

基于流形学习的三维空间数据网格剖分方法

侯文广, 丁明跃

(华中科技大学生命科学与技术学院, 图像信息处理与智能控制教育部重点实验室, 湖北武汉 430074)

摘 要: 三维空间数据的三角网格剖分实质是寻找嵌入在三维空间中的二维流形, 通过建立流形学习与网格剖分的本质联系, 提出基于流形学习的空间数据网格剖分方法. 依据流形学习的重构误差准则, 实现三维空间数据的维数约简; 对生成的二维数据按照 Delaunay 准则划分; 将二维数据之间的拓扑关系映射到对应的三维数据点集. 相对于其它数据降维方法, 流形学习更能保持数据之间的本质联系, 使重构的三角网格与物体表面拓扑差异性更小. 实验表明, 该方法对于非同胚于球物体的表面重建能够取得良好的效果.

关键词: 流形学习; 三角剖分; 拓扑; 网格

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 11-2579-05

Method of Triangulating Spatial Points Based on Manifold Study

HOU Wen-guang, DING Ming-yue

(School of Life Science and Technology, Huazhong University of Science and Technology, Image Processing and Intelligent Control, Key Laboratory of Education Ministry of China, Wuhan, Hubei 430074, China)

Abstract: The way of triangulating spatial points based on manifold study is advanced in this paper. According to the theory of manifold, spatial points is the measurement result of a certain 2D manifold in 3D space, so the process of triangulation is to search 2D manifold substantively. Therefore, the paper divides triangulating spatial points into three steps. The first step is to decrease the dimension of points on basis of the correlative relation among points within a certain distance and the condition of minimizing the reconstruction error. The second step is to carry out Delaunay partition for points on plane. At last, the topology connection relation is mapped to 3D spatial points. The result is that the difference between the triangle net and object's surface achieves minimum practicality. This way can be easily acknowledged, reduces complication and diminish the diversity in triangulation. Many experiments show the method provided in paper can achieve good result for objects which are not homeomorphism to sphere by choosing appropriate method of manifold study and neighborhoods.

Key words: manifold study; triangulation; topology; mesh

1 引言

利用测量手段获取目标表面大量的空间数据点, 再基于空间散乱数据点进行曲面重建, 完成目标建模是逆向工程的基本原理. 传统的曲面重建一般采用参数模型, 如 NURBS 样条曲面, 其局限性表现在: 三维数据点的参数化不足以精确地表示光滑物体; 通常需要将数据点人工分割为多个离散的片断, 并保证各片断参数曲面之间的连续性. 随着计算技术的发展, 曲面重建更多采用网格形式表示, 不规则三角网以其优良的性能受到普遍的重视. 对空间数据的三角剖分, 国内外学者进行了大量的研究, 其方法可以概括为四种^[1-3]: (1) 雕刻方法. 首先将点云进行 Delaunay 四面体剖分, 然后按照一定的规则不断搜索与目标外形相似的三角网格, 直到完成整体拓扑网格搜索, Boissonnat 对表面拓扑同构于球的物体介绍了一种算法, 通过层层剥离冗余的四面体, 使物体表面的所有数据点可见, 类似的还有 α -shape、 α -

Graphs 和 α -Seleton 等方法; (2) 区域增量构造方法. 从一个良好的种子三角形或三角网开始, 不断地按照制定的规则在点云中确定一个点与已构造的网格边组成新的三角网, 直至所有点都遍历结束; (3) 距离等值面法. 以 Hoppe 等人为代表^[6], 通过从点云决定的距离场中抽取等值面的方法得到网格拓扑, 核心算法是 Marching Cube; (4) 局部 Delaunay 三角化^[2]. 将一定邻域内的点投影到其切平面上, 完成平面的 Delaunay 三角剖分后, 再将拓扑关系映射到三维空间点, 并进行网格整合. 其中存在的问题是: 雕刻算法和区域增量构造方法搜索空间庞大, 重构效率低; 距离等值面法重构的三角网顶点并不通过原始数据点, 局部三角化容易改变数据点的拓扑关系, 而且距离等值面法和局部三角化均需要法向量一致性的检查, 计算过程相对复杂.

2 流形学习与曲面重构

2000 年 Tenenbaum 和 Roweis 在 Science 上发表了 two

收稿日期: 2008-09-19; 修回日期: 2008-10-27

基金项目: 中国博士后科学基金 (No. 20070410282)

篇文章^[7,8],分别提出了各自的流形学习算法:等距映射(Isomap)和局部线性嵌入(LLE).随着研究人员对流形学习的广泛关注,流形学习在包括数据挖掘、图像处理、模式识别和计算机视觉等许多领域中得到了深入的研究和应用.流形学习的目的是寻找嵌入在高维空间数据中的低维流形,并重构从低维流形到高维数据的映射关系.其定义概括为^[5]:设 $Y \subset R^D$ 是一个低维流形, $f: Y \rightarrow R^D$ 是一个光滑嵌入,其中 $D > d$,数据集 $\{y_i\}$ 是随机生成的,且经过 f 映射为观测空间的数据 $\{x_i = f(y_i)\}$,流形学习就是在给定观察样本集 $\{x_i\}$ 的条件下重构 f 和 $\{y_i\}$.

由于数据误差的存在,实际是寻找使得重构误差最小的映射关系和低维流形.流形学习的基本原理是局部邻域内数据的相关性,使得到的低维流形保持高维数据的某种性质不变为目标.作为非线性的降维方法,流形学习更能够体现数据的本质属性,其参数设置简单,求解相对容易,但要求对低维流形做出一定的假设.低维流形的维数通常与研究目标有关,邻域的选取比较困难特别是在数据点分布不均匀的情况下.

三维空间数据的曲面重建实质是寻找空间点之间



图1 基于流形学习的三维空间数据网格剖分方法

3.1 流形学习方法

目前,流形学习的主要方法有:局部线性嵌入(Locally Linear Embedding, LLE)、等距映射(Isomap)、拉普拉斯特征映射(Laplacian Eigenmap, Leigs)、海赛局部线性嵌入(Hessian Locally Linear Embedding, HLLLE)、局部切空间排列等(Local Tangent Space Align, LTSA)^[5],本节主要简介各种流形学习方法的基本思想,具体算法不再详述.LLE:在高维空间中每个采样点可以近似地由其邻近点线性表示,在低维空间中保持每个邻域点的权值不变,重构误差最小的条件下得到生成坐标.ISOMAP:力求保持数据点之间的测地距离不变,离得很近的点间的测地距离用欧氏距离代替,离得较远的点间的测地距离用最短路径来逼近.Leigs:在高维空间中离得很近的点投影到低维空间中的象也应该离得很近,通过使用两点间的加权距离作为损失函数,计算相应的降维结果.HLLLE:利用局部的切空间坐标定义海赛矩阵,恢复出局部等距于低维欧氏空间中开连通子集的流形生成坐标.LTSA:利用样本点邻域的切空间来表示局部的几何性质,然后由这些局部切空间排列来构造流形全局坐标.

3.2 流形学习方法的统一框架

尹峻松等人把流形学习方法综合到一个统一的图

的拓扑关系,使得重建网格与物体表面拓扑同胚.从流形学习的角度认识空间数据的三维剖分,实质上就是在三维空间中寻找二维流形的过程.目前,基于流形学习的方法实现空间数据的三角剖分未曾见有成果报道,局部 Delaunay 三角化的方法从一定的程度上遵从了流形学习的思想^[2],通过局部的 PCA 变换达到降维的目的,使得局部的重构误差达到最小,而没有顾及全局性的误差.

3 基于流形学习的三角网格剖分算法

空间数据不可避免地会存在噪声、数据冗余和分布不均等情况,一般而言,对空间数据去噪和约简寻找嵌入在数据集中低维流形的必要步骤.本文提出的三维空间数据网格剖分方法的原理是:基于流形学习的方法,对预处理后的数据进行降维,其低维流形的维数为2,在一定的准则约束下使原始数据与降维后重构数据的误差最小;在平面中按照 Delaunay 算法实现三角划分;再将拓扑关系映射到三维空间数据;对三角划分的结果进行评价,如图1所示.平面数据点集的 Delaunay 划分是计算几何的典型问题,任意平面点集的 Delaunay 划分是唯一存在的.

形嵌入框架^[5],较好地说明了流形学习的基本原理,归纳如下:(1)设高维数据空间中包含 N 个样本的数据集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,构造一个 $N \times N$ 的邻域矩阵或者相似性矩阵 W ,设 D 为定义在样本空间的二元函数,一般为欧氏距离函数,则 $W_{ij} = D(x_i, x_j)$;(2)根据每个算法相应地变换矩阵 W ,产生一个规范化的谱矩阵 M ;(3)嵌入向量均可归纳到框架:

$$E(Y) = \min \|Y^T M Y\|$$

计算矩阵 M 的最小 $d+1$ 个特征值 λ_i 所对应的特征向量 μ_i ;(4)样本点 x_i 的嵌入值为矩阵 M 的第 j 个特征值对应的特征向量.

流形学习的理论基本上遵循了这一个框架,高维非线性数据集的低维流形离不开局部关系来保持原始数据之间的相互关系,它们之间的不同之处主要在于构造的局部邻域结构不同以及利用这些局部邻域结构来构造全局的低维嵌入结果不同.根据不同的约束准则,各种流形学习方法将其计算过程转换为求解矩阵特征值和特征向量的问题,计算过程相对简单.

3.3 近邻域的选择

流形学习的共同问题是要求选择合适的邻域.近邻域的选择有两种策略, k 邻域策略是选择距离样本点在欧氏距离下最近的 k 个点作为邻域点;邻域的策略

是选择距离样本点的欧氏距离不大于 r 的点集. 对于分布均匀的数据集而言, 只要选择合适的 k 和 r , 两种策略得到的邻域基本是相同的; 否则, k 邻域的策略能比较好地适应数据分布的不均匀性. 理论上讲, 邻域的大小与流形表面的曲率和采样点的密度有关, 理想的邻域选择应该是自适应的, 文献[4]在比较全面总结前人研究成果的基础上指出: 近邻域的大小应该具有一定的自适应性, 既能高精度逼近局部流形的切空间, 也能在相邻的邻域之间保持足够的交叠以便加强局部信息的传播效率, 提出通过邻域的不断收缩、扩展的方法确定近邻域. 尽管该方法从理论上比较完善, 但是其中的一些参数难以确定, 邻域大小的确定仍然是流形学习和三角剖分中的难点和尚未完全解决的问题. 本文中采用了固定的 k 邻域策略, 根据采样点的密度、目标表面曲率变化、数据降维和网格剖分的结果寻找较好的 k 值.

3.4 三角剖分的质量评价

对于三角剖分的质量评价, 一般采用视觉主观评

价标准, 缺点是对局部细节的判断能力差; 或采用类似于对平面数据剖分的评价方法, 通过计算三角网的最小角度值、角度方差等统计量评价, 该标准是否适合于空间数据剖分的质量评价, 尚未从理论上得到证明. 为此, 本文提出如下三种方法进行结果的验证和检查: (1) 获取沿任意轴方向的任意间隔的剖面, 通过得到的剖面线判断三角网是否存在交叉和重叠的情况; (2) 获取沿任意轴方向的任意间隔的剖面, 通过计算点云包含的体积来判断三角剖分结果的正确性; (3) 基于构建的三角网可以内插得到位于目标上任意两点的空间距离, 通过与实际距离的比较判断其正确性和精度. 方法 (2) 对于非封闭目标的三角剖分结果, 不具有较高的可信度; (3) 可以提供一种客观的标准, 但是实际距离可能会无法获取, 而且该误差还包括了纹理重建和人工给定特征点的误差等. 相比较而言, 方法 (1) 是一种具有较广适用性的标准. 由于以上三种方法均是通过与实际值 (或真值) 的差异作为判断标准, 提供了客观和具有一定适用性的依据.



图2 三维空间数据

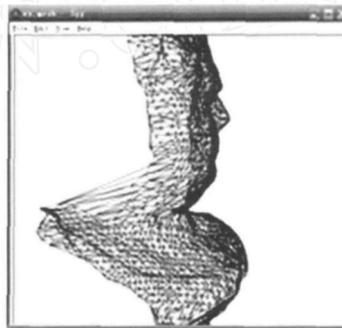


图3 利用空间点的平面坐标三角剖分的结果

4 实验与分析

采用结构光的方法, 获取一个石膏头像面部和胸部大量的三维数据点, 对数据点进行约简和去噪后的结果如图 2 所示, 三角剖分最直接的方法就是选取空间数据的平面坐标进行 Delaunay 划分, 然后将拓扑关系映射到空间数据. 对于石膏头像而言, 使用该方法剖分后的结果如图 3 所示, 显然破坏了空间数据之间的拓扑关系.

本文实现了流形学习 (LLE、Isomap、HLLC、LTSA 和 Leigs) 的算法, 然后对空间数据实现了降维, 生成的坐标如图 4 所示. 从结果可知, 前四种流形学习方法的生成坐标基本保持了原始数据

之间的拓扑关系, 其中 HLLC 和 LTSA 的结果相对较好, 二者的生成坐标相似程度较高, 头部存在一定的差异;



(a) LLE



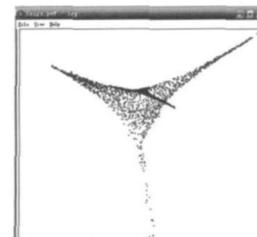
(b) Isomap



(c) HLLC



(d) LTSA



(e) Leigs

图4 降维后的数据

而 Leigs 方法得到的结果出现了折叠现象,无法能够正确表示空间数据之间的拓扑关系(使用不同的参数进行了实验,结果类似)。

表1是采用不同的流形学习方法对1962个三维空间数据降维后,按照平面 Delaunay 划分后得到的结果。邻域的选择采用 k 邻域策略,采用了固定的邻域;大小的确定主要依据该目标表面的曲率变化和数据的采样间隔,可以理解为 k 近邻范围内的目标同胚于平面,即近邻范围内的点可以近似线性重构;同时也根据数据的降维结果做了进一步的调整。对于该实验数据而言,初始确定的近邻域大小为12,该邻域范围内不包括样本点自身,试验结果发现LLE、Isomap 和 LTSA 方法采用12个邻近点是合适的,而 HLLC 方法采用6个邻近点能够得到较好的降维结果。将拓扑连接关系映射到空间数据,其三维效果如图5所示,HLLC 和 LTSA 的结果相对较好。

表1 三角剖分的计算结果

	LLE	Isomap	HLLC	LTSA
三维数据点数		1962		
邻近点数	12	12	6	12
三角形数量	3748	3911	3889	3823

图6是采用LTSA方法对空间数据曲面重构后的三



图5 基于流形学习方法生成的三角网

维效果图,视觉判断其重构质量良好,同时也利用本文2.4中的方法进行了质量评价,显然该数据并不适合采用(2)的方法;按照方法(1),沿着任意轴线按照一定间隔计算得到大量剖面线,均不存在重叠和交叉的情况,限于篇幅的限制,本文不在此列举;按照方法(3),内插得到该头像中部分特征点的空间距离,如眼角、嘴巴和鼻子等,利用游标卡尺在实际物体上量测得到对应的实际距离,二者比较结果表明重建的精度优于0.3mm。

图6 石膏像面部重建后的效果图

5 结论

对于同胚于球物体的三角剖分而言,虽然不能直接利用本文中所述的方法,但它与流形学习的本质上仍然是一致的,可以在较小的范围内按照本文方法进行网格剖分,然后再进行网格的拼接和整合。本文实验表明:不同的流形学习方法对空间数据降维的结果差异明显,可能无法得到正确的生成坐标;不同的参数的选择,主要是邻域(对于本研究)可能引起结果的差别

悬殊;实验也表明了本文思路的正确性和结果的可靠性。同时,由于流形学习具有较为复杂的数学理论,而且三维空间数据的网格剖分本质就是一个病态问题,其中的很多问题还有待于进一步的深入研究,期望本文的研究成果能够起到抛砖引玉的作用。

参考文献:

- [1] 周儒荣,张丽艳,苏旭,等.海量散乱点的曲面重建算法研究[J].软件学报,2001,12(2):249-255.

Zhou Rurong, Zhang Liyan, Su Xu, et al. Algorithmic research

- on surface reconstruction from dense scattered points [J]. Journal of Software, 2001, 12(2): 249 - 255. (in Chinese)
- [2] 王青, 王融清, 鲍虎军, 等. 散乱数据点的增量快速曲面重建算法[J]. 软件学报, 2000, 11(9): 1221 - 1227.
Wang Qing, Wang Rongqing, Bao Hujun et al. A fast progressive surface reconstruction algorithm for unorganized Points [J]. Journal of Software, 2000, 11(9): 1221 - 1227. (in Chinese)
- [3] 吕晟珉. 曲面重建的网格方法和技术研究[D]. 杭州: 浙江大学研究生院, 2005.
Lu Shengmin. Research on Mesh Algorithms of Surfaces Reconstruction Technology [D]. Hangzhou: Graduate School of Zhejiang University, 2005. (in Chinese)
- [4] 王靖. 流形学习的理论与方法研究[D]. 杭州: 浙江大学研究生院, 2006.
Wang Jing. Research on Manifold Learning: Theories and Approaches [D]. Hangzhou: Graduate School of Zhejiang University, 2005. (in Chinese)
- [5] 尹峻松, 肖健, 周宗潭, 等. 非线性流形学习方法的分析与应用[J]. 自然科学进展, 2007, 17(8): 1015 - 1025.
Yin Junsong, Xiao Jian, Zhou Zongtan, et al. Analysis and application of non-linear manifold study method [J]. Natural Science Evolution, 2007, 17(8): 1015 - 1025. (in Chinese)
- [6] H Hoppe. Surface Reconstruction from Unorganized Points [D]. Washington: Department of Computer Science and Engineering, Washington University, 1994.
- [7] J Tenenbaum, V De Silva, J. Langford. A global geometric framework for nonlinear dimension reduction [J]. Science, 2000, 290: 2319 - 2323.
- [8] S Roweis, L Saul. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding [J]. Science, 2000, 290: 2323 - 2326.
- [9] J Costa, A O Hero. Manifold learning using euclidean K-nearest neighbor graphs [A]. Proceedings of IEEE International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing [C]. Montreal, 2004(4): 988 - 991.
- [10] D Donoho, C Grimes. Hessian Eigenmaps: new tools for nonlinear dimensionality reduction [J]. Proceedings of National Academy of Science, 2003(10): 5591 - 5596.
- [11] Z Zhang, H Zha. Principal manifolds and nonlinear dimensionality reduction via tangent space Alignment [J]. SIAM J. Scientific Computing, 2004, 26(1): 313 - 338.
- [12] V de Silva, J B. Tenenbaum. Global versus local methods in nonlinear dimensionality reduction [A]. NIPS '2002 [C]. Vancouver, 2003. 705 - 712.

作者简介:



侯文广 男, 1974 年生于山西平遥, 2006 年获武汉大学博士学位, 2006 至 2008 年在华中科技大学图像识别与人工智能研究所从事博士后工作, 主要研究方向为图像处理和计算机视觉。
E-mail: houwenguang99@163.com

丁明跃 男, 1961 年 5 月生于湖北麻城, 现为华中科技大学特聘教授, 博士生导师, 长期从事图象处理、模式识别和计算机视觉等领域的科研工作。