特点, 适于实际应用.

### 2 TOA 定位基本模型和一次坐标平移估计

假设在一次定位过程中, 有  $N$  个基站接收到 MS 的信号 ( $N \geq 3$ ), 第  $i$  基站接收到的 MS 的 TOA 值为  $t_i^{[8 \sim 10]}$ , 由此可以得到距离值  $r_i = c t_i$ ,  $c$  为光速则:

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中  $(x_i, y_i)$  是第  $i$  基站的位置坐标,  $(x, y)$  是移动台的位置坐标,  $r_i$  是 MS 到第  $i$  基站的距离,  $r_i = r_i^0 + e_{ri}$ ,  $e_{ri} \sim N(0, \sigma^2)$ . 由式(1)可以得到:

$$2A = b \quad (2)$$
$$\text{其中: } A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_N & y_N \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} s + K_1 - r_1^2 \\ s + K_2 - r_2^2 \\ \dots & \dots \\ s + K_N - r_N^2 \end{bmatrix},$$

并且有:  $s = x^2 + y^2$ ,  $K_i = x_i^2 + y_i^2$  (3)

式(2)的最小二乘解(LS)为:

$$= (A^T A)^{-1} A^T b / 2 \quad (4)$$

在式(4)中已假定矩阵  $A^T A$  为非奇异的, 本文只考虑  $A^T A$  矩阵为非奇异时的情况. 当  $A^T A$  为奇异矩阵时, 所有的 BS 位于同一条直线上, 与实际 BS 位置情况不符, 对于  $A^T A$  奇异时的算法, 可参考文[8]. 在实际定位过程中, 各基站的位置  $(x_i, y_i)$  已知, 测量值  $r_i$  可通过 TOA 的测量值换算得到, 但向量  $b$  中的  $s$  元素为未知项, 且  $s$  为移动台位置  $(x, y)$  的函数, 因此无法直接应用最小二乘(LS)方法来进行估计, 需对式(4)进行改进.

通过观察向量  $b$ , 可以发现各个元素结构相同并都包含有  $s$  项, 式(4)对最终估计结果实际上是向量  $b$  各个元素通过矩阵  $(A^T A)^{-1} A^T$  加权后的叠加值(见式(5)). 而  $(A^T A)^{-1} A^T$  的结果直接受到坐标原点的影响, 如果通过坐标原点位置的改变可以消除  $b$  中的  $s$  项, 那么利用式(4)就可实现对  $s$  的估计.

具体过程如下, 将式(4)展开, 并令  $F = (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$ , 则可以得到:

$$= F A^T b / 2 = \left( \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i + f_{12} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i + f_{22} \sum_{i=1}^N y_i \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (f_{11} x_i + f_{12} y_i) (K_i - r_i^2) \\ \sum_{i=1}^N (f_{21} x_i + f_{22} y_i) (K_i - r_i^2) \end{pmatrix} \right) / 2 \quad (5)$$

通过式(5)可以发现,  $s$  参数的系数均有两个公共部分  $\sum_{i=1}^N x_i$  和  $\sum_{i=1}^N y_i$ , 若  $\sum_{i=1}^N x_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^N y_i = 0$  成立, 即  $s$  的系数为 0, 则  $s$  参数可被消除. 令:

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (6)$$

并选择  $(X, Y)$  为新的坐标原点, 则有以下方程组成立:

$$\begin{cases} x_i = x_i - X \\ y_i = y_i - Y \\ \sum_{i=1}^N x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N y_i = 0 \\ s = x^2 + y^2 \\ K_i = x_i^2 + y_i^2 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

方程组中符号 ' $\hat{\cdot}$ ' 代表新坐标系下对应的参数. 由式(1)得:

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = ((x - X) - (x_i - X))^2 + ((y - Y) - (y_i - Y))^2 = r_i^2 \quad (8)$$

可以得到:

$$= (A^T A)^{-1} A^T b / 2 = F A^T b / 2 \quad (9)$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\left( \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i + f_{12} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_i + f_{22} \sum_{i=1}^N y_i \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (f_{11} x_i + f_{12} y_i) (K_i - r_i^2) \\ \sum_{i=1}^N (f_{21} x_i + f_{22} y_i) (K_i - r_i^2) \end{pmatrix} \right) / 2 \quad (10)$$

将式(7)代入式(10), 由式(7)中的第 3、4 项, 使得  $\sum_{i=1}^N x_i = 0$ ,  $\sum_{i=1}^N y_i = 0$  成立, 满足  $s$  系数为 0 的条件, 因此在新的坐标下, 向量  $b$  中将不再含有未知项  $s$ , 由此可得到不含未知参数的简化方程:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N (f_{11} x_i + f_{12} y_i) (K_i - r_i^2) \\ \sum_{i=1}^N (f_{21} x_i + f_{22} y_i) (K_i - r_i^2) \end{pmatrix} \right) / 2 \quad (11)$$

将得到的移动台坐标  $(x, y)$  代入式(7)中, 则可得到原坐标系下移动台  $(\hat{x}^1, \hat{y}^1)$  位置的估计. 上标“1”表示对 MS 位置的一次估计.

### 3 误差分析和改进定位算法

通过上面的 LS 算法可以很方便的得到 MS 位置的一种估计, 然而 LS 估计算法并非是最优的, 这是因为在文献[11]中已经证明, 各个误差分量不相关并且各个误差分量的方差相同时, 其估计结果才为最优. 在式(11)中, 各个误差向量的分量并非不相关, 且方差也不相同. 将式(11)以真实值和误差的形式展开:

$$\begin{pmatrix} x^0 + e_x \\ y^0 + e_y \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \left( \begin{pmatrix} s^0 + K_1 - (r_1^0)^2 \\ s^0 + K_2 - (r_2^0)^2 \\ \dots \\ s^0 + K_N - (r_N^0)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_s + (-2r_1^0 e_{r1} - e_{r1}^2) \\ e_s + (-2r_2^0 e_{r2} - e_{r2}^2) \\ \dots \\ e_s + (-2r_N^0 e_{rN} - e_{rN}^2) \end{pmatrix} \right) / 2 \quad (12)$$

上标“0”代表无误差的真实值, 即:

$$\begin{cases} x = x^0 + e_x \\ y = y^0 + e_y \\ s = s^0 + e_s \\ r_i = r_i^0 + e_{ri} \end{cases} \quad (13)$$

由式(7)可以得到:

$$s = ((x^0)^2 + 2x^0 e_x + e_x^2) + ((y^0)^2 + 2y^0 e_y + e_y^2) \quad (14)$$

考虑到  $r_i \gg e_{ri}$ , 则忽略  $e_{ri}$  的二次方项有:

$$-2r_i^0 e_{ri} - e_{ri}^2 = -2r_i e_{ri} + e_{ri}^2 = -2r_i e_{ri} \quad (15)$$

故式(12)可以写成:

$$= (A^T A)^{-1} A^T (b^0 + e_b) / 2 \quad (17)$$

$$e_b = \begin{pmatrix} e_s - 2r_1 e_{r1} \\ e_s - 2r_2 e_{r2} \\ \dots\dots \\ e_s - 2r_N e_{rN} \end{pmatrix} \quad (18)$$

由式(18)可以看出,  $e_b$  的各个分量是由误差分量  $e_s$  和  $e_{ri}$  共同作用的结果,  $e_s$  的存在,使得  $e_b$  的各个分量具有相关性,  $e_{ri}$  同  $r_i$  进行乘性运算,使得  $r_i e_{ri}$  具有不同的方差. 由此可见,误差向量  $e_b$  的各个分量为相关的,且方差不同,因此采用 LS 得到的估计值并非是最优的.

由文献[11]可知,对式(17)采用加权最小二乘(WLS)估计是最优的,这需计算  $e_b$  的协方差矩阵. 在式(18)中,  $r_i e_{ri}$  的方差易于求解,而  $e_s$  未知,难于直接获得  $e_b$  的协方差矩阵的表达式,因此通过某种变换减小甚至消除  $e_s$  误差分量,则  $e_b$  的协方差矩阵将变得易于求解.

由  $e_s$  的表达式(15),  $e_s$  的大小直接受到  $x$  和  $y$  的乘性影响. 可以考虑,当坐标原点移动到一次估计位置坐标  $(x, y)$  后,在新的坐标系下:

$$e_s = - (e_x^2 + e_y^2) \ll -2r_i e_{ri} \quad (19)$$

新的坐标系下对应的参数用上标“ $\wedge$ ”表示,由此误差向量可以近似写成:

$$e_b = \begin{pmatrix} -2r_1 e_{r1} \\ -2r_2 e_{r2} \\ \dots \\ -2r_N e_{rN} \end{pmatrix}^T \quad (20)$$

由此可以得到  $e_b$  的协方差矩阵为:

$$Q_{e_b} = 2 \text{diag}(r_1^2, r_2^2, \dots, r_N^2) \quad (21)$$

利用 WLS 来估计 MS 的位置有:

$$= \left( A^T W_{e_b} A \right)^{-1} A^T W_{e_b} b / 2 \quad (22)$$

其中  $W_{e_b} = (Q_{e_b})^{-1}$ .

由式(19)可知,  $(e_x^2 + e_y^2)^2$  越小,则式(21)“ $\wedge$ ”两边越接近,由式(22)估计的结果也就更加精确,可采用迭代的方法来提高定位精度,将式(22)计算的结果再次作为新坐标的原点,更新相关参数以及协方差矩阵,反复利用式(22)估计 MS 位置,迭代终止条件可以为  $\left( (\hat{x}^n)^2 + (\hat{y}^n)^2 \right) - \left( (\hat{x}^{n-1})^2 + (\hat{y}^{n-1})^2 \right)$ , 为一个很小的正实数,上标  $n$  和  $n-1$  分别代表第  $n$  次和第  $n-1$  次估计.

综上所述,整个定位算法的过程如下:

(1) 利用式(6)计算坐标原点  $(X, Y)$  的位置并根据式(7)更新相关参数,利用式(11),得到 MS 位置的一次估计  $(\hat{x}^1, \hat{y}^1)$ .

(2)  $(\hat{x}^1, \hat{y}^1)$  作为二次估计的坐标原点,并更新相关参数,利用式(22)得到 MS 位置的二次估计  $(\hat{x}^2, \hat{y}^2)$ .

(3)  $(\hat{x}^2, \hat{y}^2)$  作为再次估计的坐标原点,反复利用式(22)来估计 MS 的位置  $(\hat{x}^n, \hat{y}^n)$ , 提高定位精度.

本文算法假设基站与移动台位于二维平面内,二维

定位与三维定位不同之处在于用于标定 BS 与 MS 位置的维数不同,如果将 BS 和 MS 坐标扩展为三维坐标,可以很容易地将本文算法扩展到三维空间中.

#### 4 计算仿真

**仿真 1** 将本文 CS(Coordinate Shift algorithm)算法与文献[7]中的 AML 算法和文献[8]中(本文中简称为 GT 算法)算法进行比较. 假设有 4 个 BS 用于定位服务,位置分别为  $B1(3000, 2200)$ 、 $B2(-4300, -2900)$ 、 $B3(5000, -1700)$ 、 $B4(-3320, 1700)$  而 MS 的真实位置分别位于  $M1(100, -378)$ 、 $M2(-2000, -2000)$ 、 $M3(6400, 800)$ 、 $M4(16000, 6000)$  四点,其位置关系如图 1 所示,图中三角符号表示的为 BS 的位置,而圆点表示 MS 的位置. 接收信号模型采用  $r_i = r_i^0 + e_{ri}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $e_{ri} \sim N(0, \sigma^2)$ . 进行 10000 次独立仿真实验,并统计各算法的均方误差:

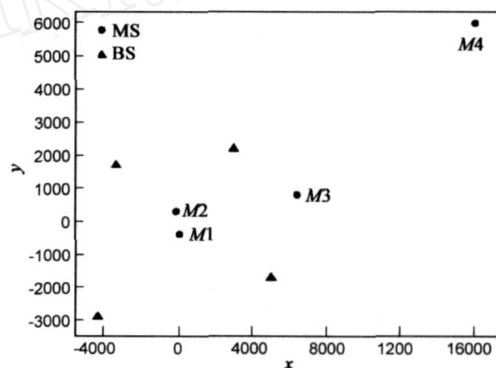


图 1 BS 与 MS 相对地理位置关系图

$$MSE = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} ((\hat{x}(i) - x)^2 + (\hat{y}(i) - y)^2) \quad (23)$$

在  $n = 20$  的时,将 CS 算法(进行两次迭代运算)和 GT 算法进行了仿真,仿真结果如表 1 所示,BS 在  $M1 - M4$  点的定位精度均不相同,这是因为定位精度不仅受到定位误差的影响,同时还受到 BS 与 MS 相对位置的影响<sup>[12]</sup>. CS 算法在  $M1 - M4$  四个位置,均能很接近 CRLB 限,而 GT 算法在  $M3$ 、 $M4$  两点性能显著下降,定位误差急剧增大;比较  $M1$ 、 $M3$  两点仍然可以发现,  $M1$ 、 $M3$  两点的 CRLB 十分接近,但是 GT 算法在该两点处的性能却相差甚大,出现上述现象的原因是 GT 算法的估计误差随 MS 和 BS 距离成线性关系变化,而 CS 算法利用加权矩阵将这种线性误差关系进行了有效的抑制,CS 算法性能要明显优于 GT 算法.

表 1 CS、GT 算法以及 CRLB 的均方误差仿真结果  $n = 20$

MS	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$
GT	567.5	502.6	1142.7	8068.1
CS	535.3	476.1	544.9	4658.9
CRLB	533.7	474.8	540.9	4637.0

表 2 CS、AML 算法随变化的均方误差仿真结果

	20	50	100	200
CS	535	3340	13350	53495
AML	536	3349	13359	53603
CRLB	534	3336	13344	53377

表 2 数据则是 CS 算法与 AML 算法在 A 点处随变化的仿真结果,CS 算法和 AML 算法均是进行 2 次迭代,随着  $\sigma^2$  的增大,CS 算法和 AML 算法都能十分接近 CRLB 限,CS 算法性能略优于 AML 算法,CS 算法相比 AML 算法具有如下三个优点:

(1) AML 有“虚假估计”解的问题,每次迭代需要复杂的根判决过程,而 CS 算法为线性运算,无需根判决过程;

(2) AML 迭代过程并非趋向于 MS 的真实值,而 CS 算法的每一次迭代都更加接近于 MS 的真实值;

(3) AML 算法性能依赖于 MS 位置的初始估计,而 CS 算法则可通过一次坐标平移对 MS 位置进行粗略估计,从而也避免了对 MS 初始位置估计的依赖问题.本文提出的 CS 算法优于 AML 算法也更具有实用性.

仿真 2:仿真不同数目 BS 条件下的定位性能,并同克拉美罗限 (CRLB, Cramer-Rao Lower Bound)<sup>[12]</sup> 进行比较.在原有 4 个 BS 基础上增加基站 B5 (1000, - 3500),图 2 的 (a) 子图中分别仿真了只有 3 个 (B1 - B3)、4 个 (B1 - B4)、5 个 (B1 - B5) 定位 BS 时的均方误差曲线图,随着定位基站数目的增多,定位精度随之增高.图 2 的 (b) 子图为 CS 算法与 CRLB 关系的曲线图,随着误差方差的加大,CS 算法的均方误差仍能十分接近 CRLB 限,并未出现随误差加大性能急剧恶化的现象.

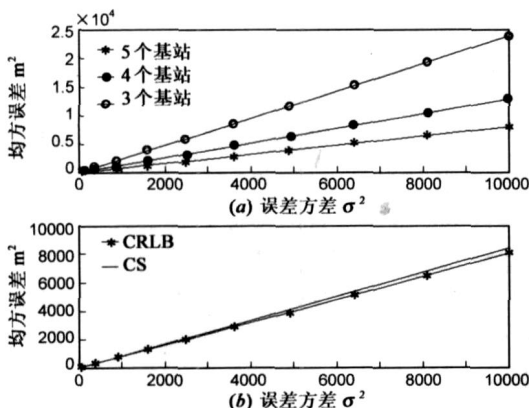


图 2 CS 算法性能仿真图

## 5 结论

本文提出了坐标平移 TOA 定位算法.利用 BS 与 MS 几何位置关系以及对误差分量特性的分析,通过坐标平移变换,实现对移动台位置的一种精确估计方法.该方法具有定位精度高,对 BS 和 MS 相对地理位置不敏感,计算简单等优点.该算法完全采用线性估计的方法,运

算复杂度低.仿真结果表明即使测量误差较大时,该算法仍接近 CRLB 限,验证了该算法的优良性能.

## 参考文献:

- [1] J J Caffery. Wireless Location in CDMA Cellular Radio Systems [M]. Norwell, MS, USA: Kluwer Academic Publishers, 1999. 20 - 25.
- [2] Jeffrey H Reed, et al. An overview of the challenges and progress in meeting the E-911 requirement for location service [J]. IEEE Communications Magazine, 1998, 36(4): 30 - 37.
- [3] B Friedlander. A passive localization algorithm and its accuracy analysis [J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1987, 12 (1): 234 - 245.
- [4] Y T Chan, K C Ho. A simple and efficient estimator for hyperbolic location [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1994, 42(8): 1905 - 1915.
- [5] W H Foy. Position location solutions by Taylor-series estimation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1976, 12(2): 187 - 194.
- [6] J S Abel. A divide and conquer approach to least-squares estimation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1990, 26(3): 423 - 427.
- [7] Yiu-Tong Chan, et al. Exact and approximate maximum likelihood localization algorithms [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2006, 55(1): 10 - 16.
- [8] J Caffery. A new approach to the geometry of TOA location [A]. J Winters. IEEE VTS-FALL VTC2000 [C]. Boston: IEEE Press, 2000. 1943 - 1949.
- [9] Michaela C Vanderveen, et al. Estimation of multipath parameters in wireless communications [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1998, 46(3): 682 - 690.
- [10] G C Carter. Coherence and time delay estimation [J]. Proceedings of IEEE, 1987, 75(2): 236 - 255.
- [11] 张贤达. 现代信号处理 (第二版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. 58 - 59.
- [12] X D Zhang. Modern signal processing, second edition [M]. Beijing: Tsinghua Press, 2002. 58 - 59. (in Chinese)
- [12] Yiu-Tong Chan, et al. Time-of-arrival based localization under NLOS conditions [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2006, 55(1): 17 - 24.

## 作者简介:

杨天池 男, 1978 年 10 月出生于辽宁省阜新市. 国家数字交换系统工程技术研究中心博士研究生, 主要研究方向第三代移动通信、蜂窝网定位等. E-mail: yang\_tch@163.com

金梁 男, 1969 年 4 月出生于北京, 现为国家数字交换系统工程技术研究中心博士生导师, 国家科技进步一等奖、第十届中国青年科技奖和求是奖获得者, 主要研究方向第三代移动通信、智能天线技术等. E-mail: jinliang@ndsc.com.cn