用于有限元分析的一种新的等级基多重网格法

程军峰, 徐善驾
(中国科学技术大学电子工程与信息科学系, 安徽合肥 230026)

摘 要: 本文利用自适应有限元剖分和等级基技术, 提出了一种新的等级基多重网格的分析方法. 由于该方法的限制算子 R 具有十分简单的表达形式, 使得新方法的算法非常简单, 计算实例证实它具有很高的计算效率.

关键词: 多重网格; 自适应加密; 等级基
中图分类号: TN011 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2003) 09-1303-04

A New Multigrid Method Based on Hierarchical Basis for the Finite Element Analysis

CHENG Jun-feng, XU Shan-jia
(Department of Electric Engineering and Information Science University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230026, China)

Abstract: According to the process of adaptive finite element analysis, a multigrid implementing method based on hierarchical basis is proposed. It can be implemented much easily due to rather simple form of the restrictor operator R used in the analysis. A test example shows that the present method possesses high computing efficiency.

Key words: multigrid method; adaptive refine; hierarchical basis

1 引言

多重网格法是近年来颇受重视的一种加速迭代方法, 它具有最优的计算复杂度 O(N) 且收敛速度具有不随离散网格的减小而变慢的特点[1], 这些都是它优于传统迭代法的地方.

最早的多重网格的思想由前苏联学者 R P Fedoreko 于 1964 年提出后, 获得了广泛的重视, 在理论和实际应用方面, 都已得到了长足的发展, 至今方兴未艾. 理论方面, 国外的 Brandt, Nicolaids, Hackbush[2], Bramble, Xu Jinchao 等做了大量的卓有成效的工作; 在应用方面, 多重网格已在多个工程领域, 如流体力学[3], 固体力学[4], 反应堆设计等领域中得到了广泛的应用, 然而它在计算电磁学的应用方面还处于初始阶段, 相关文献并不多见[5~7]. 国内王朝甫在他的博士论文中, 对多重网格在电磁问题中的应用, 作了有意义的研究[6]. 另外, 穆墨于 1986 年利用外推技术建立了求解椭圆边值问题的多重网格技术[8]; 1991 年, Zhang 和 Huang 又提出了多重网格区域分裂方法[9]; 1992 年, 应隆安将多重网格与无限元结合建立了无限元多重网格法[10]. 多重网格法不仅适用于线性问题, 而且也可用于非线性问题[3], 这更是大大拓宽了它的应用范围.

多重网格的实现一般说来较为复杂, 所以, 如何使它的实现更为简便成为一个很值得研究的方向, 已有不少学者对此进行了研究. 其中的一个问题是如何简单有效地确定多套网格, 传统的方式是固定式的, 更好的做法是利用自适应加密过程来形成多套网格, 如文献[11]. 实现过程中的另一个问题是如何方便地确定每层的限制算子. 文献[12]利用小波基来实现了积分方程的多重网格求解, 该实现的限制算子是单位阵与 0 的形式, 非常简单. 本文将采用自适应加密的方法形成多套网格, 并利用与小波基具有类似属性的等级基来完整记录自适应加密的信息, 然后, 在综合等级基和多重网格迭代的基础上, 巧妙地实现了一种新的多重网格分析方法. 该法同时具备了文献[12]的限制算子 R 形式非常简单, 以及文献[11]的适用范围广泛且具有很好的收敛效果的优点.

2 有限元的自适应局部加密

要进行有限元的自适应局部加密, 依次要解决两个问题, 首先是如何根据得到的结果来确定"坏"的网格单元的问题, 接下来要解决的是如何加密, 以及用合适的数据结构记录以方便程序编写的问题.

对后一问题, 本文借鉴了文献[4]的做法. 而解决前一问题的关键是找到单元的合适的后验误差估计, 它应该与实际的误差系数存在较为确定正比关系, 唯有如此, 通过它才能找到真正的坏单元. 文献[13]就提供了这样的一种估计方法, 并且通过数值实验表明了它具有我们所需要的特点.

该法实现的简单过程: 定义域是待分析单元及周边的一

收稿日期: 2002-05-17; 修回日期: 2002-10-18
基金项目: 国家自然科学基金(No. 9871026); 国家科技部基金

小部分所在的区域 De(图 1 中的阴影部分),函数空间定义为三条边上的中点对应的二次拉格朗日形函数张成的空间 $S_0^h(De)$,然后通过下边的方程的 Galerkin 求解得到属于该函数空间的函数 D.

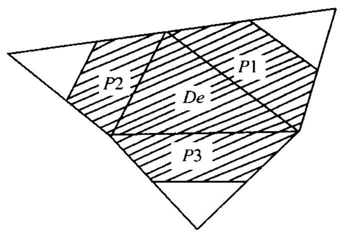


图 1 单个单元的后验估计示意图

$$a(D, <) = (f, <) - a(u^h, <),\ P < I\ S_0^h(De)$$

式中的 u^k 为有限元求解的结果. 通过上式求得 D 后, 再通过 $\sqrt{a(D, D)}$ 即可以得到该单元上误差的后验估计量.

3 等级基

伴随上述的自适应加密过程的等级基基本上可分为两种:其一是文献[14]所使用的适用于所谓的 p 型加密的等级基. 该种等级基的高阶基的集合完全包含低价基的集合,因此加密后的刚度矩阵的主体就是加密前的刚度矩阵, 从而可以很方便地求得. 其二是如同文献[15, 16]中所用的适于 h 型加密的等级基. 其特点是原本存在的点对应的基函数保持不变,而只是在基的集合中加入于加密过程中新产生的点对应的基函数. 该种等级基对应的刚度矩阵虽然比通常的结点基对应的要稠密些,但条件数却得到了有效的降低, 迭代会因此加速收敛. 这种等级基具有与小波基类似的特点, 即基可分成低频与高频部分,而这可以很自然地与多重网格中预光滑器对误差的平滑作用联系起来.

本文采用第二种类型的等级基. 接下来通过一些相关的符号对其进行简单的描述. 假设网格进行了 N 次加密, 则这 N 次的网格对应的剖分以 8_I 来标记,而对应的函数空间标记为 V_I, ,其中下标 I= 1, , , N. 假设对编号为 m 的网格进行了加密,就可以得到编号为 m+ 1 的网格,该层网格对应的函数空间即为编号为 m 的网格对应的以缓变和低频为主的函数空间 V_m 再加上由新加入的等级基构成的以速变和高频为主的函数空间 W_m,表示为 $V_{m+1}= V_m$ Ý W_m. 这就启发我们, 当取 m+ 1 网格上的低频分量(即对应于限制算子 R 的操作)时,可以忽略高频空间 W_m 中的分量, 而只取 m 层网格的 V_m 中的分量,该特点将在下面新的等级基多重网格法中得到应用.

4 新的等级基多重网格法

众所周知,多重网格实现中, 粗网格与细网格上的系统方程是通过限制算子 R 与延拓算子 P 联系着的. 若细网格系统方程为

$$Ax= f \tag{1}$$

则粗网格上的可表示为

$$RAPy= Rf \tag{2}$$

在一般情况下, R 与 P 满足 $P= R^T$的关系,尽管这里的 R 不是方阵,它仍可以看作是一种特殊的预处理器. 从另外一个角度来看,如果方程(1)为最细网格上结点基对应的系统矩阵方程,那么与此相对应的等级基的系统矩阵方程可表示为

$$GAG^Ty= Gf \tag{3}$$

其中的矩阵 G 为等级基与结点基的转换矩阵, 它是一稀疏方阵. 很明显,由结点基系统方程转换为等级基方程相当于对原先的刚度矩阵进行了预处理,当然式(2)和式(3)的含义是不同的: 式(2)的预处理其有效性在于减小了计算规模, 因为误差中的高频分量在细网格的迭代过程中被消除了,所以整个区域上的解可以用粗网格上的较少的未知量来表示,从而达到减少计算的目的; 式(3)中的预处理的意义在于改善矩阵 A 的条件数,从而加速收敛,以减少计算量. 实际上, 我们可以综合利用这两种思想来加速收敛, 接下来先以一粗(m 层)和一细(m+ 1 层)的两层的情况为例作一下简单地介绍.

先对 m+ 1 层上的方程(3)进行前光滑迭代, 得到细网格上的误差向量 z 满足的方程

$$GAG^Tz= GAG^Ty_0- Gf= r \tag{4}$$

其中 y_0 为前光滑迭代后的结果. 众所周知,迭代将导致误差中的高频分量快速衰减,而高频分量部分的子集是细网格相对于粗网格多出来的等级基,即细网格上的等级基空间 V_{m+1}(即 V_m Ý W_m)的 W_m 部分;低频部分由于衰减缓慢而得以保留,而该部分的等级基是 V_m 的子集. 所以, 如果 W_m 和 V_m 的维数分别为 l 和 n, 则向量 z 就可以表示为

$$z= L^T\mathit{zc} \tag{5}$$

其中 zc 为一 n 阶向量, 而矩阵 L 为

$$L[\,I_{n@n}\quad 0_{n@l}\,] \tag{6}$$

将式(5)代入方程式(4), 并在方程两边同时左乘 L 就得到如下的方程

$$LGAG^TL^T\mathit{zc}= Lr \tag{7}$$

观察式(7), 可以发现 LG 变成了方程(4)的预处理器,这就实现了预期的目标. 而且, 不难发现, 方程(7)也正是粗网格上的系统方程, zc 是粗网格上的未知量. 求式(7)中的 zc 后, 即可根据式(5)对细网格上前光滑迭代后的结果 y_0 进行校正.

以上虽仅为两层网格的情况,但这种操作可以很容易地推广到多层网格情形, 从而实现有限元的多重网格求解. 值得指出的是, 与这种处理相配合,我们在最细网格上对等级基的排列是按先粗后细的顺序, 即严格遵从加密过程中的等级基的产生次序.

上述处理的优点是限制算子 R 的形式非常简单,这就大大方便了多层网格法实现. 一旦在最细的网格上得到 G 矩阵, 在后续的各层粗细网格运算的转换中, 将不须考虑网格的细节. 而且观察式(7)可以发现, 各粗网格上的系统矩阵方程正是最细网格上的系统矩阵方程的一部分, 所以在整个多重网格的分析过程中利用的只是最细网格上的系统矩阵方程.

本文中细网格上的初值是利用套迭代技术得到的,在此过程中每层粗网格上进行了两步迭代,依据此近似解进行第二部分所述的自适应有限元加密,产生本文所用的等级基. 本文 MG 的前光滑用的是 Guas2Seidel 法, 后光滑用的是 BiCG 法, 迭代的次数均为一次.

5 计算实例

为验证本文方法的有效性和精确性, 我们利用本文提出

的多重网格法对二维金属波导中的介质不连续性结构的散射问题进行了分析, 结构如图 2 所示, 相关的参数分别为: 介质宽度为 5cm, 高度 110cm, 相对介电常数为 410, h 是 315cm. 入射波为主模 TM_0 模, 波长为 10cm. 前后边界选定在离开介质边沿 6 厘米的地方. H_z 为作用变量, 它满足二维亥姆赫兹方程.

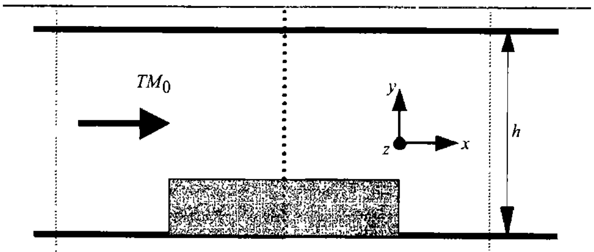


图 2　二维波导介质不连续结构

由于所分析的结构具有对称性, 我们只需要对结构的一半进行两次分析, 第一次对称面设定为开路, 第二次设定为短路. 本文分析的为入射端所在的那一半, 即左半部分. 截断面上的吸收边界条件采取文献[17] 中的形式

$$\frac{5H_z}{5x} = jk_0H_z - 2jk_0H_0e^{-jk_0x} \tag{8}$$

反射系数表达式为

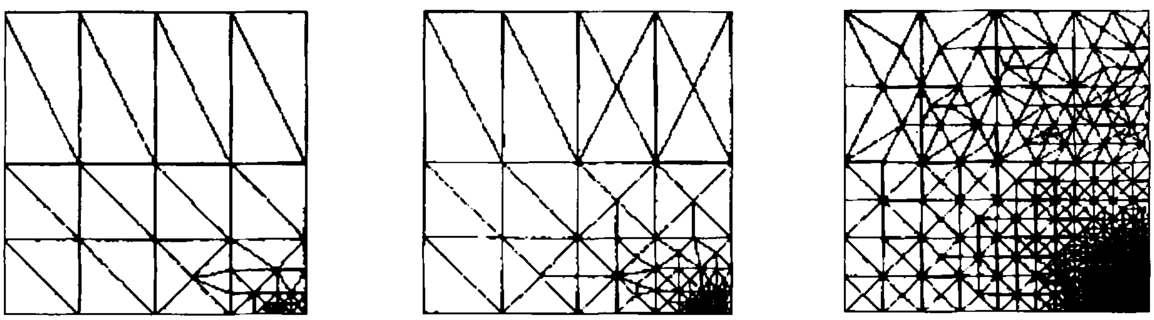
$$R = \frac{H_z(x_1) - H_0e^{-jk_0x_1}}{H_0e^{jk_0x_1}} \tag{9}$$

其中的 x_1 为前截断面的横坐标. 整个结构的反射系数 R 可以表示为(R1+ R2) / 2, 其中 R1 和 R2 分别为对称面开路和短路的情形下的反射系数.

本文用一次三角型单元, 对该结构进行分析的过程中先后进行了 6 次加密. 加密用的后验估计公式涉及的相关函数和泛函分别为: u^h 即为H_z^h, f 为 0,

$$a(u,v) = \iint\left(\frac{5u}{5x}\frac{5v}{5x} + \frac{5u}{5y}\frac{5v}{5y} - k_0^2uv\right)dxdy$$

求出误差估计值后, 再按单元总数 1/3 的比例对那些误差较大的单元进行协调划分, 该加密过程所产生的网格序列如图 3 所示, 由于篇幅的限制, 这里只给出了其中的 3 个.



(a) 网格 l　　(b) 网格 2　　(c) 网格 4

图3　网格细分的过程

我们还分别用 BiCG 加速的 Jacobi 法(JBiCG), 及等级基作为预处理器的 BiCG 迭代法(HBBiCG) 实现了系统方程的求解, 作为本文方法(简记为HBMG) 的参照. 图 4 给出的是固定收敛标准 $E= +r_n+ / +r_0+$ 为 1.e- 5 的情形下, 几种方法在不同层次的网格上达到收敛所用时间的比较, 其中 HBMG 所用的时间包括此前的套迭代过程的时间, 很明显本文方法随结点数增多呈近乎线性的增长, 这与 MG 的计算复杂的为 O(N) 的结论是一致的, 而两种对照方法都是呈现近似于指数增长的趋势, 这就证明了本文的多重网格法具有最优的收敛阶. 图 5 给出的是在最细的网格上三种方法的收敛过程, 很

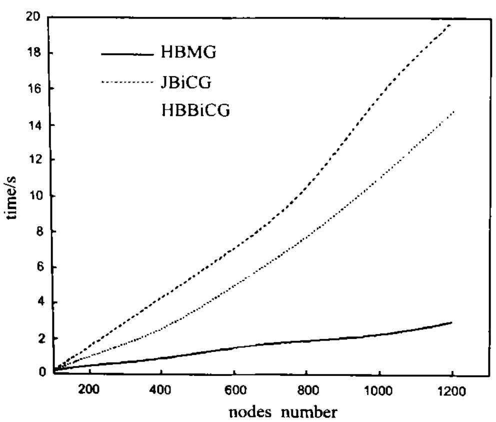


图 4　迭代收敛时间随结点数目的变化曲线

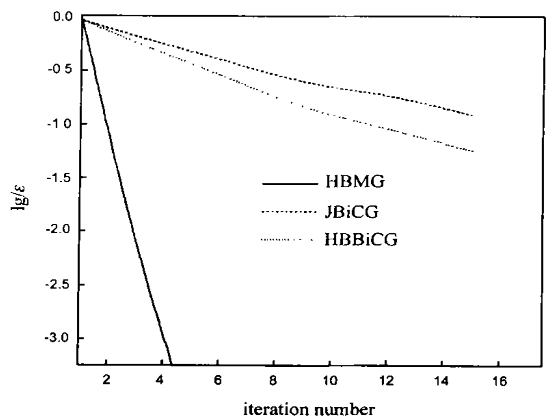


图 5　最细网格脾收敛特性曲线

明显地可以看出,本文的等级基多重网格法收敛速度比另外的两种普通迭代法要快得多.

表1给出的是本文的HBMG法在不同网格上求得的反射系数的相对误差,由此可以看出由粗网格至细网格的快速收敛过程.

表1 本文方法在不同网格上的收敛结果

网格层数	结点数	|R|	相对误差(%)
1	42	0.14989	24.3
2	86	0.1588	19.8
3	168	0.17147	13.4
4	334	0.18889	4.6
5	628	0.19325	2.4
6	1180	0.19622	0.9

为了验证本文方法的通用性,我们还应用它对另一个二维波导不连续结构进行了分析,该结构如图2所示,差别只在于介质换成了金属导体.分析过程中的一些细节参数,一如前例.分析的结果表明本文方法在这一算例中同样表现了很好的性能,具体说来:就收敛性而言,为将初始的E降低一个数量级,JBiCG和HBBiCG分别需要12次和8次,而HBMG只需3次;就最终的结果而言,在6次自适应加密后,结果的准确度已经达到了0.24%.这就表明了本文方法的普遍有效性.

参考文献:

[1] 胡健伟,汤怀民.微分方程数值解法[M].北京:科学出版社,1999.

[2] W哈克布恩.多重网格法[M].北京:科学出版社,1988.

[3] 欧阳洁.求解跨音速势流的自适应并行多重网格法[J].计算机工程与科学,1995,4:18-23.

[4] 王建华,等.自适应多重网格有限元网格生成器研制[J].结构力学及其应用,1995,12:86-92.

[5] M Saraniti,G Zandler,et al. An efficient multigrid poisson solver for device simulations[J]. IEEE,Trans on CAD,1996,15:141-149

[6] 王朝甫.电磁问题中的多重网格方法[D].成都:电子科技大学,1995.

[7] 郑戟.高速集成电路互连和封装结构的电磁特性研究[D].上海交通大学,1997.

[8] 穆墨.椭圆边值问题数值解的多重网格技术及软件实现[D].北京:中科院计算中心,1986.

[9] S Zhang,H C Huang. Multigrid multi2level domain decomposition[J]. Chinese J Comput Math,1991,9(1):17-27.

[10] 应隆安.无限元多重网格算法[J].计算数学,1992,14(1):118-126.

[11] N A Baker,et al. The adaptive multilevel finite element solution of the Poisson2Boltzmann equation on massively parallel computers[J]. IBM J RES & DEV MAY/JULY 2001,45(3/4):427-438.

[12] Gaofeng Wang,et al. A fast wavelet multigrid algorithm for solution of electromagnetic integral equation[J]. Microwave and Optical Technolo2gy Letters,January 20,2000,24(2):86-91.

[13] 林群,朱起定.有限元的预处理和后处理技术[M].上海:上海科学技术出版社,1994.

[14] L S Anderson,et al. Hierarchical tangential vector finite elements for tetrahedron[J]. IEEE MGWL,Mar,1998,38(3):127-129.

[15] 吕涛,等.区域分解算法2偏微分方程数值解新技术[M].北京:科学出版社,1992.

[16] L E Gama,T K Sarkar. Wavelets:A promising approach for electromag2netic fields problems[J]. IEEE MTT2S,1993.40-42.

[17] Jianming Jin. The Finite Element Method in Electromagnetics[M]. New York: Wiley,1993.

作者简介:

程军峰 男,1976年生于山东烟台,1997年获中国科学技术大学电子工程与信息科学系学士学位,同年转为硕博连读生,专业为电磁场与微波技术,研究方向为高效有限元方法及其应用.2002年获博士学位,现在中国联通工作.

徐善驾 男,1939年生于浙江镇海,教授,博士生导师,IEEE高级会员,长期从事微波、毫米波和光波理论与技术方面的教学与科研工作,曾获中科院自然科学一等奖、光华科技基金一等奖、中科院重大科研成果二、三等奖,安徽省科技二等奖,在国内外发表论文380余篇.