

# 基于小波分解的某些非平稳时间序列预测方法

徐科<sup>1</sup>, 徐金梧<sup>1</sup>, 班晓娟<sup>2</sup>

(1. 北京科技大学机械工程学院, 北京 100083; 2. 北京科技大学计算机系, 北京 100083)

**摘要:** 提出一种时间序列预测方法, 称为小波预测方法. 通过小波分解可以将某些非平稳时间序列分解成多层近似意义上的平稳时间序列, 然后采用自回归模型对分解后的时间序列进行预测, 从而得到原始时间序列的预测值. 对年平均太阳黑子数的预测结果表明, 该方法比传统的时间序列预测方法和神经网络预测方法的预测精度高, 可以很好地应用于某些非平稳时间序列的预测中.

**关键词:** 小波分析; 时间序列; 预测

**中图分类号:** TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 04-0566-03

## Forecasting of Some Non-Stationary Time Series Based on Wavelet Decomposition

XU Ke<sup>1</sup>, XU Jin-wu<sup>1</sup>, BAN Xiao-juan<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. Dept of Computer Science & Technology, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

**Abstract:** A forecasting method of time series called wavelet-domain predictor is proposed. Some non-stationary time series can be decomposed into several approximate stationary time series with wavelet decomposition. Decomposed time series are forecasted with auto-regression model, to obtain forecasting results of the original time series. Experiments with sunspot activity data show that the method is better than traditional forecasting approaches and neural network approaches, and can be applied to forecasting of some non-stationary time series effectively.

**Key words:** wavelet analysis; time series; forecasting

## 1 引言

时间序列预测在目标跟踪、天气预报、市场分析和故障诊断领域中有广泛的应用. 传统的预测方法大都采用线性模型来近似地表达预测对象的发展规律. 如最常用的 AR 模型预测或 ARMA 模型预测, 就是在时间序列平稳的假设基础上, 对其建立线性模型, 然后采用模型外推的方法预测其未来值. 因此, 这些方法只适用于平稳时间序列的预测. 然而, 实际应用中的时间序列往往是高度非平稳的时间序列, 传统的预测方法无法取得很好的预测效果.

由小波分析理论, 信号可以通过小波分解一层一层分解到不同的频率通道上. 由于分解后的信号在频率成分上比原始信号单一, 并且小波分解对信号作了平滑, 因此分解后信号的平稳性比原始信号好得多. 对于某些非平稳时间序列, 其小波分解后的时间序列可以考虑用平稳时间序列来处理, 这样就可以采用传统的预测方法对分解后的时间序列进行预测, 从而为某些非平稳时间序列的预测提供了一种新的方法.

## 2 信号的小波分解

小波分解可以通过 Mallat 算法实现, Mallat 算法表述

为<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} c_{j+1} = Hc_j \\ d_{j+1} = Gc_j \end{cases}, j = 0, 1, \dots, J \quad (1)$$

式中,  $H$  和  $G$  分别为一低通滤波器和一高通滤波器<sup>[2]</sup>, 小波分解的过程如图 1 所示. 将  $c_0$  定义为原始信号  $X$ , 于是通过式 (1) 可以将  $X$  分解为  $d_1, d_2, \dots, d_J$  和  $c_J$  ( $J$  为最大分解层数),  $c_j$  和  $d_j$  分别称为原始信号在分辨率  $2^{-j}$  下的逼近信号和细节信号. 各层细节信号和逼近信号是原始信号  $X$  在相邻的不同频率段上的成分.

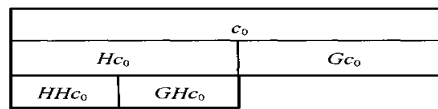


图1 小波分解示意图

采用 Mallat 算法进行小波分解, 每一次分解后得到的细节信号和逼近信号比分解前的信号点数减少一倍, 点数的减少对预测是不利的. 但是, 经 Mallat 算法分解后的信号可以采用重构算法进行重构, 重构算法描述如下:

$$C_j = H^* C_{j+1} + G^* D_{j+1}, j = J-1, J-2, \dots, 0 \quad (2)$$

其中  $H^*$  和  $G^*$  分别是  $H$  和  $G$  的对偶算子. 采用重构算法式 (2) 对小波分解后的信号进行重构可以增加信号的点数. 对  $d_1, d_2, \dots, d_j$  和  $c_j$  分别进行重构, 得到  $D_1, D_2, \dots, D_j$  和  $C_j$ , 它们和原始信号  $X$  的点数一样, 并且有<sup>[3]</sup>:

$$X = D_1 + D_2 + \dots + D_j + C_j \quad (3)$$

### 3 AR 模型预测方法<sup>[4]</sup>

时间序列  $\{x_t | t = 1, 2, \dots, N\}$  的  $AR(n)$  模型表示为:

$$x_t = 1x_{t-1} + 2x_{t-2} + \dots + nx_{t-n} + a_t \quad (4)$$

式中,  $a_t$  满足均值为零, 方差为  $\sigma_a^2$  的独立正态分布,  $1, 2, \dots, n$  称为模型参数, 也称自回归参数,  $n$  称为模型的阶数.

对给定的  $\{x_t\}$  建立  $AR(n)$  模型后, 必须进行适用性检验, 其中最根本的是检验  $a_t$  是否为白噪声. 可对  $\{a_t\}$  作如下两方面的检查:

- (1) 检验  $a_t$  是否与  $a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$  无关;
- (2) 检验  $a_t$  是否与  $x_{t-2}, x_{t-3}, \dots$  无关.

对  $AR(n)$  模型进行参数估计和适用性检验后, 就可以用所建立的  $AR(n)$  模型对时间序列  $\{x_t\}$  进行预测.

定义  $\hat{x}_t(l)$  为在  $t$  时刻对未来  $l$  步的预测值,  $e_t(l)$  为预测误差, 即:

$$e_t(l) = x_{t+l} - \hat{x}_t(l) \quad (5)$$

并称预测误差  $e_t(l)$  的方差为最小时的  $\hat{x}_t(l)$  值为最佳预测. 对于式 (4) 所定义的  $AR(n)$  模型, 其最佳预测值的计算式为:

$$\hat{x}_t(l) = \begin{cases} i x_{t+1-i}, & l = 1 \\ \hat{x}_t(l-i) + \sum_{i=1}^n \hat{x}_{t+l-i}, & 1 < l \leq n \\ \hat{x}_t(l-i), & l > n \end{cases} \quad (6)$$

### 4 小波预测方法

令  $X: \{x_1, x_2, \dots\}$  是一非平稳时间序列, 对其进行小波分解, 并且对分解后各层时间序列分别进行重构, 可以得到:

$$X = G_1 + G_2 + \dots + G_N + X_N \quad (7)$$

式中,  $G_1: \{g_{1,1}, g_{1,2}, g_{1,3}, \dots\}$ ,  $G_2: \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}, \dots\}$ ,  $\dots$ ,  $G_N: \{g_{N,1}, g_{N,2}, g_{N,3}, \dots\}$  分别为第一层、第二层、 $\dots$ 、第  $N$  层细节信号的重构结果,  $X_N: \{x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, \dots\}$  为第  $N$  层逼近信号的重构结果. 因此:

$$x_i = g_{1,i} + g_{2,i} + \dots + g_{N,i} + x_{N,i} \quad (8)$$

现已知  $\{x_i | i \leq M\}$  时刻的  $x_i$  值, 要预测  $k$  步以后的状态值, 即求  $x_{M+k}$ . 由式 (3) 得:

$$x_{M+k} = g_{1,M+k} + g_{2,M+k} + \dots + g_{N,M+k} + x_{N,M+k} \quad (9)$$

对  $g_{1,M+k}, g_{2,M+k}, \dots, g_{N,M+k}$  和  $x_{N,M+k}$  进行预测的方法和步骤如下:

- (1) 对  $G_j (1 \leq j \leq N)$  建立式 (4) 所表示的  $AR(n)$  模型, 并且用已知的  $g_{j,i} (i \leq M)$  对模型进行参数估计;
- (2) 对步骤 (1) 中建立的  $AR(n)$  模型进行适用性检验;
- (3) 根据式 (6), 用检验后适合的  $AR(n)$  模型对  $g_{j,M+k}$  进行预测, 得到  $g_{j,M+k}$  的预测值  $\hat{g}_{j,M+k}$ .

设  $g_{1,M+k}, g_{2,M+k}, \dots, g_{N,M+k}$  和  $x_{N,M+k}$  的预测值为  $\hat{g}_{1,M+k}, \hat{g}_{2,M+k}, \dots, \hat{g}_{N,M+k}$  和  $\hat{x}_{N,M+k}$ , 由式 (3) 可得原始时间序列  $X$  的预测值为:

$$\hat{x}_{M+k} = \hat{g}_{1,M+k} + \hat{g}_{2,M+k} + \dots + \hat{g}_{N,M+k} + \hat{x}_{N,M+k} \quad (10)$$

### 5 实验与讨论

年平均太阳黑子活动数据被公认为最具有代表性的非线性、非高斯分布、非平稳的时间序列<sup>[5]</sup>, 是用于比较和评判统计学模型和预测方法的典型数据. 图 2 是 1700 年至 1799 年的年平均太阳黑子数, 分别采用小波预测方法、BP 网络预测方法<sup>[6]</sup>和 AR 模型预测方法对其进行单步预测. 选用预测误差的均方根值作为评价指标, 预测结果由表 1 给出.

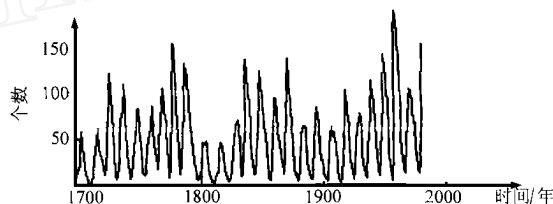


图 2 年平均太阳黑子数 (1700 ~ 1799)

表 1 年平均太阳黑子数预测结果

预测方法	小波预测方法	BP 网络预测方法	AR(6) 模型预测方法
预测误差均方根值	6.0971	11.0870	18.9555

表 1 中的 BP 网络预测方法是采用输入层神经元数为 4 个, 隐含层神经元数为 10 个, 输出层神经元数为 1 个 (即单步预测) 的 BP 网络进行预测, 网络的输出层神经代表预测值, 学习次数为 1000 次.

在小波预测方法中, 还存在着分解层数如何确定的问题. 小波分解的特性是越往下分解, 信号的频率段划分得越细, 细节信号和逼近信号的平滑性和平稳性也越好. 但是由于在分解过程中必然会存在计算上的误差, 分解层数越多, 误差越大, 计算上的误差会带到预测的误差中, 使预测精度下降. 因此在选择分解层数时, 不宜过少, 也不宜过多. 表 2 给出了采用小波预测方法, 在分解层数为 1 ~ 9 时, 对前面所给出的年平均太阳黑子数的预测结果.

表 2 分解层数不同时的预测结果比较

小波分解层数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
预测误差均方根值	9.44	6.78	6.09	6.10	6.10	6.10	6.10	6.20	17.23

由表 2 可以看出, 当分解层数为 3 ~ 5 时, 预测的误差基本达到了最小, 因此在选择分解层数时, 如果待预测的时间序列数据量不是很大, 则分解层数一般可以选择 3 ~ 5.

### 6 结论

本文研究了信号在小波分解下的性质, 在此基础上, 提出了一种非平稳时间序列的预测方法, 即小波预测方法. 通过对年平均太阳黑子数的预测结果表明, 该方法优于传统的预测方法和 BP 网络预测方法, 具有很好的预测效果. 本文还对小波预测方法中采用的小波分解层数进行了讨论.

需要指出的是, 本文的预测方法应用于分析太阳黑子活

动规律,得到了满意的结果.非平稳时间序列的模式很多,如何将本文的方法普遍应用于非平稳时间序列的预测,尚待理论上和算法上的进一步研究.

#### 参考文献:

- [1] Stephane G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation [J]. IEEE Tran. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11 (7): 674 - 693.
- [2] Ingrid Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets [J]. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1988, 41 (11): 909 - 996.
- [3] 徐科. 小波分析在设备故障诊断中的应用研究 [D]. 北京: 北京科技大学, 1998.
- [4] 杨叔子, 吴雅. 时间序列分析的工程应用 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1991.
- [5] 王大东. 基于计算智能的设备故障诊断方法研究与实现 [D]. 北京: 北京科技大学, 1997.
- [6] 罗发龙, 李衍达. 神经网络信号处理 [M]. 北京: 电子工业出版社, 1993.

#### 作者简介:



徐科 1998年毕业于北京科技大学机械工程学院,获工学博士学位.主要从事小波分析与应用、图像处理、故障诊断等领域的研究工作,已发表论文十余篇.



徐金梧 1988年毕业于德国亚琛工业大学,获工学博士学位.现为北京科技大学教授,博士生导师.主要研究方向为故障诊断和智能控制,获省部级科技进步奖3项,发表论文70余篇,专著3本.

## 关于“衰落信道下基于线性预测的迭代解调及译码技术: Turbo DPSK”一文的注记

#### [编者按]

2000年11月本刊(Vol. 28, No. 11A)《第三代移动通信与网络技术专辑》出版后,编辑部即收到读者来信,反映《专辑》中个别作者在参考文献的引用上有不实之处.随后,编辑部对此进行了查核,与作者一起对“衰落信道下基于线性预测的迭代解调及译码技术: Turbo DPSK”一文的引用文献进行了核对,作者承认在文献引用上有疏漏和不严肃之处,特对文献[3]作者深表歉意并向提出批评的读者表示感谢.

我们把读者的来信和作者的答复同时刊出,并再次重申,凡向《电子学报》投送的文稿必须如实反映自己的工作,全面引用文献,尊重原作者的权益,否则后果自负.

读者来信:文献[1]提出了一种基于线性预测的衰落信道 Turbo DPSK 技术,特点是不需要知道衰落信道增益的自相关函数.该文的结构与文献[2]相似,所不同的是采用了不同的衰落信道线性预测方法.文献[2]是直接求解 Wiener-Hopf 方程,而上文采用了判决反馈来线性地预测衰落过程.事实上,文献[3]早在一年多之前就提出了这种不需要知道衰落过程自相关函数的线性预测技术,不仅用于 DPSK 解调中,更详细分析了 CPM 解调以及多采样点接收.

这种技术的关键是:假设在观测时间间隔内,多普勒频移固定,信道增益的幅度保持不变,相位变化很小,从而衰落增益变化可由  $e^{-jk} - 1 - jk$  来近似.可参见文献[3]的 Appendix I. 两文除了这些相同点之外,上文的式(6)类似于文献[3]的式(5),式(8)类似于文献[3]的式(19),式(9)类似于文献[3]的式(20).

考虑到文献[3]比上文早发表一年半,并且整个审稿过程

是在文献[3]发表之后进行的,那么文献[3]至少应该在上文中得到引用.尽管两篇论文讨论的问题不同,但是上文应当澄清这种线性预测技术是由文献[3]最先提出的.

作者回复:首先,我非常感谢读者对文章真诚、恳切的批评指正.文献[1]最初的出发点是针对文献[2]中提出的 Turbo DPSK 技术的特点(它基于求解 Wiener-Hopf 方程),提出一种基于别的信道估计技术的 Turbo DPSK.它在性能上应该与文献[2]中的 Turbo DPSK 有相近的性能,但在运算复杂度或实现复杂度方面比文献[2]有优点,以期对 Turbo DPSK 技术进行一些改进或更进一步的研究.在对各种衰落信道估计技术进行了仿真的基础上,发现采用基于信道线性预测的 Turbo DPSK 有较好的性能且在实现复杂度上有优势.故提出这种基于线性预测的 Turbo DPSK 技术<sup>[1]</sup>.

在整个仿真及文章成稿过程中,确实参考了文[3]中的关于线性预测的部分结论.文献[3]在作者的文章中应该得到引用.对此,作者对读者提出的意见表示虚心接受,并致以深深的感谢.并对作者的疏漏而向 Li Bin, Paul Ho 表示最诚恳的歉意. (伍 一 2001.2.23)

#### 参考文献:

- [1] 伍一,周世东,姚彦.衰落信道下基于线性预测的迭代解调及译码技术 Turbo DPSK [J]. 电子学报, 2000, 28 (11A).
- [2] P. Hoeher and J. Lodge. Turbo DPSK: Iterative differential PSK demodulation and channel decoding [J]. IEEE Trans. Commun., June 1999, 47 (6): 837 - 843.
- [3] Li Bin and Paul Ho. Data-aided linear prediction receiver for coherent DPSK and CPM transmitted over Rayleigh flat-fading channels [J]. IEEE Trans. Veh. Tech., July 1999, 48 (4): 1229 - 1236.