

非自治约瑟夫森结阵列的耦合同步研究

张立森, 蔡 理, 冯朝文

(空军工程大学理学院, 陕西西安 710051)

摘 要: 针对电阻-电容-电感分路的约瑟夫森结耦合的阵列, 当驱动电流的相位差为零时, 分析了对称振子之间完全同步流形及其稳定性. 当相位差不为零时, 计算了误差系统随相位差变化的分岔图和李雅普诺夫指数曲线, 发现相位差破坏了振子对之间的完全同步, 但却可以抑制系统中的混沌. 理论上讨论了约瑟夫森结阵列中延迟同步的存在性, 发现距离较远的振子对之间的延迟同步化程度较高, 而振子数较少的阵列中无法建立延迟同步, 同时还得到了同步建立时的延迟时间与驱动电流相位差之间满足的关系式.

关键词: 约瑟夫森结阵列; 电阻-电容-电感分路模型; 同步; 相位差; 李雅普诺夫指数

中图分类号: O415.5, O511+.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 05-1020-05

Analysis of Coupling Synchronization in Non-Autonomous Josephson Junction Array

ZHANG Li-sen, CAI Li, FENG Chao-wen

(School of Science, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

Abstract: The complete synchronization manifold and its stability between the symmetric oscillators of an array of coupled RCL-shunted Josephson junctions are analyzed when there is no phase difference between the applied fields. In the presence of phase difference, bifurcation diagrams and maximum Lyapunov exponent curves of error system with phase difference as the control parameter are obtained by numerical calculation. The results show that the phase difference can desynchronize the synchronized oscillators and tame chaos in the system. The existence of lag synchronization in the array is discussed theoretically. We find that the symmetric oscillators with long distance have higher level of lag synchronization and the lag synchronization cannot be found in small array. Meanwhile, the analytic relation between phase difference and delay time for lag synchronization is derived.

Key words: Josephson junction array; RCL-shunted model; synchronization; phase difference; Lyapunov exponent

1 引言

超导约瑟夫森结(Josephson junction)具有噪声低、功耗小、频率高和速度快等特点, Josephson 结及相关电路在电压标准、超导量子干涉仪、可调谐振器和静噪电路等方面得到了很好的应用^[1~7]. 特别是将 Josephson 结经过耦合而构成的 Josephson 结阵列, 由于其在诸多领域如毫米和亚毫米波信号源、可调谐滤波器、量子比特器件以及数字电路系统等有很好的应用前景, 因此一直以来备受学者关注^[8~11]. 另一方面, 为了进一步考虑在高频率和高临界电流环境中 Josephson 结分路中的电感效应, Whan 等人将电阻-电容分路结模型作了改进, 提出了一种电阻-电容-电感分路结(resistive-capacitive-inductive-shunted junction, RCLSJ)模型^[12,13], 发现当采用 RCLSJ 模型后, 数值计算与实验测量得到的 Josephson 结的 $I-V$ 特性曲线吻合得较好^[14]. 随后, Whan 和 Cawthorne 等

人进一步研究发现即使在直流偏置下, RCL 分路的 Josephson 结中也存在着分岔、混沌等丰富的非线性动力学行为^[13~15]. 近年来, 关于 RCL 分路 Josephson 结中混沌的控制与同步研究也有报道^[16~18]. 然而, 目前对基于 RCLSJ 模型的 Josephson 结阵列中的耦合同步行为, 特别是系统中延迟同步的理论分析, 尚未见到相关报道.

本文以一类由 RCLSJ 构成的非自治 Josephson 结阵列为研究对象, 首先通过计算系统的横向 Lyapunov 指数, 分析了当外部交流驱动电流之间的相位差为零时系统中的完全同步化行为; 然后, 考虑驱动电流相位差不为零的情况下, 通过计算误差系统的分岔图及 Lyapunov 指数, 分析了系统中的周期相同步行为; 最后, 在理论上分析了驱动电流相位差不为零时, 系统中延迟同步流形的存在性以及建立同步的延迟时间与相位差之间的对应关系, 数值结果很好地验证了理论分析结论.

2 非自治约瑟夫森结阵列模型及方程

考虑如图 1(a)所示交流驱动下 N 个 Josephson 结通过电阻耦合阵列,这里 Josephson 结均采用 RCLSJ 模型,其等效电路如图 1(b)所示.

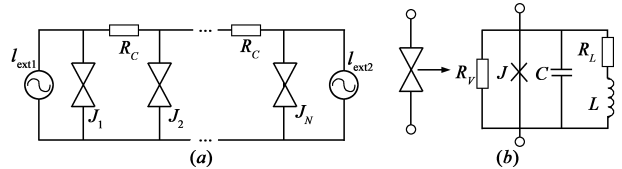


图1 (a) Josephson结阵列;(b) RCLSJ模型等效电路

图中 $I_{ext1} = I_{ac} \cos(\Omega_0 t_0)$ 、 $I_{ext2} = I_{ac} \cos(\Omega_0 t_0 + \theta)$ 为外部偏置电流. 设 α 、 V 分别为 Josephson 结的结电压和位相差, I_c 为 Josephson 结的临界电流, R_V 为隧道结的本征电阻. 并作如下归一化处理: $t = \omega_c t_0$, $\omega_c = 2eI_c R_L / \hbar$; $v = V / (I_c R_L)$, $i_{ac} = I_{ac} / I_c$, $i_L = I_L / I_c$; $\omega_0 = \Omega_0 / \omega_c$. 则描述图 1(a)所示 Josephson 结阵列模型的方程的向量形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{f}(\mathbf{x}_j) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_{j-1} - 2\mathbf{x}_j + \mathbf{x}_{j+1}) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{f}(\mathbf{x}_N) + \mathbf{u}_2(t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}_{N-1} - \mathbf{x}_N) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}_j = (v_j, i_{L,j}, \alpha_j)^T$, $j = 1, 2, \cdots, N$; $\mathbf{u}_1 = (i_{ac} \cos(\omega_0 t), 0, 0)^T / \beta_C$, $\mathbf{u}_2 = (i_{ac} \cos(\omega_0 t + \theta), 0, 0)^T / \beta_C$, θ 为两个驱动电流源之间的相位差; $\mathbf{D} = \text{diag}(d, 0, 0)$ 且 $d = R_L / (\beta_C R_C)$. 非线性函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的形式为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (-gv - i_L - \sin \alpha) / \beta_C \\ (v - i_L) / \beta_L \\ v \end{cases} \quad (2)$$

无量纲参数: $\beta_C = 2eI_c R_L^2 C / \hbar$, $\beta_L = 2eI_c L / \hbar$, $g = R_L / R_V$.

3 约瑟夫森结阵列中的完全同步行为分析

为了方便分析 Josephson 结阵列中完全同步化流形的存在及其稳定性,不失一般性,首先考虑 $N = 3$ 时的情形. 从式(3)可知,当 $\theta = 0$ 时耦合系统是对称的,即交换状态变量 \mathbf{x}_1 、 \mathbf{x}_3 其形式保持不变,因此必然存在完全同步化流形: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3$. 定义误差系统 $\mathbf{e}_{1,3}(t) = (e_{1,3}^1, e_{1,3}^2, e_{1,3}^3)^T = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_3(t)$, 并令 $e_{1,3}(t) = \|\mathbf{e}_{1,3}(t)\|$, 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{1,3}(t) = 0$, 则 \mathbf{x}_1 与 \mathbf{x}_3 达到完全同步. 根据图 3(a)和(c)可得误差系统 $\mathbf{e}_{1,3}(t)$ 在原点处的线性化方程为

$$\delta \dot{\mathbf{e}}_{1,3} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}) \delta \mathbf{e}_{1,3} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) / \partial \mathbf{x}_1$. 我们通过计算 Lyapunov 指数的方法来确定同步流形的稳定性,对应式(3)的 Lyapunov 指数称为横向 Lyapunov 指数,其定义为^[19]

$$\lambda_1^T = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta e_{1,3}(t)}{\delta e_{1,3}(0)} \right| \quad (4)$$

当最大横向 Lyapunov 指数 $\lambda_1^T < 0$ 时,同步流形稳定,建立同步化的临界条件由 $\lambda_1^T = 0$ 得到.

通过数值计算得到系统最大横向 Lyapunov 指数随耦合强度的变化曲线,结果如图 2 所示. 所有数值计算均采用四阶 Runge-Kutta 积分算法,步长 $h = 0.001$,取相互靠近但不相等的初值 $\mathbf{x}_1(0)$ 、 $\mathbf{x}_2(0)$ 和 $\mathbf{x}_3(0)$. Josephson 结的参数取自文献[9, 10]中的实验数据: $\beta_C = 0.707$, $\beta_L = 2.68$, $g = 0.0478$. 驱动电流参数为 $\omega_0 = 1$, $i_{ac} = 1.35$. 从图中得知临界耦合强度为 $d_c \approx 0.414$; 当 $d > 0.414$ 时, $\lambda_1^T < 0$, 同步流形稳定.

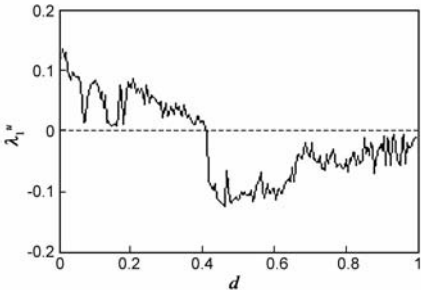


图2 系统的最大横向Lyapunov指数

图 3 给出了不同耦合强度下系统的同步情况. 耦合 $d = 0$ 时, \mathbf{x}_1 、 \mathbf{x}_3 在各自的混沌轨道上运行,其吸引子如图 3(a)所示. 当 $d > d_c$ 时, \mathbf{x}_1 、 \mathbf{x}_3 达到混沌同步,但对比图 3(a)和图 3(c)可以看出,此时混沌同步流形并不是 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_3 的本征混沌流形(无耦合时). 其原因是 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_3 即使达到同步,由式(3)知 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_3 的状态方程中耦合项仍然不等于零,它们始终受到 \mathbf{x}_2 的影响,因此其吸引子必然与无耦合时的混沌吸引子形状有所不同.

\mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_3 在 $d > d_c$ 时能完全同步,而 \mathbf{x}_1 与 \mathbf{x}_2 却不可能完全同步,原因是其误差系统方程

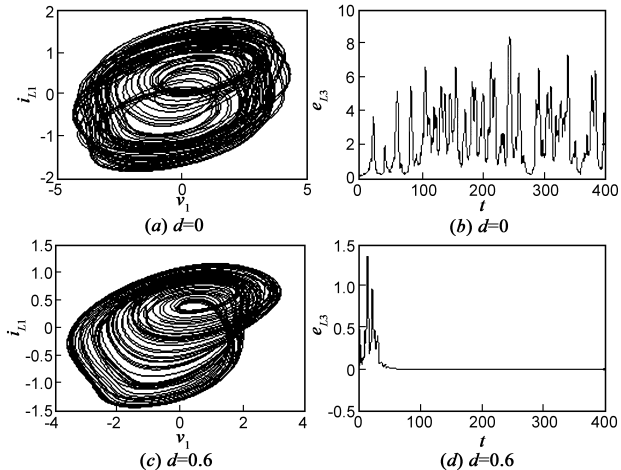


图3 不同耦合强度下系统的相图及同步误差曲线

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1,2}^1 &= \frac{1}{\beta_C} [-ge_{1,2}^1 - e_{1,2}^2 - 2\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sin \frac{e_{1,2}^3}{2} + i_{ac} \cos(\omega_0 t)] \\ &\quad - 3de_{1,2}^1 \\ \dot{e}_{1,2}^2 &= (e_{1,2}^1 - e_{1,2}^2)/\beta_L \\ \dot{e}_{1,2}^3 &= e_{1,2}^1 \end{aligned} \quad (5)$$

其中含有交流项,显然误差系统不存在平衡态(0, 0, 0),所以 \mathbf{x}_1 与 \mathbf{x}_2 无法完全同步。

一般地,由 N 个 Josephson 结构成的阵列,当 N 为偶数时,系统中存在 $N/2$ 个同步解; N 为奇数时,则存在 $(N-1)/2$ 个同步解。图 4 所示是分别取 $N=6$ 和 $N=7$ 时,阵列中结电压的时间序列。从图中可知, $N=6$ 和 $N=7$ 时系统均有 3 个不同的稳定同步解,而且处于不对称位置的振子之间不同步。

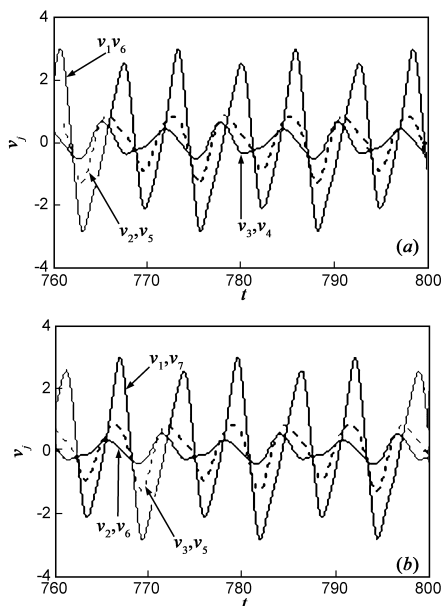


图4 阵列中结电压的时间序列 (a) $N=6$; (b) $N=7$

4 相位差 θ 对系统同步的影响

4.1 $\theta \neq 0$ 时系统的周期行为及相同步

从上面的分析可知,当驱动电流的相位差 $\theta = 0$ 时,系统中处于对称位置的 Josephson 结之间存在着完全同步波形。下面考虑 $\theta \neq 0$ 时的情形,首先仍然取 $N=3$,则误差系统

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1,3}^1 &= \frac{1}{\beta_C} [-ge_{1,3}^1 - e_{1,3}^2 - 2\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \sin \frac{e_{1,3}^3}{2} \\ &\quad + 2i_{ac} \sin \frac{\theta}{2} \sin(\omega_0 t + \frac{\theta}{2})] - de_{1,3}^1 \\ \dot{e}_{1,3}^2 &= (e_{1,3}^1 - e_{1,3}^2)/\beta_L \\ \dot{e}_{1,3}^3 &= e_{1,3}^1 \end{aligned} \quad (6)$$

含有交流项,所以 $\theta \neq 0$ 时系统中任何两个振子之间均不能达到完全同步。

为了进一步分析相位差对系统同步的影响,我们

计算了误差系统随 θ 变化的分岔图和 Lyapunov 指数曲线,结果如图 5 所示,其中 $e_{1,3}^1(nT)$ 是指以驱动电流的周期 $T=2\pi/\omega_0$ 为时间间隔截取 $e_{1,3}^1(t)$ 时间序列得到的一系列点。从图 5(a)和(c)得知,当 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_3 处于混沌同步时($d=0.6$),相位差使其去同步,此时最大横向 Lyapunov 指数 $\lambda_1^* > 0$,误差系统作振荡运动。

特别值得注意的是,这时误差系统中存在丰富的周期行为,对应于图 5(a)中的周期区域和图 5(c)中 $\lambda_1^* \approx 0$ 的区域,在这些区域,系统所有振子均作周期运动。从图 5(a)中可以找到周期 1、2、3、4 等运动形式,相位差的存在虽然破坏了系统中的完全同步,但却能抑制系统中的混沌。而且,相位差这种抑制混沌的作用在系统没有达到混沌同步($d=0.3$)的时候同样有效,如图(b)和(d)所示,对比图 5(a)和(b)发现此时没有周期 1 运动,相位差抑制混沌的作用有所减弱。图 6(a)和(b)分别给出了对应图 5 的两组参数值下系统中周期 1 和周期 2 运动的时间序列。当系统中的振子均以相同周期作周期振荡,这显然可以看成是一种相同步。在图 5(a)中的周期区域,系统所有振子是周期相同步的。

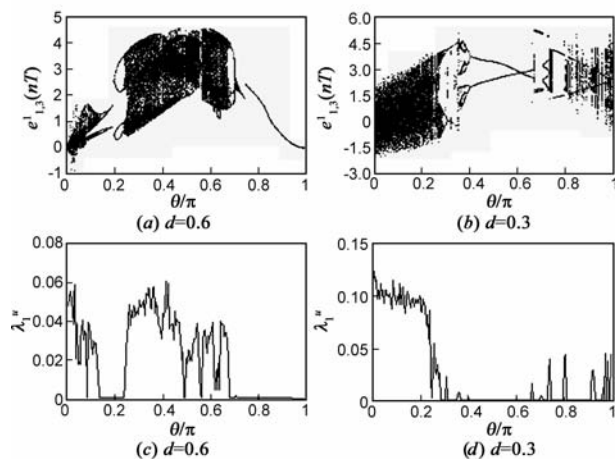


图5 误差系统的分岔图及Lyapunov指数曲线

4.2 $\theta \neq 0$ 时系统的延迟同步化

下面分析 N 较大($N>3$)时,Josephson 结阵列中的延迟同步现象。不失一般性,首先假设 N 为奇数,则阵列关于对称轴分成 $(N-1)/2$ 个振子对。由于耦合项和非线性项仅在每个振子状态方程组中的第一个方程中出现,因此为了书写简便且不影响分析结果,以下列写各个振子状态方程时仅写出其中第一个方程。阵列中距离最远的振子对(1, N)的状态方程如下

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t) = (-gv_1(t) - i_{L,1}(t) - \sin\alpha_1(t) + i_{ac}\cos(\omega t))/\beta_C \\ \quad - d(v_1(t) - v_2(t)) \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} \dot{v}_N(t) = (-gv_N(t) - i_{L,N}(t) - \sin\alpha_N(t) + i_{ac}\cos(\omega t + \theta))/\beta_C \\ \quad - d(v_N(t) - v_{N-1}(t)) \end{cases} \quad (7b)$$

对式(7a)作变量代换 $t = t + (2k\pi + \theta)/\omega_0 = t'$,则有

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t') = (-gv_1(t') - i_{L,1}(t') - \sin\alpha_1(t') + i_{ac}\cos(\omega t + \theta + 2k\pi))/\beta_C \\ \quad - d(v_1(t') - v_2(t')) \\ \dot{v}_N(t) = (-gv_N(t) - i_{L,N}(t) - \sin\alpha_N(t) + i_{ac}\cos(\omega t + \theta))/\beta_C \\ \quad - d(v_N(t) - v_{N-1}(t)) \end{cases} \quad (8a)$$

$$(8b)$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots$. 通过对比式(8a)、(8b)得知, 当 $v_2(t') = v_2(t + (2k\pi + \theta)/\omega_0) = v_{N-1}(t)$ 成立时, 存在延迟同步流形 $v_1(t') = v_1(t + (2k\pi + \theta)/\omega_0) = v_N(t)$, 即振子对(1, N)存在延迟同步的前提是振子对(2, N-1)达到延迟同步. 依此类推, 可得最靠近的振子对((N-1)/2, (N+3)/2)的方程为

$$\begin{cases} \dot{v}_{(N-1)/2}(t') = (-gv_{(N-1)/2}(t') - i_{L,(N-1)/2}(t') - \sin\alpha_{(N-1)/2}(t'))/\beta_C \\ \quad + d(v_{(N-3)/2}(t') - 2v_{(N-1)/2}(t') + v_{(N+1)/2}(t')) \\ \dot{v}_{(N+3)/2}(t) = (-gv_{(N+3)/2}(t) - i_{L,(N+3)/2}(t) - \sin\alpha_{(N+3)/2}(t))/\beta_C \\ \quad + d(v_{(N+1)/2}(t) - 2v_{(N+3)/2}(t) + v_{(N+5)/2}(t)) \end{cases} \quad (9a)$$

$$(9b)$$

假设此时振子对((N-3)/2, (N+5)/2)已达到延迟同步, 即有 $v_{(N-3)/2}(t') = v_{(N+5)/2}(t)$. 而在一般情况下 $v_{(N+1)/2}(t') \neq v_{(N+1)/2}(t)$, 所以由式(9)可知不存在同步流形 $v_{(N-1)/2}(t') = v_{(N+3)/2}(t)$, 即振子对((N-1)/2, (N+3)/2)不能达到延迟同步.

定义延迟同步误差: $\Delta_j = v_j(t') - v_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$, (N-1)/2. 实际上由于 $\Delta_{(N-1)/2} \neq 0$, 将导致 $\Delta_{(N-1)/2}$, $\Delta_{(N-3)/2}, \dots, \Delta_1$ 都不等于零, 即阵列中各振子对均不能达到严格的延迟同步. 但是, 通过大量的数值仿真, 我们发现距离较远的振子对之间有很好的延迟同步化行为. 进一步分析其原因, 我们认为是耦合振子系统中的扩散(耦合)作用使局部反应导致的空间不均匀性趋于均匀, 阵列中距离最近的振子对的同步误差在向两边扩散过程中逐渐减小. 当达到处于边界的振子对时, 该误差已趋近于零. 因此, 距离越远的振子对之间的延迟同步化程度越高. 而振子数较少的系统中则不能建立延迟同步, 如图 6 所示 $N=3$ 时的结果, 显然振子(1, 3)之间没有达到延迟同步. 另外, 由上面的分析知延迟同步发生的延迟时间 τ_0 满足

$$\tau_0 = (2k\pi + \theta)/\omega_0 \quad (10)$$

当 N 为偶数时可得到类似的结论.

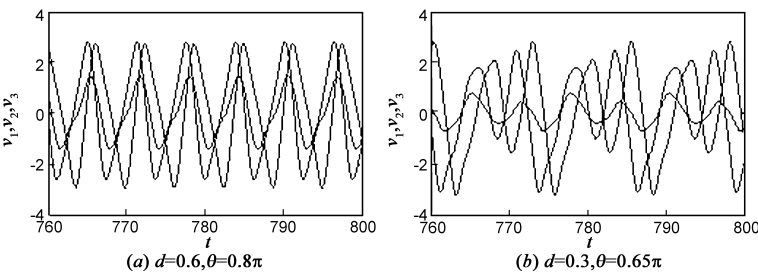


图6 阵列中结电压的时间序列

系统中的延迟同步行为可以用相似函数来定量刻画, 相似函数 $S(\tau)$ 定义如下^[19]

$$S_{i,j}(\tau) = \sqrt{\frac{\langle (v_i(t+\tau) - v_j(t))^2 \rangle}{(\langle v_i^2(t) \rangle \langle v_j^2(t) \rangle)^{1/2}}} \quad (11)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示长时间平均, 并令 $\sigma_i = \min(S_{i,j}(\tau))$. 图 7 所示是取不同 θ 值时 Josephson 结阵列中延迟同步行为的仿真结果, 其中 $N=7$, $d=0.6$, 其它参数取值同上. 从图 7(a) 中得知 $\sigma_1 = 6.1 \times 10^{-3}$, $\sigma_2 = 2.64 \times 10^{-2}$, $\sigma_3 = 1.786 \times 10^{-1}$, 所以振子对(1, 7)的延迟同步化程度最高, 振子对(2, 6)次之, 而振子对(3, 5)之间没有建立起延迟同步化. 延迟时间 $\tau_0 = 1.26 = \theta/\omega_0$, 满足关系式(10). 图 7(b) 同样也显示出振子对由外及内其延迟同步化程度逐步减弱, 且延迟同步建立的延迟时间 $\tau_0 = 8.48 = (2\pi + \theta)/\omega_0$, 同样满足关系式(10). 图 7(c) 和 (d) 分别是对应图 7(a) 和图 7(b) 在延迟相空间中的同步相图. 以上数值计算结果与理论分析相吻合.

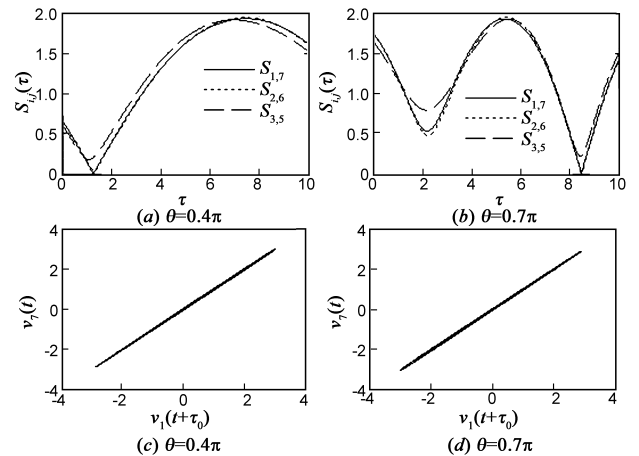


图7 相似函数及延迟空间中的同步相图

5 结论

本文针对一类交流驱动下由 RCL 分路的 Josephson 结构成的阵列, 通过理论分析和数值计算的方法讨论了系统中丰富的同步行为, 得到如下结论: 当外部驱动电流的相位差为零时, 系统中处于对称位置的振子之间存在完全同步流形, 而且当对应的最大横向 Lyapunov 指数小于零时该同步流形稳定; 当驱动电流的相位差不等于零时, 系统中出现了丰富的周期相同步现象, 相位差一方面破坏了系统中的完全同步, 但另一方面却抑制了系统的混沌; 当相位差不等于零时系统对称的振子对之间存在延迟同步化现象, 距离越远的振子对之间的延迟同步化程度越高, 振子较少 ($N \leq 3$) 的阵列中不能建立起延迟同步, 而且建立同步化的延迟时间与外部驱动电流的相位差之间有确定的对应关系, 该分析结果具有一般性.

参考文献

- [1] Levinsen M T, et al. An inverse ac Josephson effect voltage standard[J]. Appl Phys Lett, 1977, 31(11): 776 – 778.
- [2] Mao B, Tan Z K, et al. Basic properties of an rf SQUID involving two Josephson junctions connected in series[J]. Chin. Phys., 2004, 13(8): 1226 – 1229.
- [3] Osborn K D, Strong J A, et al. Frequency-tunable Josephson junction resonator for quantum computing[J]. IEEE Trans. Appl. Supercond., 2007, 17(2): 166 – 168.
- [4] Forn-Diaz P, Schouten R N, et al. Josephson squelch filter for quantum nanocircuits[J]. Appl Phys Lett, 2009, 95(4): 042505.
- [5] 刘飞连, 周铁戈, 等. 约瑟夫森结参数对 Shapiro 台阶的影响研究[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 957 – 960.
Liu Fei-lian, Zhou Tie-ge, et al. Influence of Josephson junction parameters on Shapiro steps[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 957 – 960. (in Chinese)
- [6] 张立森, 蔡理, 冯朝文. 含无损传输线的约瑟夫森结电磁系统中的分岔与混沌[J]. 电子学报, 2010, 38(6): 1311 – 1315.
Zhang Li-sen, Cai Li, Feng Chao-wen. Bifurcation and chaos in Josephson junction electromagnetic system with lossless transmission line[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(6): 1311 – 1315. (in Chinese)
- [7] 岳宏卫, 阎少林, 王争, 等. 8mm 波段 Fabry-Perot 谐振腔及其在约瑟夫森结特性测量中的应用[J]. 电子学报, 2010, 38(10): 2405 – 2409.
Yue Hong-wei, Yan Shao-lin, Wang Zheng, et al. An 8mm wave Fabry-Perot resonator and its application in Josephson junction characteristic measurements[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(10): 2405 – 2409. (in Chinese)
- [8] Kornev V K, Arzumanov A V, Mashtakov A D. Phase-locked one- and two-dimensional Josephson-junction arrays as millimeter and submillimeter wave generators[J]. IEEE Trans Appl Supercond, 1997, 7(2): 3111 – 3114.
- [9] Zhou T G, Fang L, Li S, et al. Nonlinear inductance of intrinsic Josephson junction arrays and its application to tunable filters[J]. IEEE Trans. Appl. Supercond., 2007, 17(2): 586 – 589.
- [10] Rotoli G. Unconventional Josephson junction arrays for qubit devices[J]. IEEE Trans. Appl. Supercond, 2005, 15(2): 852 – 855.
- [11] Likharev K K, Semenov V K. RSFQ logic/memory family: a new Josephson-junction technology for sub-terahertz-clock-frequency digital systems[J]. IEEE Trans Appl Supercond, 1991, 1(1): 3 – 28.
- [12] Whan C B, Lobb C J, Forrester M G. Effect of inductance in externally shunted Josephson tunnel junctions[J]. J Appl Phys, 1995, 77(1): 382 – 389.
- [13] Whan C B, Lobb C J. Complex dynamical behavior in RCL-shunted Josephson tunnel junctions[J]. Phys Rev E, 1996, 53(1): 405 – 413.
- [14] Cawthorne A B, Whan C B, Lobb C J. Complex dynamics of resistively and inductively shunted Josephson junctions[J]. J Appl Phys, 1998, 84(2): 1126 – 1132.
- [15] Dana S K, Sengupta D C, Edoh K D. Chaotic dynamics in Josephson junction[J]. IEEE Trans Circ Syst I, 2001, 48(8): 990 – 996.
- [16] Feng Y L, Shen K. Controlling chaos in RCL-shunted Josephson junction by delayed linear feedback[J]. Chin. Phys. B, 2008, 17(1): 111 – 116.
- [17] Feng Y L, Shen K. Synchronization of chaos in resistive-capacitive-inductive shunted Josephson junctions[J]. Chin Phys B, 2008, 17(2): 550 – 556.
- [18] Ucar A, Lonngren K E, Bai E W. Chaos synchronization in RCL-shunted Josephson junction via active control[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 31(1): 105 – 111.
- [19] 刘宗华. 混沌动力学基础及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006, 78 – 106.
Liu Zong-hua. Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. 78 – 106. (in Chinese)

作者简介



张立森 男, 1982 年生于湖北鄂州, 现为空军工程大学理学院博士生, 研究方向为非线性电路与系统理论及应用。

E-mail: ls. zhang@yahoo. com. cn

蔡理 女, 1959 年生于福建永春, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事集成滤波器理论与设计、单电子纳器件的理论及应用和现代集成电路与系统的研究。