一种新的分数阶傅立叶变换快速算法

平先军,陶 然,周思永,王 越
(北京理工大学电子工程系,北京 100081)

摘 要: 本文给出了分数阶傅立叶变换(FRFT)的定义,介绍了已有的几种离散 FRFT 快速算法,并简要分析了这几种算法的优缺点.在此基础上提出了一种新的 FRFT 快速算法.该算法避开特征值与特征向量的匹配问题,具有易理解、易实现、效果好等优点.并且在改变分数阶幂时不需重新计算整个过程,只需计算一个对角矩阵.为与其他方法作比较,作者最后对几个典型信号作了计算机仿真,并给出其仿真结果.

关键词: 分数阶傅立叶变换; Hermite 函数; 时频分析
中图分类号: TN911.76 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2001) 03-0406-03

A Novel Fast Algorithm for Fractional Fourier Transform

PING Xian-jun, TAO Ran, ZHOU Si-yong, WANG Yue
(*Dept. Of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

Abstract: The definition of the Fractional Fourier Transform (FRFT) has been presented in the paper. Several fast algorithms of discrete FRFT have been reviewed. The performances of these algorithms have been analyzed briefly. Based on this analysis, a new algorithm for efficient and accurate computation of FRFT is given. This algorithm needs not to consider the match between eigenvalues and eigenvectors. There are some advantages such as easily understanding and implementing with excellent effect. And if the rotational angle is changed, only a diagonal matrix should be recomputed. A few simulation results for some typical signals are provided to compare with previous ones by other methods in the end.

Key words: fractional fourier transform; hermite function; time-frequency analysis

1 分数阶傅立叶变换的定义

FRFT,也称为角度傅立叶变换(AFT)或者旋转傅立叶变换(RFT),其定义式为:

$$X_p(u)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)B_\alpha(t,u)\,dt=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1-j\cot(\alpha)}{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\exp\left(j\frac{t^2+u^2}{2}\cot(\alpha)-jtu\csc(\alpha)\right)dt, & \alpha\neq n\pi\\ x(t), & \alpha=2n\pi\\ x(-t), & \alpha=(2n\pm1)\pi\end{cases}\tag{1}$$

其中 p 为 FRFT 的阶,可以为任意实数,$\alpha=p\pi/2$,n 为整数.FRFT 的变换核为:

$$B_\alpha(t,u)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1-j\cot(\alpha)}{2\pi}}\exp\left(j\frac{t^2+u^2}{2}\cot(\alpha)-jtu\csc(\alpha)\right), & \alpha\neq n\pi\\ \delta(t-u), & \alpha=2n\pi\\ \delta(t+u), & \alpha=(2n\pm1)\pi\end{cases}\tag{2}$$

注意变换核对阶次(角度)α 是完全连续的.FRFT 是一种线性算子,记为 F^p.F^p 满足以下性质:①零度旋转对应信号自身:$F^0=I$,②$\pi/2$ 旋转对应于普通 FT:$F^1=F$,③是加性算子:$F^{P_1}F^{P_2}=F^{P_1+P_2}=F^{P_2}F^{P_1}$,④周期性 $F^p=F^{P+2k\pi}$,k 为整数.FRFT 的详细性质,请参考文献[1].

2 分数阶傅立叶变换的几种快速算法

FRFT 的快速算法是近几年才开发出来的,FRFT 的出现引起了各个领域研究人员的重视,在工程上也有广阔的应用前景.目前研究 FRFT 的快速算法主要有三种途径:

(1) 利用 $F^{2\alpha/\pi}=\sum_{i=0}^{3}a_i(\alpha)F^i$,来计算离散 FRFT 的核矩阵,从而利用 FFT 来计算离散 FRFT[2].其中 F 是离散傅立叶变换核矩阵.

(2) 采用分解方法[3].该算法将 FRFT 分解为信号的卷积形式,从而利用 FFT 来计算 FRFT.

(3) 利用矩阵的特征值和特征向量来计算离散 FRFT[4,5],详见第 3 节.

这里仅对几种快速算法作简单的分析.

第一种方法中采用旋转 DFT 矩阵任意角度的方法导致了特征值与特征向量的不匹配,而且其离散 FRFT 矩阵不满足连续 FRFT 的旋转性,因此不能用相同的方法计算逆 FRFT[3].实际计算所产生的误差也较大,与连续 FRFT 没有相似的输出结果[5].

第二种方法的思想比较直观,计算出的结果与连续 FRFT

收稿日期:2000-02-03;修回日期:2000-07-22
基金项目:国家自然科学基金(No. 69972003)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的输出比较接近.但它要经过一次 2 倍内插和 2 倍抽取,而且还要进行坐标的无量纲化[3],实现起来较为烦琐.其计算复杂度为 $O(N\lg(N))$.

第三种方法采用特征值和特征向量的方法来计算 FRFT.它保持了连续 FRFT 的特征值-特征函数的关系,克服了第一种方法中特征值与特征向量不匹配的缺点.采用了两种正交影射的方法来计算 DFT Hermite 特征向量,由此开发出两种快速算法,即:OPA 方法和 GSA 方法.这两种算法都有和连续 FRFT 相近的输出结果.其计算复杂度均为 $O(N^2)$.

3　新的快速算法研究和性能分析

在第三种快速算法中,Soo-Chang Pei 等人采用下式作为 DFRFT 的核矩阵.

$$F^{2\alpha/\pi}=UD^{2\alpha/\pi}U^T=\begin{cases}\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-jk\alpha)\,u_k u_k^T, & \text{当 } N \text{ 为奇数}\\ \left(\sum_{k=0}^{N-2}\exp(-jk\alpha)\,u_k u_k^T\right)+\exp(-jN\alpha)\,u_N u_N^T, & \text{当 } N \text{ 为偶数}\end{cases}\tag{3}$$

其中,当 N 为奇数时,矩阵 $U=[u_0|\,u_1|\,\cdots|\,u_{N-1}]$;当 N 为偶数时,矩阵 $U=[u_0|\,u_1|\,\cdots|\,u_{N-2}|\,u_N]$.其中 u_k, $k=0,1,2,\cdots,N$ 是相应的 k-阶 Hermite 函数的归一化特征向量(在文献[4]中则用 u_k, $k=0,1,2,\cdots,N$ 为 k-阶 DFT Hermite 特征向量来近似,在文献[5]中将这种计算 FRFT 的方法称为 S 方法).矩阵 $D^{2\alpha/\pi}$ 是一个对角矩阵,其中对角元 $D_{k,k}^{2\alpha/\pi}=\exp(-jk\alpha)$, $k=0,1,2,N-2$.当 N 为偶数时, $D_{N-1,N-1}^{2\alpha/\pi}=\exp(-jN\alpha)$;$N$ 为奇数时则 $\Delta_{N-1,N-1}^{2\alpha/\pi}=\exp(-j(N-1)\alpha)$.这种方法的关键在于使特征值和特征向量匹配,为此须做烦琐的矩阵正交归一化运算.

在本文中,为避开繁琐的特征值和特征向量匹配问题和矩阵的正交归一化运算,直接对 FRFT 进行离散化来计算 FRFT.为方便起见,重写 FRFT 的变换核为[5]:

$$B_\alpha(t,u)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1-j\cot(\alpha)}{2\pi}}\exp\left(j\dfrac{t^2+u^2}{2}\cot(\alpha)-jtu\csc(\alpha)\right), & \alpha\neq n\pi\\ \delta(t-u), & \alpha=2n\pi\\ \delta(t+u), & \alpha=(2n\pm1)\pi\end{cases}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jn\alpha}H_n(t)\,H_n(u)\tag{4}$$

其中 $H_n(t)$ 是 n 阶方差为 1 的归一化 Hermite 函数.方差为 δ 的 n 阶归一化 Hermite 函数定义为:$H_n(t)=\dfrac{1}{\sqrt{(2^n n!\sqrt{\pi}\sigma)}}h_n\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)\exp\left(-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}\right)$,其中 $h_n(t)$ 是为 n 阶 Hermite 多项式,即:$h_n(t)=(-1)^n\exp(t^2)\dfrac{d^n}{dt^n}(\exp(-t^2))$.根据式(4)重写 FRFT 的表达式:$X_\alpha(u)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,B_\alpha(t,u)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(u)(e^{jn\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,H_n(t)\,dt)$.对信号 $x(t)$ 进行 N 点的取样(为方便起见,假设 N 为奇数),取样间隔为 $T_s=\sqrt{2\pi/N}$, $U_s=\sqrt{2\pi/N}$,取样区间为 $[-\sqrt{N\pi/2},\sqrt{N\pi/2}]\times[-\sqrt{N\pi/2},\sqrt{N\pi/2}]$.从而:

$$\begin{aligned}X_\alpha(u)&=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(u)\,e^{jn\alpha}\int_{-\sqrt{N\pi/2}}^{\sqrt{N\pi/2}}x(t)\,H_n(t)\,dt\Big|_{T_s=\sqrt{2\pi/N}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(u)\,e^{jn\alpha}\sum_{k=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}x(kT_s)\,H_n(kT_s)\,T_s\\&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jn\alpha}H_n(u)\,T_s\overline{H}_n^TX_N\Big|_{\substack{U_s=\sqrt{2\pi/N}\\ u=[-\sqrt{N\pi/2},\sqrt{N\pi/2}]}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jn\alpha}H_n(u)\,T_s\overline{H}_n^TX_N\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\overline{H}_ne^{jn\alpha}T_s\overline{H}_n^TX_N+\sum_{n=N}^{\infty}\overline{H}_ne^{jn\alpha}T_s\overline{H}_n^TX_N\end{aligned}$$

(当 N 充分大时, $\sum_{n=N}^{\infty}\overline{H}_n\cdot e^{jn\alpha}\cdot T_s\overline{H}_n^TX_N\to0$)

$$\doteq T_s\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^{jn\alpha}\overline{H}_n\overline{H}_n^T\right)X_N=T_s\cdot H_ND^{2\alpha/\pi}H_N^T\cdot X_N\tag{5}$$

因此 $F^{2\alpha/\pi}=T_sH_ND^{2\alpha/\pi}H_N^T$,其中 $\overline{H}_n=[h_{n,-(\frac{N-1}{2})},h_{n,-(\frac{N-1}{2})+1},\cdots,h_{n,(\frac{N-1}{2})}]$, $n=0,1,2,\cdots,N-1$ 是 n 阶 Hermite 函数的 N 点取样列向量, H_N 是取样长度为 N 时的 Hermite 函数的离散化矩阵, $X_N=[x_{-(\frac{N-1}{2})},x_{-(\frac{N-1}{2})+1},\cdots,x_{(\frac{N-1}{2})}]$ 是 N 点信号列向量, $D^{2\alpha/\pi}=\mathrm{diag}(e^{-j0},e^{-j\alpha},e^{-j2\alpha},\cdots,e^{-j(N-1)\alpha})$.我们发现上面的结果与式(3)较为相似.但不同的是这里的 $\overline{H}_N$ 只是 Hermite 函数的连续取样向量,而不是其归一化的特征向量.因此避开了特征值和特征向量的不匹配问题.在上面的推导过程中,引入了一个舍入误差项,即当 N 充分大时, $\sum_{n=N}^{\infty}\overline{H}_n\cdot e^{jn\alpha}\cdot T_s\overline{H}_n^TX_N$ 趋于零.由于 Hermite 函数 $H_n(t)$ 的衰减与 $t^ne^{-t^2}/\sqrt{(2^n n!\sqrt{\pi}\sigma)}$ 成比例,衰减速度很快.因此当 N 充分大时,这种舍入误差不会影响计算精度.

问题是如何获得 Hermite 函数的取样向量.分析 n 阶 Hermite 多项式 $h_n(t)=(-1)^n\exp(t^2)\dfrac{d^n}{dt^n}(\exp(-t^2))$,令 $f_n=\dfrac{d^n}{dt^n}(\exp(-t^2))$,则有 $f_n=1\cdot\exp(-t^2)$, $f_1=-2t\cdot\exp(-t^2)$, $f_2=(4t^2-2)\cdot\exp(-t^2)\cdots$,我们发现:$f_n=a_n(t)\cdot\exp(-t^2)$, $n=0,1,2,\cdots$,其中 $a_n(t)$, $n=0,1,2,\cdots$是多项式.对 f_{n+1} 求导可得:

$$f_{n+1}=\frac{df_n}{dt}=\left(\frac{da_n(t)}{dt}-2ta_n(t)\right)\cdot\exp(-t^2)=a_{n+1}(t)\cdot\exp(-t^2),\ n=0,1,2,\cdots$$

于是 $a_{n+1}(t)=\dfrac{da_n(t)}{dt}-2ta_n(t)$, $n=0,1,2,\cdots$利用该递推式和 Matlab(或者 Mathematica)等工具的符号计算功能,可以预先计算出取样长度为 N 时的 Hermite 函数的离散矩阵 H_N,从而在信号实时处理时只需计算已知矩阵 H_N、$D^{2\alpha/\pi}$ 的乘积 $F^{2\alpha/\pi}=T_sH_ND^{2\alpha/\pi}H_N^T$,当调整分数阶 α 时,只需重新计算 D 矩阵,而不必要重新计算整个过程,较好地提高了它在实时计算中的效率.该算法的计算复杂度为 $O(N^2)$.

该算法采用直接将连续 FRFT 离散化的方法来获得离散 FRFT 的核矩阵,思想直接而简洁.具有易理解、易实现(对比 S 方法、GSA 方法和 OPA 方法)等优点,而且与连续 FRFT 有

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

非常相近的输出结果.

4 几个典型信号的计算机仿真

利用该快速算法实际分析了两个信号. 为便于比较,作者选择了一个矩形信号和一个 chirp 信号. (注:图 1、图 2 中实线表示 FRFT 的实部,虚线表示 FRFT 的虚部).

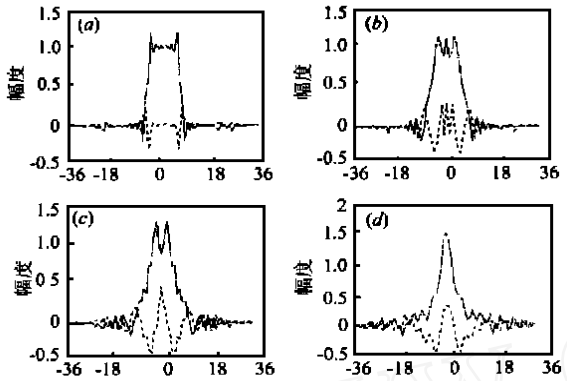


图 1 矩形信号在不同分数阶域下的变换图. (a) 阶次为 0.05 时的分数阶域幅度图; (b) 阶次为 0.2 时的分数阶域幅度图; (c) 阶次为 0.4 时的分数阶域幅度图; (d) 阶次为 $\pi/4$ 时的分数阶域幅度图(横坐标表示信号取样点个数)

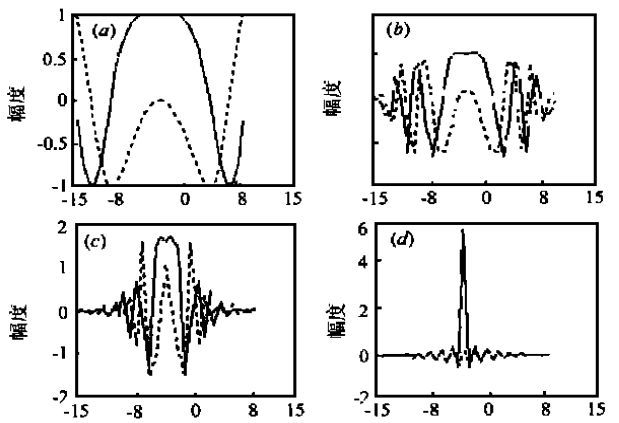


图 2 Chirp 信号在不同分数阶域下的变换图. (a) 原始信号幅度图; (b) 阶次为 $\pi/6$ 时的分数阶域幅度图; (c) 阶次为 $\pi/3$ 时的分数阶域幅度图; (d) 阶次为 1.3734 时的分数阶域幅度图. (横坐标表示信号取样点个数)

仿真实例 1:信号取样列向量为 $X_N^T = [x_{-36}, x_{-35}, \cdots, x_{36}]$,取样长度为 $N = 73$,其中 $x_k = 1$, $k = -6, -5, \cdots, 6$,其余均为零. 仿真结果见图 1.

仿真实例 2:信号取样列向量为 $X_N^T = [x_{-15}, x_{-14}, \cdots, x_{15}]$,取样长度为 31,其中 $x_k = \exp(-j \times 0.01989k^2)$, $k = -15, -14, \cdots, 15$. 仿真结果见图 2.

仿真实例 3:信号取样列向量为 $X_N^T = [x_{-32}, x_{-31}, \cdots, x_{32}]$,取样长度为 65,其中 $x_k = \exp(-j \times 0.0091k^2)$, $k = -32, -31, \cdots, 32$. 背景是方差为 1 的高斯白噪声,信噪比 $SNR = 3$dB. 变换阶次为 $a = 3\pi/7$. 因为 chirp 信号在一定的分数阶傅立叶变换下为一个冲击函数. 仿真结果见图 3. 由图 3 可以明显看出:该算法在 $SNR = 3$dB 时具有良好的检测 chirp 信号的能力.

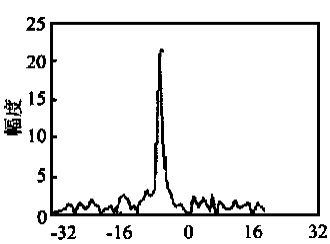


图 3 Chirp 信号检测(横坐标表示信号取样点个数)

5 结论

分数阶傅立叶变换是近二十年来发展起来的一种全新的信号时频分析工具,在很多方面得到了十分广泛的应用. 而其快速算法的研究则对扩展其应用领域有着十分重要的意义. 本文提出了一种有效并能准确计算 FRFT 的新算法. 该算法具有易实现、易理解、精度较高等优点. 而且在改变分数阶幂时不需要重新计算整个过程,较好地提高了实时计算中的效率. 我们相信 FRFT 将会受到更广泛的重视,在信号处理领域会有良好的应用前景.

参考文献:

[1] Lufs B. Almeida. The fractonal fourier transform and time-frequency representations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42 (11): 3084 - 3091.

[2] B. Santhanam and J. H. McClellan. The discrete rotational Fourier transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 42(4): 994 - 998.

[3] Haldum M. Ozaktas, Orhan Arikan, M. Alper Kutay and Cozde Bozdagi. Digital Computation of the Fractional Fourier Transform [J]. IEEE Transactons on Signal Processing, 1996, 44(9): 2141 - 2150.

[4] Soo-Chang Pei, Min-Hung Yeh. Two dimensional discrete fractional Fourier transform [J]. IEEE, Signal Processing, 1998, 67, 99 - 108.

[5] Soo-Chang Pei, Min-Hung Yeh and Chien-Cheng Tseng. Discrete fractional fourier transform based on orthogonal projections [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(5): 1335 - 1347.

作者简介:



平先军 1976 年出生. 1998 年获得北京理工大学应用数学系理学学士学位. 现为北京理工大学电子工程系硕士研究生. 主要研究方向为时频分析与分数阶傅立叶变换的理论与算法研究.



陶 然 生于 1964 年 11 月,北京理工大学电子工程系教授、博士,中国电子会学青年工作委员会副主任、中国兵工学会《兵工学报》常务编委、中国科学院青年创新联合会执行理事,IEEE 会员. 已在国内外学术刊物及会议上发表论文六十余篇,出版著作一部. 感兴趣的研究领域:数字信号处理理论及其在雷达、通信、精密电磁测量中的应用,系统理论及其应用.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net