

# 用基于 Coifman 尺度函数的多分辨 时域分析计算电磁散射

魏兴昌, 梁昌洪

(西安电子科技大学 601 室, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 本文利用 Coifman 尺度函数具有消失矩和紧支集的特点, 提出了一种新的多分辨时域分析方法, 研究了它的数值色散特性, 并与通常的 FDID 方法进行了比较. 通过算例, 表明该方法比通常的 FDID 方法需要网格数量少、计算时间快.

**关键词:** 多分辨时域分析; Coifman 尺度函数; 时域有限差分法

**中图分类号:** O441.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 12-1668-03

## Using the MRTD Based on Coifman Scaling Functions to Solve the Problem of Scattering

WEI Xing-chang, LIANG Chang-hong

(601 Lab., Xidian Univ., Xi'an, Shanxi 710071, China)

**Abstract:** A new method of multiresolution time-domain analysis is proposed, which is based on Coifman compactly supported scaling functions with some number of vanishing moments. The highly linear dispersional properties of the method are investigated and compared with conventional FDID method. The problem of scattering from two-dimensional conducting cylinders is analyzed in order to demonstrate the advantages of this method over conventional FDID scheme with respect to memory requirements and execution time.

**Key words:** multiresolution time-domain analysis; Coifman scaling functions; finite-difference time-domain method

### 1 引言

时域有限差分法 (FDTD) 由于通用性和瞬态性, 成为一种解决电磁场问题的有效方法<sup>[1]</sup>. 但 FDTD 存在数值色散问题, 其网格划分不能很粗, 当物体电尺寸加大时, 需要大量的网格, 增加了内存和计算时间的消耗. 对于这一困难, 人们提出过一些改进方法. 近几年来, 小波研究的发展为解决这个问题提供了一个新的途径, 人们分别采用基于 Battle-Lemarie、Haar 和 Daubechies 尺度函数、小波函数的多分辨时域分析 (MRTD) 公式代替 FDTD 公式<sup>[2,3]</sup>. 本文采用基于 Coifman 尺度函数的 MRTD, 由于 Coifman 尺度函数特有的消失矩特性, 本文方法比前面的 MRTD 方法在处理入射波源、电流重构方面要简单. 最后, 通过二维算例, 表明本方法比普通 FDTD 方法需要内存和计算时间都要少.

### 2 公式推导

本节推导基于 Coifman 尺度函数的 MRTD 公式. 首先介绍  $2N$  阶 Coifman 尺度函数  $\phi(x)$ <sup>[4]</sup>.  $\phi(x)$  支集为  $[-2N, 4N-1]$ ,  $\{\phi(x-i) | i \in Z\}$  构成了实数轴上的正交归一集.  $\phi(x)$  与其它小波和尺度函数的主要不同之处是它有如下的消失矩性质:

$$\int \phi(x) \cdot dx = 1 \quad (1a)$$

$$\int x^p \phi(x) \cdot dx = 0, \quad p = 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (1b)$$

因此,  $\phi(x)$  在  $L^2$  范数条件下表现出对平滑函数的采样特性, 即对于平滑函数  $f(x)$ , 应用式 (1) 有

$$\int f(x) \phi(x) dx = \left[ f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \dots \right] \cdot \int \phi(x) dx = f(0) \quad (2)$$

二维、TE 情况下理想匹配层 (PML) 媒质中的电磁场方程组为<sup>[1]</sup>

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + \overset{*}{y} E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} + \overset{*}{x} E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3b)$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \overset{*}{x} H_x = -\frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (3c)$$

$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \overset{*}{y} H_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} \quad (3d)$$

$$H_z = H_x + H_y \quad (3e)$$

其中,  $\overset{*}{x} = \frac{x}{\mu}$ ,  $\overset{*}{y} = \frac{y}{\mu}$ . 对于自由空间, 令  $\overset{*}{x} = \overset{*}{y} = \overset{*}{x} = \overset{*}{y} = 0$  即可. 把式 (3) 中  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $H_x$ 、 $H_y$ 、 $H_z$  用  $\phi(x)$  展开如下:

$$E_x(x, y, t) = \sum_{i,j,n} E_x \Big|_{i+\frac{1}{2}, j}^n \phi_{i+\frac{1}{2}}(x) \phi_j(y) h_n(t) \quad (4a)$$

$$E_y(x, y, t) = \sum_{i,j,n} E_y \Big|_{i, j+\frac{1}{2}}^n \phi_i(x) \phi_{j+\frac{1}{2}}(y) h_n(t) \quad (4b)$$

$$H_{zx}(x, y, t) = \int_{i,j,n} H_{zx} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2}}(x) \phi_{j+\frac{1}{2}}(y) h_{n-\frac{1}{2}}(t) \quad (4c)$$

$$H_{zy}(x, y, t) = \int_{i,j,n} H_{zy} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2}}(x) \phi_{j+\frac{1}{2}}(y) h_{n-\frac{1}{2}}(t) \quad (4d)$$

$$H_z(x, y, t) = \int_{i,j,n} H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2}}(x) \phi_{j+\frac{1}{2}}(y) h_{n-\frac{1}{2}}(t) \quad (4e)$$

其中,  $h_n(t) = h\left(\frac{t}{t} - n\right)$ ,  $\phi_i(x) = \phi\left(\frac{x}{t} - i\right)$ ,  $h(t)$  为  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  间的单位脉冲函数,  $t$ 、 $t$  为时间步和空间步,

$E_x|_{i+(1/2),j}$ 、 $E_y|_{i+(1/2),j}$ 、 $H_{zx}|_{i+(1/2),j+(1/2)}$ 、 $H_{zy}|_{i+(1/2),j+(1/2)}$ 、 $H_z|_{i+(1/2),j+(1/2)}$  为待求系数。

下面对式(3)采用 Galerkin 方法求解:把式(4)代入式(3),把式(3a)至式(3d)两边分别与  $\phi_{i+(1/2)}(x) \phi_j(y) h_{n-(1/2)}(t)$ 、 $\phi_i(x) \phi_{j+(1/2)}(y) h_{n-(1/2)}(t)$ 、 $\phi_{i+(1/2)}(x) \phi_{j+(1/2)}(y) h_n(t)$ 、 $\phi_{i+(1/2)}(x) \phi_{j+(1/2)}(y) h_n(t)$  积分,得到如下基于 Coifman 尺度函数的 MRID 公式:

$$E_x|_{i+(1/2),j} = c_1 \cdot E_x|_{i+(1/2),j} + \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} c_2 \cdot \sum_{l=2-6N}^{6N-1} a(l) \cdot H_z|_{i+(1/2),j+(1/2)-l} \quad (5a)$$

$$E_y|_{i,j+(1/2)} = c_3 \cdot E_y|_{i,j+(1/2)} - \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} c_4 \cdot \sum_{l=2-6N}^{6N-1} a(l) \cdot H_z|_{i+(1/2)-l,j+(1/2)} \quad (5b)$$

$$H_{zx}|_{i+(1/2),j+(1/2)} = c_3 \cdot H_{zx}|_{i+(1/2),j+(1/2)} - \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} c_4 \cdot \sum_{l=2-6N}^{6N-1} a(l) \cdot E_y|_{i+1-l,j+(1/2)} \quad (5c)$$

$$H_{zy}|_{i+(1/2),j+(1/2)} = c_1 \cdot H_{zy}|_{i+(1/2),j+(1/2)} + \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} c_2 \cdot \sum_{l=2-6N}^{6N-1} a(l) \cdot E_x|_{i+(1/2),j+1-l} \quad (5d)$$

其中,  $c_1 = \frac{2-t \cdot x}{2+t \cdot y}$ ,  $c_2 = \frac{c \cdot t}{2+t \cdot y}$ ,  $c_3 = \frac{2-t \cdot x}{2+t \cdot x}$ ,  $c_4 = \frac{c \cdot t}{2+t \cdot x}$ ,  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$  为自由空间相速,  $2N$  为  $\phi(x)$  的阶数,  $a(l) = \int_{x+\frac{1}{2}-l}^x \phi(x) \cdot \phi\left(x+\frac{1}{2}-l\right) dx$ ,  $a(l)$  可由数值

表 1 4 阶、8 阶 Coifman 尺度函数对应的  $a(l)$

$l$	Coif4	Coif8
1	-1.31176	-1.30666
2	0.15757	0.16494
3	-0.04383	-0.06042
4	0.00982	0.02429
5	-0.00124	-0.00857
6	0.00005	0.00243
7		-0.00053
8		0.00009
9		-0.00001

积分直接求出。由于  $\phi(x)$  是紧支集,  $a(l)$  的个数是有限的,表 1 列出了 4 阶、8 阶 Coifman 尺度函数对应的  $a(l)$ ,其中忽略了  $a(l)$  很小的值。表 1 只列出了  $l \geq 1$  的  $a(l)$  值,对于  $l \leq 0$  的  $a(l)$ ,可由  $a(l) = -a(1-l)$  得到。得到了 MRID 公式(5)后,就可以象普通 FDID 方法一样,迭代求解  $E_x|_{i+(1/2),j}$ 、 $E_y|_{i,j+(1/2)}$ 、 $H_{zx}|_{i+(1/2),j+(1/2)}$ 、 $H_{zy}|_{i+(1/2),j+(1/2)}$ 。

近似认为  $E_x(x, y, t)$  是关于  $t$  的阶梯函数,根据  $\phi(x)$  的消失矩特性,从式(4a)可得

$$E_x|_{i+(1/2),j} = \frac{1}{t} \iint E_x(x, y, t) \cdot \phi_{i+(1/2)}(x) \cdot \phi_j(y)$$

可见,  $E_x|_{i+(1/2),j}$  可近似看为  $E_x(x, y, t)$  在  $\left(\left[i+\frac{1}{2}\right], j, n \cdot t\right)$  点的采样值。对于式(5)中的  $E_x|_{i+(1/2),j}$ 、 $H_{zx}|_{i+(1/2),j+(1/2)}$ 、 $H_{zy}|_{i+(1/2),j+(1/2)}$ ,也可以如此近似。由于 Coifman 尺度函数的消失矩特性,本文的方法比其它 MRID 方法公式的应用更简便,以  $E_x$  为例:用单频平面波作入射波,在总/散射场的连接面附近要计算入射波的  $E_x|_{i+(1/2),j}$ ,此时  $E_x|_{i+(1/2),j}$  即是  $E_x(x, y, t)$  的采样值,因而无需象其它 MRID 一样对  $E_x(x, y, t)$  积分求解  $E_x|_{i+(1/2),j}$ ;由式(5)求出  $E_x|_{i+(1/2),j}$  后,不必代入式(4a)计算,即得到了  $E_x(x, y, t)$  在“粗”网格上的分布。

需要说明的是,若把式(3)中的  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $H_{zx}$ 、 $H_{zy}$ 、 $H_z$  用单位脉冲函数展开,应用同样的 Galerkin 方法,则得到普通 FDID 公式,所以式(5)可看作普通 FDID 算法的扩展。由于基函数的宽度大于  $\lambda$ ,MRID 方法都采用镜像原理模拟理想导体面,又考虑到  $a(l) = -a(1-l)$ ,可以看到式(5a)、(5b)求出的导体面上的切向电场恒为零,这一点与实际相符。

### 3 数值色散

在自由空间、无源区,式(5)可写为

$$E_x|_{i+(1/2),j} = E_x|_{i+(1/2),j} + \frac{c \cdot t}{l} \cdot \sum_{l=2-6N}^{6N-1} a(l) \cdot H_z|_{i+(1/2),j+(1/2)-l} \quad (6a)$$

$$E_y|_{i,j+(1/2)} = E_y|_{i,j+(1/2)} - \frac{c \cdot t}{l} \cdot \sum_{l=2-6N}^{6N-1} a(l) \cdot H_z|_{i+(1/2)-l,j+(1/2)} \quad (6b)$$

$$H_z|_{i+(1/2),j+(1/2)} = H_z|_{i+(1/2),j+(1/2)} + \frac{c \cdot t}{l} \cdot \sum_{l=2-6N}^{6N-1} a(l) \cdot \left\{ E_x|_{i+(1/2),j+1-l} - E_y|_{i+1-l,j+(1/2)} \right\} \quad (6c)$$

其中为了推导方便,对场分量进行了归一化,即用  $\sqrt{E_x}$ 、 $\sqrt{E_y}$ 、 $\sqrt{\mu} H_z$  分别代替式(5)中的  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $(H_{zx} + H_{zy})$ 。

由于式(6)中  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $H_z$  近似为连续场的采样值,我们可以取离散化的单色行波试探解

$$H_z|_{i,j} = H_{z0} \cdot e^{j(\tilde{k} \cdot (-\cos \cdot i + \sin \cdot j) - n \cdot t)} \quad (7a)$$

$$E_x|_{i,j} = E_{x0} \cdot e^{j(\tilde{k} \cdot (-\cos \cdot i + \sin \cdot j) - n \cdot t)} \quad (7b)$$

$$E_y|_{i,j} = E_{y0} \cdot e^{j(\tilde{k} \cdot (-\cos \cdot i + \sin \cdot j) - n \cdot t)} \quad (7c)$$

其中,  $\tilde{k}$  为待求的数值波数,  $\theta$  为传播角度,  $\omega$  为角频率。式(7)代入式(6),可得如下的色散方程

$$\left(2 \sin \frac{\omega t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot t}{l}\right)^2 \cdot \sum_{n=2-6N}^{6N-1} a(l) \cdot \left\{ \sum_{n=2-6N}^{6N-1} a(n) \cdot e^{j\tilde{k} \sin \cdot (1-l-n)} + \sum_{m=2-6N}^{6N-1} a(m) \cdot e^{j\tilde{k} \cos \cdot (1-l-m)} \right\} = 0 \quad (8)$$

式(8)可分为实部和虚部两个方程,用数值方法可求出同时满足这两个方程的  $\tilde{k}$ 。

图 1(a)和(b)分别画出了  $\theta = 0$  和  $\theta = 45^\circ$  时,普通 FDID 方法、本文 MRID 方法数值相速  $\tilde{v}$  与  $c$  之比随  $\omega$  (为入射波

长)的变化.其中 $\frac{c \cdot t}{4} = \frac{1}{4}$ ,  $\phi(x)$ 取4阶.由图可见:

(1) MRTD 与 FDTD 都在  $\theta = 45^\circ$  时色散小,在  $\theta = 0^\circ$  时色散大;

(2) MRTD 色散呈现出一种“快波”现象,这与 FDTD 色散的“慢波”现象是相反的;

(3)在总体上,MRTD 比 FDTD 色散小很多,这是与 MRTD 的展开函数比 FDTD 的展开函数复杂相联系的.因此,MRTD 可以取更粗一些的网格,在计算电大尺寸物体时,可以减少内存和计算时间的消耗.

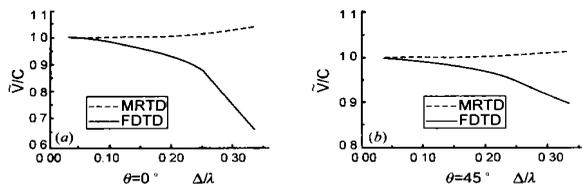


图1 FDTD、MRTD 数值相速  $\tilde{v}$  与  $c$  之比随  $\Delta/\lambda$  的变化

#### 4 算例

我们用普通 FDTD 和本文 MRTD 分析了一个简单的二维散射问题.入射波和理想导体方柱散射体如图2所示.MRTD 取4阶 Coifman 尺度函数,对所有算例, $c \cdot t/\lambda$  取为  $1/4$ ,吸收条件取为 PML,入射波源取单频正弦波.

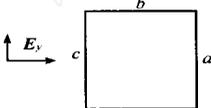


图2 方柱散射体和入射波

图3是方柱边长为8时,取  $\Delta/\lambda = 5$  的 MRTD、取  $\Delta/\lambda = 5$  的 FDTD 和取  $\Delta/\lambda = 20$  的 FDTD 求出的距离导体壁  $\lambda/10$  处  $H_z$  的幅值.由图可见,由于色散误差,FDTD 网格加粗时,求解十分不准确,而 MRTD 则可以取较粗的网格,得到与 FDTD 细网格一致的解.

图4是方柱边长为8时,取  $\Delta/\lambda = 5$  的 MRTD、取  $\Delta/\lambda = 5$  的12阶中心有限差分 FDTD 算法(HFD12)和取  $\Delta/\lambda = 20$  的普通2阶 FDTD 求出的导体壁上的电流幅值.此时,HFD12 的  $a(l)$  与 MRTD 的  $a(l)$  等个数.由图可见,MRTD 和 HFD12 的解在“暗面”的误差都不大,但在“亮面”,HFD12 的误差大于 MRTD.我们用导体表面磁场切向分量  $H_z$  求电流  $J_s^{[5]}$ :  $J_s = \hat{n} \times H_z$ ,  $\hat{n}$  为导体壁处外法向单位矢.当  $\Delta/\lambda = 5$  时,离导体最近的网格,其  $H_z$  离导体壁为  $\lambda/10$ ,对于 HFD12 需要在时域插值求导体壁上的  $H_z$ .在本文中,我们采用三点插值,由于导体“亮面”附近  $H_z$  变化剧烈,网格又较粗(5个点  $H_z$  变化一个波长),所以插值不容易准确.而对于 MRTD,我们可用式(4)在

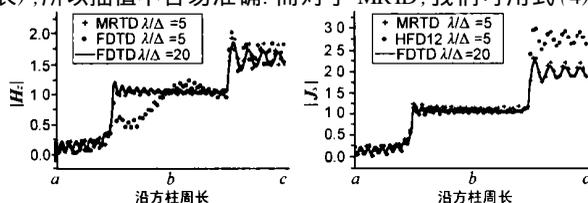


图3 距离导体壁  $\lambda/10$  处  $H_z$  的幅值 图4 导体壁上的电流幅值

时域求解导体壁上的  $H_z$ ,由于  $\phi(x)$  是紧支集,对于固定的某一点,式(4)中的展开项是有限的,而且式(4)是 MRTD 迭代公式的基础,因此 MRTD 不需要特殊的插值方法就可以在粗网格下准确求解电流.

表2是方柱边长变化时,MRTD 和普通 FDTD 在内存占有、计算时间和误差上的比较.其中,两者计算时间步都取为波沿方形计算区域边长传播一个来回所需的时间步;FDTD、MRTD 的  $\Delta/\lambda$  分别取为 20、5;为了比较的一致性,误差定义为  $(J_1 - J_2) / J_1$ ,  $J_1$  为由矩量法(MOM)求得的方柱周边电流<sup>[6]</sup>,  $J_2$  为 FDTD 或 MRTD 求得的方柱周边电流.由表可见,MRTD 比 FDTD 所需网格数少,进而计算时间也比 FDTD 的少,这种改善随物体电尺寸的加大而明显.

表2 MRTD 和普通 FDTD 在内存占有、计算时间和误差上的比较

方柱边长	MRTD				FDTD			
	4	6	8	10	4	6	8	10
网格数	17424	20164	23104	26244	48400	67600	90000	115600
时间(秒)	126.38	160.49	196.52	241.51	222.06	299.89	406.17	529.21
误差(%)	8.65	9.37	11.45	13.54	5.16	5.91	7.18	8.21

#### 5 结论

本文提出了一种基于 Coifman 尺度函数的 MRTD 方法,由于 Coifman 尺度函数有消失矩、紧支集特性,它比其它的方法公式应用简单.通过具体算例,表明该方法可以有效减少数值色散,比普通 FDTD 方法节省了内存和计算时间.

#### 参考文献:

- [1] A Taflov. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method [M]. Artech House, Boston, London, 1995: 51 - 79.
- [2] M Krumpolz, L P B Katechi. MRTD: new time-domain schemes based on multiresolution analysis [J]. IEEE Trans. on MTT, 1996, 44 (4): 555 - 571.
- [3] M Fujii, W J R Hoefler. Dispersion of time domain wavelet galerkin method based on daubechies compactly supported scaling functions with three and four vanishing moments [J]. IEEE Microwave and Guided Wave Lett., 2000, 10(4): 125 - 127.
- [4] Guangwen Pan, M V Tsouipikov, B K Gilbert. On the use of Coifman intervallic wavelets in the method of moments for fast construction of wavelets sparsified matrices [J]. IEEE Trans. on AP, 1999, 47 (7): 1189 - 1200.
- [5] 高本庆. 时域有限差分法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1995: 108 - 134.
- [6] 哈林顿著, 王尔杰, 等译. 计算电磁学中的矩量法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1981: 49 - 55.

#### 作者简介:



魏兴昌 男. 1972年1月生于河北省石家庄市. 1998年毕业于西安电子科技大学, 获硕士学位. 现为西安电子科技大学电磁场与微波技术专业博士研究生, 主要研究兴趣为计算微波与计算电磁学.