

T-S 模糊粒子群优化建模及稳定性分析

冯纪强¹, 谢维信¹, 徐 晨²

(1. 深圳大学 ATR 国防科技重点实验室, 广东深圳 518060; 2. 深圳大学智能计算科学研究所, 广东深圳 518060)

摘 要: 在粒子群优化问题空间是一维有界的前提下, 本文结合 T-S 模糊框架提出了一种模糊粒子群优化模型, 即粒子群优化中的速度和位置迭代公式变换为一个带时变非线性反馈的线性时不变系统, 将其嵌入到 T-S 模糊状态模型, 同时将粒子的认知部分和社会部分随机加权和对的反向运动作为 T-S 模糊状态反馈控制. 针对该模型, 本文根据 T-S 稳定性理论和非线性随机系统 Lyapunov 稳定性理论分情况探讨了其稳定性.

关键词: 粒子群优化; Tanaka-Sugeno (T-S) 模糊; 稳定性

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 05-1150-04

A T-S Fuzzy PSO Model and Its Stability Analysis

FENG Ji-qiang¹, XIE Wei-xin¹, XU Chen²

(1. ATR Key Laboratory of National Defense, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060, China;

2. Institute of Intelligent Computing Science, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060, China)

Abstract: Assuming that the solution space is a one-dimensional bounded space, we present a T-S fuzzy stochastic PSO model. PSO is viewed as a time-invariant linear plant with a time-varying feedback controller that is embedded in the T-S fuzzy state system. The randomly weighted sum of the cognition and social components is used as the state feedback controller in the local linear state system. The asymptotic stability of the new model is discussed in two different cases using the Lyapunov stability theory of the nonlinear stochastic systems.

Key words: particle swarm optimization (PSO); Tanaka-Sugeno (T-S) fuzzy model; stability

1 引言

粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)是由美国社会心理学家 Kenndy 和电气工程师 Eberhar 于 1995 年抽象鸟群觅食等生物现象而建立的一种基于种群的仿生随机优化方法, 是一种典型群智算法. 通过一个模糊系统自适应调整粒子群优化参数(比如惯性权重)的思想可追溯到 1999 年, Yuhui Shi^[1]在 2001 年提出了一种模糊自适应粒子群优化算法. Hongbo Liu^[2]采用最小速度来避免 PSO 过程早熟, 利用模糊控制器来调整最小速度的阈值. Wenping Chang^[3]利用适应度函数的均方偏差和进化速度模糊控制粒子群优化过程的惯性权重因子. Xuelei Meng^[4]在 PSO 速度更新方程中引入隶属度函数, 通过概念隶属度函数的类型达到效率和速度的均衡. 另外, 在 PSO 运行过程中吕振肃等^[5]通过粒子群的适应度方差和当前最优粒子确定当前最佳粒子的变异概率, 以增强全局收搜索能力; 张长胜等^[6]通过吸引和

排斥过程的动态切换, 以自适应调整惯性权重.

随着 PSO 工程应用的不断拓展^[7,8], PSO 的参数和变量越来越复杂, 人为主观因素不断增多, 再加之仿生算法本身的不确定性, 粒子群体行为中的模糊特征越来越明显, 单一的不确定性(随机性)难以描述和揭示生物群体原本的智能性.

由于 T-S 模糊具有比较丰富的局部结构, 便于用 Lyapunov 函数分析全局稳定性和设计多变量系统控制器, 本文基于前人工作^[9,10], 将粒子群优化嵌入 T-S 模糊框架, 根据 T-S 稳定性理论和非线性随机系统的 Lyapunov 稳定性理论探讨了基于 T-S 模糊粒子群优化的稳定条件.

2 预备知识

2.1 T-S 模型

模糊系统作为一类面向控制的非线性建模方法, 模糊模型提供了一种处理非线性问题的方法, T-S 模糊框

架就是其中一种,它是通过不同线性系统的加权求和得到问题的非线性表述,有利于非线性系统的稳定性分析.T-S 模糊状态模型第 i 条模糊规则是

$$\text{If } f_1(\mathbf{x}(t)) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } f_{\Psi}(\mathbf{x}(t)) \text{ is } M_{i\Psi} \\ \text{Then } \begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_i \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \cdots, u_m(t)]^T$, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \cdots, x_n(t)]^T$ 和 $\mathbf{z}(t) = [f_1(\mathbf{x}(t)), \cdots, f_{\Psi}(\mathbf{x}(t))]$ 分别是输入控制向量、状态向量和前提向量, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$. $M_{ij}(z_j(t))$ 是模糊规则 i 中分量 $f_j(\mathbf{x}(t))$ 的模糊数, r, n 和 Ψ 分别是模糊规则数、状态变量数和一正整数, $i = 1, \cdots, r, j = 1, \cdots, \Psi$. 通过单点模糊化、乘积推理和中心平均去模糊,得到模糊系统的整个状态方程是

$$\mathbf{x}(t+1) = \sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}(t)) [A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)] \quad (2)$$

其中

$$w_i(\mathbf{x}(t)) = \frac{\mu_{M_{i1}}(f_1(\mathbf{x}(t))) \cdots \mu_{M_{i\Psi}}(f_{\Psi}(\mathbf{x}(t)))}{\sum_{k=1}^r \mu_{M_{k1}}(f_1(\mathbf{x}(t))) \cdots \mu_{M_{k\Psi}}(f_{\Psi}(\mathbf{x}(t)))} \quad (3)$$

$w_i(\mathbf{x}(t)) \in [0, 1]$ 且 $\sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}(t)) = 1$, $\mu_{M_{ij}}(f_j(\mathbf{x}(t)))$ 反映状态变量在模糊规则 i 下与第 j 个模糊变量的匹配程度.

2.2 粒子群优化模型

粒子群优化中的粒子是对生物群体中个体的抽象,根据每个粒子自身历史最优信息和种群最优粒子的信息,每个粒子的位置和速度得到了不断更新,从而产生新的粒子群,实现了协同合作与信息共享.在一维问题空间中,速度和位置更新方程为

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t+1) = w\mathbf{v}(t) + \varphi_l(t)(p_l - \mathbf{x}(t)) + \varphi_g(t)(p_g - \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t+1) \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 分别是 t 时刻粒子的位置分量和速度分量, p_g 和 p_l 分别表示种群最优个体和粒子历史最优个体, $r_{il} \in U[0, 1]$, $r_{ig} \in U[0, 1]$, $\varphi_l = c_{il}r_{il}$, $\varphi_g = c_{ig}r_{ig}$, c_{il} 和 c_{ig} 分别是认知成分与社会成分的加速度系数.

受文献[9]中 PSO 的速度和位置迭代形式的启发,本文将 PSO 的速度和位置迭代公式变换为一个带非线性反馈的线性时不变系统,如式(5).

$$\begin{cases} \xi(t+1) = A\xi(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\xi(t) \\ \mathbf{u}(t) = \varphi(t)(p - \mathbf{y}(t)) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\xi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & w \end{pmatrix}$, $C = (1 \ 0)$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p = \frac{\varphi_l(t)p_l + \varphi_g(t)p_g}{\varphi(t)}, \varphi(t) = \varphi_l(t) + \varphi_g(t).$$

3 基于 T-S 模糊粒子群优化模型

本文结合 PSO 的速度和位置的迭代公式(5)及 T-S 模糊状态方程(2)得到 T-S 模糊粒子群优化模型,其中在模糊规则 i 下该模型的子系统 i 为

$$\text{If } f_1(\mathbf{x}(t)) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } f_{\Psi}(\mathbf{x}(t)) \text{ is } M_{i\Psi}, \text{ Then} \\ \begin{cases} \xi(t+1) = A_i \xi(t) + B_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_i \xi(t) \end{cases} \quad (6)$$

其中, $i = 1, \cdots, r$, $\mathbf{y}(t)$ 是一维输出变量,即当前粒子位置 $\mathbf{x}(t)$. $\mathbf{z}(t) = [f_1(\mathbf{x}(t)), \cdots, f_{\Psi}(\mathbf{x}(t))]$ 为各粒子的适应度函数组成的向量. A_i 、 B_i 和 C_i 分别是局部线性模型的状态矩阵、输入矩阵和输出矩阵. $M_{ij}(z_j(t))$ 、 Ψ 和 r 与 2.1 中的定义相同,给定 $(\xi(t), \mathbf{u}(t))$,由式(6)可得 $\xi(t+1)$ 为

$$\xi(t+1) = \sum_{i=1}^r w_i(\mathbf{x}(t)) [A_i \xi(t) + B_i \mathbf{u}(t)] \quad (7)$$

在粒子群优化过程中,群体最优粒子位置、当前粒子历史最优位置与当前粒子位置之差分别表示当前粒子向群体最优粒子位置和当前粒子最优位置运动的增量,再对该两个增量进行随机化(即各增量分别乘以在区间 $[0, 1]$ 上服从一定分布的随机数),通过加速度系数调整其在运动中的权重,最后将此二增量的随机加权用于控制当前粒子的速度,从而决定当前粒子在下一时刻的位置.所以本文将当前粒子位置与二最优位置的增量运动的随机加权和(即 $\varphi_l(t)(p_l - \mathbf{x}(t)) + \varphi_g(t)(p_g - \mathbf{x}(t)) = \varphi(t)(p - C\xi(t))$)的反方向运动作为每一个局部线性子系统的状态反馈控制,即

$$\text{If } f_1(\mathbf{x}(t)) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \cdots \text{ and } f_{\Psi}(\mathbf{x}(t)) \text{ is } M_{i\Psi}, \text{ Then} \\ \mathbf{u}(t) = -\varphi_j(t)(p_j - C_j \xi(t)) \quad (8)$$

其中 $\varphi_j(t) = \varphi_l^j(t) + \varphi_g^j(t)$ 为控制系数, $j = 1, \cdots, r$.

由式(5)得 $\mathbf{y}(t) = C_j \xi(t)$ 并将其代入式(8)得整个模型的状态反馈控制为

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{j=1}^r \omega_j(t) \varphi_j(p_j - C_j \xi(t)) \quad (9)$$

将式(9)代入式(7),得基于 T-S 模糊粒子群优化模型闭环系统为

$$\begin{aligned} \xi(t+1) &= \sum_{i=1}^r \omega_i(t) [A_i \xi(t) + B_i \mathbf{u}(t)] \\ &= \sum_{i=1}^r \omega_i(t) [A_i \xi(t) + \sum_{j=1}^r \omega_j(t) B_i \mathbf{u}(t)] \\ &= \sum_{i=1}^r \omega_i(t) [A_i \xi(t) + \sum_{j=1}^r \omega_j(t) B_i \sum_{j=1}^r \varphi_j(p_j - C_j \xi(t))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^r \omega_i(t) \sum_{j=1}^r \omega_j(t) [A_i \xi(t) - B_i \varphi_j(p_j - C_j \xi(t))] \\
&= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t) (A_i + B_i \varphi_j C_j) \xi(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t) B_i \varphi_j P_j
\end{aligned} \quad (10)$$

其中式(7)、式(9)和式(10)中 $\omega_i(t)$ 、 $\omega_j(t)$ 与式(3)中的定义相同。

4 T-S 模糊粒子群优化模型稳定性

T-S 模糊粒子群优化模型将粒子群优化的非线性、随机性与 T-S 框架进行有机的结合. 在有关 T-S 稳定性分析和粒子群稳定性研究的基础上, 本文将从状态矩阵、输入矩阵和输出矩阵的特征值关系, 探讨本文提出新模型的渐进稳定性.

4.1 无驱动 T-S 模糊粒子群优化模型稳定性

当粒子群优化“停滞”时, 即 $x(t) = p$ 或 $v(t) = 0$, 此时 $u(t) = 0$, 则式(10)变为无驱动的 T-S 模糊粒子群优化模型, 或称为线性时不变系统, 如式(11).

$$\xi(t+1) = \sum_{i=1}^r w_i(x(t)) A_i \xi(t) \quad (11)$$

定理 1 对于 T-S 模糊粒子群优化模型, 当粒子群优化“停滞”时, 如果其每个子系统矩阵的特征值满足

$$|\lambda(A_i)| < 1, i = 1, \dots, r$$

则 T-S 模糊粒子群优化模型渐进稳定.

证明 由于 A_i 可转化为 $\begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} \end{pmatrix}$ 且 $|\lambda(A_i)| < 1$, 即存在非奇异矩阵 M_i 和 N_i , 使得 $M_i A_i N_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, r$, 其中 $|\lambda_{i1}| < 1$, $|\lambda_{i2}| < 1$. 于是得到

$$\begin{aligned}
&M_r \cdots M_2 M_1 (A_1 A_2 \cdots A_r) N_1 N_2 \cdots N_r \\
&= (M_1 A_1 N_1) \cdot (M_2 A_2 N_2) \cdots (M_r A_r N_r) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{21} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_{r1} & 0 \\ 0 & \lambda_{r2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_{11} \lambda_{21} \cdots \lambda_{r1} & 0 \\ 0 & \lambda_{12} \lambda_{22} \cdots \lambda_{r2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (12)$$

由于 $|\lambda_{i1}| < 1$, $|\lambda_{i2}| < 1$, $i = 1, \dots, r$, 则 $|\lambda_{11} \lambda_{21} \cdots \lambda_{r1}| < 1$, $|\lambda_{12} \lambda_{22} \cdots \lambda_{r2}| < 1$, 从而得到 $|\lambda(A_1 A_2 \cdots A_r)| < 1$.

通过文献[10]中的引理 1、2, 则证明结论.

4.2 有驱动 T-S 模糊粒子群优化模型稳定性

当粒子群优化不断改进粒子性能时, 即 $x(t) \neq p$ 或 $v(t) \neq 0$, 此时 $u(t) \neq 0$, 则式(10)变为有驱动 T-S 模糊粒子群优化模型, 或称为带非线性反馈的线性时不

变系统. 为简化符号, 记 $G_{ij} = \frac{H_{ij} + H_{ji}}{2}$, $H_{ij} = A_i + B_i \varphi_j C_j$, $\lambda_{ij} = \lambda_{\max}(G_{ij}^T P G_{ij} - P)$, $q = \max\{w_i(t) : w_i(t) \neq 0, i = 1, \dots, r\}$.

定理 2 对于 T-S 模糊粒子群优化模型, 当粒子群优化不断改进粒子性能时, 即 $u(t) \neq 0$, 如果存在一个矩阵 P 和 φ_j 满足

$$\lambda_{ii} < 0, i = 1, \dots, r, \lambda_{ij} < \frac{\sqrt{\lambda_{ii} \lambda_{jj}}}{q-1}, 1 \leq i < j \leq r,$$

$$\omega_i(t) \cdot \omega_j(t) \neq 0,$$

则 T-S 模糊粒子群优化模型渐进稳定.

证明 记 $\chi = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t) B_i \varphi_j P_j$. 在 T-S 模糊框架下, 其各子系统的权重及控制是确定的, 即对于 $\omega_i(t)$, $\omega_j(t)$, $i, j = 1, \dots, r$, 分别为不同的定值, 即

$$\omega_i(t), \omega_j(t), \varphi_j = \text{const}, i, j = 1, \dots, r.$$

针对 T-S 模糊粒子群优化模型的每个粒子群子系统, 粒子历史最优解 P_l 、群体最优解 P_g 及认知部分和社会部分的权重 $\varphi_l(t)$ 和 $\varphi_g(t)$ 都为定值, 从而 $p = \frac{\varphi_l(t) \cdot P_l + \varphi_g(t) \cdot P_g}{\varphi_l(t) + \varphi_g(t)}$ 也是定值, 即

$$p_j = \text{const}, j = 1, \dots, r.$$

由于 $B_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 且 $\varphi_j \in U[0, c_1 + c_2]$, 则

$$\chi = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t) B_i \varphi_j P_j \in U[0, |\chi|],$$

其中 $|\chi| = \sup\{\chi\}$.

所以 $E[\chi] = 1/2 |\chi|$, $\text{Var}[\chi] = 0$. 从而在考察 T-S 模糊粒子群优化模型稳定性时可忽略 χ , 只需考查

$$\xi(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(t) \omega_j(t) (A_i + B_i \varphi_j C_j) \xi(t) \quad (13)$$

对式(13), 按通常做法^[10]记 $V(\xi(t)) = \xi^T(t) P \xi(t)$, 则 $\Delta V(\xi(t))$

$$\begin{aligned}
&= V(\xi(t+1)) - V(\xi(t)) \\
&= \sum_{i,j,s,t} w_i w_j w_s w_t \xi^T(t) H_{ij}^T P H_{st} \xi(t) - \xi^T(t) P \xi(t) \\
&\leq \sum_{i,j} w_i w_j \xi^T(t) G_{ij}^T P G_{ij} \xi(t) - \xi^T(t) P \xi(t) \\
&= \sum_{i,j} w_i w_j \xi^T(t) G_{ij}^T P G_{ij} \xi(t) - \sum_{i,j} w_i w_j \xi^T(t) P \xi(t) \\
&\leq \sum_i w_i^2 (H_{ii}^T P H_{ii} - P) |\xi(t)|^2 \\
&\quad + \sum_{i < j} 2 w_i w_j (G_{ij}^T P G_{ij} - P) |\xi(t)|^2 \\
&= \frac{1}{q-1} \sum_i (q-1) w_i^2 \lambda_{ii} |\xi(t)|^2 + \sum_{i < j} 2 w_i w_j \lambda_{ij} |\xi(t)|^2 \\
&\leq \sum_{i < j} 2 w_i w_j (\lambda_{ij} - \frac{\sqrt{\lambda_{ii} \lambda_{jj}}}{q-1}) |\xi(t)|^2
\end{aligned}$$

由于粒子群优化的问题空间是有界的, 即存在一

个有界常量 M 满足 $|\xi(t)|^2 \leq M$ 所以再根据已知条件 $\lambda_{ij} < \frac{\sqrt{\lambda_{ii}\lambda_{jj}}}{q-1}$, 对 $|\xi(t)|^2 \neq 0$, 则 $\Delta V(\xi(t)) < 0$ 成立, 从而 T-S 模糊粒子群优化模型渐进稳定。

5 结束语

本文结合 T-S 模糊系统的稳定性和粒子群优化的研究成果, 首先将速度和位置迭代公式变换为一个带时变非线性反馈的线性时不变系统, 并将粒子认知和社会部分随机加权求和的反向运动嵌入 T-S 模糊框架, 从而得到了 T-S 模糊粒子群优化模型。在粒子群优化问题空间是一维有界的前提下, 从系统矩阵特征值的角度, 根据 T-S 稳定性理论和非线性随机系统的 Lyapunov 稳定性理论, 分别对无驱动 T-S 模糊粒子群模型和有驱动 T-S 模糊粒子群模型进行了稳定性分析。

参考文献

- [1] Yuhui Shi, Russell C Eberhart. Fuzzy adaptive particle swarm optimization[A]. IEEE International Conference on Evolutionary Computation[C]. Seoul: IEEE Press, 2001. 101 – 106.
- [2] Hongbo Liu, Ajith Abraham, Weishi Zhang. A fuzzy adaptive turbulent particle swarm optimization[J]. International Journal of Innovative Computing and Applications, 2007, 1(1): 39 – 47.
- [3] Wenping Chang, Xianjue Luo, Hai Yu. A fuzzy adaptive particle swarm optimization for long-term optimal scheduling of cascaded hydropower station[A]. IEEE PES Power Systems Conference and Exposition[C]. Seattle: IEEE Press, 2009. 1 – 5.
- [4] Xuelei Meng, Limin Jia. A new kind of PSO – convergent fuzzy particle swarm optimization and performance analysis [A]. Fourth International Conference on Networked Computing and Advanced Information Management [C]. Gyeongju: IEEE CS, 2008. 102 – 107.
- [5] 吕振肃, 侯志荣. 自适应变异的粒子群优化算法[J]. 电子学报, 2004, 32(3): 416 – 420.
LU Zhen-su, HOU Zhi-rong. Particle swarm optimization with adaptive mutation[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(3): 416 – 420. (in Chinese)
- [6] 张长胜, 孙吉贵, 等. 一种自适应离散粒子群算法及其应

用研究[J]. 电子学报, 2009, 37(2): 299 – 304.

ZHANG Chang-sheng, SUN Ji-gui, OUYANG Dan-tong. A self-adaptive discrete particle swarm optimization algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(2): 299 – 304. (in Chinese)

- [7] 李娟, 饶妮妮, 等. 一种新型多步式位置可选择更新粒子群优化算法[J]. 电子学报, 2010, 38(1): 222 – 227.
LI Juan, RAO Ni-ni, et al. Mobility model based on the improved-PSO algorithm for ad hoc network[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(1): 222 – 227. (in Chinese)
- [8] 许相莉, 张利彪, 等. 基于粒子群的图像检索相关反馈算法[J]. 电子学报, 2010, 38(8): 1935 – 1940.
XU Xiang-li, ZHANG Li-biao, et al. Image retrieval relevance feedback algorithm based on particle swarm optimization[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(8): 1935 – 1940. (in Chinese)
- [9] Visakan Kadirkamanathan, Kirusnapillai Selvarajah, Peter J Fleming. Stability analysis of the particle dynamics in particle swarm optimizer[J]. IEEE Transaction on Evolution Computation, 2006, 10(3): 245 – 255.
- [10] Kunping Zhu, Heiner Gonska. Eigenvalue constraints for the stability of T-S fuzzy models [A]. 2008 American Control Conference[C]. Seattle: Taylor & Francis, 2008. 87 – 88.

作者简介



冯纪强 男, 1979 年 9 月出生于山东省平邑县. 深圳大学博士研究生, 研究方向为智能信息处理.

E-mail: mathlove@126.com



谢维信 男, 深圳大学教授、博士生导师, 深圳大学 ATR 国防科技重点实验室主任, 主要从事智能信息处理、信号和图像处理、模糊信息处理等方面的研究.