基于指数遗忘分布的瞬时频率估计算法

李 滔, 杨绍全, 汤建龙
(西安电子科技大学电子工程学院, 陕西西安 710071)

摘 要: 本文提出了基于指数遗忘分布的信号瞬时频率估计算法. 与其他的时频分布算法相比, 通过采用单边指数分析窗口, 指数遗忘分布可以在时频分析中引入迭代算法从而大大提高计算效率, 本文对这一算法的性能进行了理论分析, 同时其有效性在相应的仿真试验中得到了证明.

关键词: 瞬时频率; 单边指数窗口; 迭代运算
中图分类号: TN971.+1; TN957.52 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2004) 12-2082-04

Instantaneous Frequency Estimation Using Exponentially Forgetting Transform

LI Tao, YANG Shao-quan, TANG Jian-long
(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: The idea of instantaneous frequency estimation using exponentially forgetting transform is discussed. Compared with other forms of time-frequency distribution, the application of single-sided exponential window makes it possible the iterative computation which greatly increases the computation efficiency. The theoretical analysis of the performance of this algorithm is given and its effectiveness is demonstrated by the corresponding simulation as well.

Key words: instantaneous frequency estimation; single-sided exponential window; iterative computation

1 引言

瞬时频率估计研究信号频谱分量峰值的时间分布, 对比传统傅立叶频率分析方法, 能够更为准确地反映出非平稳信号的时变本质. 瞬时频率对信号的频率描述具体到特定时间, 这一点与时频分析有着内在的联系, 也导致了基于时频分布的瞬时频率检测方法的出现.

文献[1, 2]对 WVD 频率估计器的性能进行了分析. 当信号的相位函数可用阶次不大于 2 的多项式表示时, Wigner 变换可使信号的能量沿瞬时频率集中, 此时 Wigner 分布的峰值检测方法可得到瞬时频率的无偏估计. 但这一要求过于苛刻, 现实中大多数信号不满足这一条件. 此时信号瞬时频率估计将不再无偏, 估计的误差取决于信号的真实相位与线性相位假设的差异程度, 与信噪比这两个因素.

分析表明利用 Wigner 分布的瞬时频率估计的偏差和方差与噪声的功率和计算窗口宽度这两个因素之间存在明确的关系: 采用较宽计算窗口时瞬时频率估计的方差减小, 而估计的偏差增大; 当窗口的宽度减小时情况则相反; 因此有可能在瞬时频率估计的偏差与方差之间得到折衷, 找到最佳的窗口宽度. 窗口宽度的判断是一个假设检验问题. 文献[3~5]对此问题进行了讨论. 这种方法的利用了多个窗口分别进行时频分布计算, 对不同窗口下的瞬时频率估计的偏差与方差分布进行判断, 其计算较为繁琐.

文献[6]讨论了利用互 Wigner 分布形式进行瞬时频率估计的方法. 通过迭代运算来构造一个频率分布与待测信号的频率不断逼近的参考信号, 进行瞬时频率估计, 该方法受信噪比变化的影响较小, 但主要缺点在于需要重复的进行耗费大量时间的时频分布计算, 同时瞬时频率的估计也是有偏的. 目前常用的方法还包括基于短时傅立叶变换的瞬时频率检测, 文献[7, 8]对此有专门的论述.

利用时频分布的瞬时频率估计算法得到了广泛的研究, 在文献[9~12]中, 论述了信号的瞬时频率与时频分布的关系, 并对各种算法进行了比较. 目前利用时频分布的瞬时频率估计算法的主要研究方向集中在提高时频分布的计算效率, 改善瞬时频率估计精度上面. 本文提出了基于指数遗忘分布的瞬时频率估计方法, 分析证明该方法与其他时频分析方法相比具有很高的计算效率. 文中对该算法的估计性能进行了分析并给出相应的仿真结果.

2 指数遗忘分布

2.1 信号假设

假设实的调频信号为:

$$x(t) = a(t)\cos[\varphi(t)] \tag{1}$$

其中 $a(t)$ 为信号的包络, $\varphi(t)$ 为信号的相位函数. 当满

收稿日期: 2003-08-20; 修回日期: 2004-06-30
基金项目: 国防预研项目(No. 41101030103)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

足 Bedrosian 定理时[11], 可以通过希尔伯特变换, 获得该信号的复数形式:

$$s(t) = x(t) + j\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t-S)}{PS}dS = a(t)e^{j\varphi(t)} \tag{2}$$

此时该信号的瞬时频率定义为:

$$f_i(t) = \frac{1}{2P}\frac{d\varphi(t)}{dt} \tag{3}$$

2.2 指数遗忘分布

常用的短时傅立叶变换对信号待分析时间点 t 附近的邻域进行采样和频率分析, 从而得到信号的时频分布. 当采用单边指数窗口时, 时域窗口是非对称的, 并仅对 t 时刻以前的信号进行采样. 越靠近时刻 t 的信号值相应的也会获得的更大的加权, 加权值与该点到时间 t 的距离呈负指数关系. 因此可以认为单边指数窗口使得对信号的历史以指数规律/ 遗忘0, 所以称为: 指数遗忘分布(EFT: Exponentially Forgetting Trans2form).

指数遗忘分布计算公式为:

$$X(t, X) = \int_{-\infty}^{t} x(S)e^{K(S-t)}e^{-jXS}dS \tag{4}$$

这里 $h(t) = e^{Kt}u(-t)$ 是单边指数窗口, $K > 0$, K 决定单边指数窗口的衰减速度, 称为遗忘系数.

指数遗忘分布是可逆的分布, 从式(4) 可得到:

$$\frac{\partial X(t, X_0)}{\partial t} = -KX + \int_{-\infty}^{t} x(S)e^{-jXS}dS + x(t)e^{-jX_0 t}$$

因此可以得到指数遗忘分布的反变换公式:

$$x(t) = \left[\frac{\partial X(t, X_0)}{\partial t} + KX(t, X_0)\right]e^{jX_0 t} \tag{5}$$

指数遗忘分布的离散形式的计算公式:

$$X_{n, X} = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)e^{K(m-n)}e^{jXm} \tag{6}$$

根据式(7) 有如下的结论:

$$\begin{aligned} X_{n+1, X} &= \sum_{m=-\infty}^{n+1} x(m)e^{K(m-n-1)}e^{-jXm} \\ &= e^{-K}\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)e^{K(m-n)}e^{-jXm} + x_{n+1}e^{-j(n+1)X} \\ &= e^{-K}X_{n, X} + x_{n+1}e^{-j(n+1)X} \end{aligned} \tag{7}$$

公式(7) 说明: 指数遗忘分布计算时, 信号在某个时间点上的时频分布可利用在该点信号值与前一个时间点上时频分布的线性组合来获得, 因此在不同时间点上的时频分布之间存在确定的递推关系, 这将有利于迭代运算的实现.

在通常时频分析计算中, 当窗口在时间轴上滑动一个单位时, 需要对信号进行重新加权, 并作 FFT 运算, 不同时刻的时频分布之间没有明确关系. 如假设频率点数为 N($N = 2^k$, k 为整数) . 指数遗忘分布在每一个时间点上, 需要进行 2N 次复数乘和N 次复数加法运算. 与短时傅立叶变换作比较, 当计算窗口的宽度为 h 时, 窗口的加权运算需要 h 次复数乘, 而为了采用按时间抽取的快速傅立叶算法, 复数乘法与复数加法的次数都等于 $N\log_2 N$. 采用指数遗忘分布在每个时间点上, 比短时傅立叶变换少进行 $N(\log_2 N - 2) + h$ 次复数乘, 和 $N(\log_2 N - 1)$ 次的复数加, 所以指数遗忘分布更适用于数据较长和要求实时处理的场合.

3　利用指数遗忘分布峰值提取的信号瞬时频率估计

在实际应用场合, 信号幅度通常可以认为是恒定的, 本文中也考虑这一情况:

$$s(t) = Ae^{j\varphi(t)} \tag{8}$$

当指数遗忘分布的遗忘系数 K 确定后, 可以得到下面的信号时频分布:

$$\begin{aligned} X(t, X; K) &= \int_{-\infty}^{t} Ae^{j\varphi(t)}e^{K(S-t)}e^{-jXS}dS \\ &= Ae^{-Kt}\frac{e^{[K+j(\varphi(S)-XS)]}}{K+j[\varphi(S)-X]}\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{Ae^{j[\varphi(t)-Xt]}}{K+j[\varphi(S)-X]} \end{aligned} \tag{9}$$

因为上面的计算结果为复数, 所以取其模值的平方:

$$|X(t, X; K)|^2 = \frac{A^2}{K^2 + [\varphi(t)-X]^2} \tag{10}$$

可以看到所得到的时频分布在 $\varphi(t) = X(t)$ 处达到极大值, 其值为 A^2/K^2, 而此时有 $X(t) = 2Pf_i(t)$, 说明利用指数遗忘分布的峰值检测可以获得信号的瞬时频率. 其计算公式如下:

$$\hat{f}_i(n) = \frac{f_s}{2N}\arg\max_X X(n, X) \tag{11}$$

$\hat{f}_i(n)$、f_s 分别为瞬时频率的估计值与信号的采样频率.

4　基于指数遗忘分布的瞬时频率检测的性能分析

通常认为在信号的频率随时间变化的时候, 可以通过遗忘参数 K的选择, 使得在单边指数窗口内部的信号频率近似不变. 信号表示如下:

$$x(n) = s(n) + E(n) \tag{12}$$

其中 E(n) 是复的白噪声, $E(n) = E_x(n) + jE_y(n)$, $E_x(n)$、$E_y(n)$ 分别为噪声的实部与虚部, 且互不相关. 其统计特性为:

$$E[E_x(n)] = E[E_y(n)] = 0 \tag{13}$$

$$\mathrm{Var}[E_x(n)] = \mathrm{Var}[E_y(n)] = \frac{R^2}{2} \tag{14}$$

此时信号指数遗忘分布的模值平方为:

$$\begin{aligned} |X(t, X; K)|^2 &= \sum_{k_1=-\infty}^{n}\sum_{k_2=-\infty}^{n}[s(k_1) + E(k_1)][s^*(k_2) \\ &\quad + E^*(k_2)]e^{K(k_1+k_2-2n)}e^{-jX(k_1-k_2)} \\ &= Y_1(t, X; K) + Y_2(t, X; K) \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $Y_1(t, X; K)$、$Y_2(t, X; K)$ 分别有如下的形式:

$$Y_1(t, X; K) = \sum_{k_1=-\infty}^{n}\sum_{k_2=-\infty}^{n} s(k_1)s^*(k_2)e^{K(k_1+k_2-2n)}e^{-jX(k_1-k_2)} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} Y_2(t, X; K) = \sum_{k_1=-\infty}^{n}\sum_{k_2=-\infty}^{n}&[s(k_1)E^*(k_2) + s(k_2)E^*(k_1) \\ &+ E(k_1)E^*(k_2)]e^{K(k_1+k_2-2n)}e^{-jX(k_1-k_2)} \end{aligned} \tag{17}$$

可以证明此时信号指数遗忘分布的模值平方的数学期望为:

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$E[|X(t,X;K)|^2]=\sum_{k_1=-\infty}^{n}\sum_{k_2=-\infty}^{n}s(k_1)\cdot s^*(k_2)\cdot e^{K(k_1+k_2-2n)}\cdot e^{-j\Omega(k_1-k_2)}+\frac{R^2}{2K} \tag{18}$$

从上面的计算结果可以得到在信号的瞬时频率分布处的指数遗忘分布的信噪比为:

$$SNR=\frac{2A^2}{KR^2}$$

因此通过指数遗忘可以得到的信噪比改善系数为: 2/ K, 由于计算中有 0< K< 1 所以信噪比得到增强.

考虑加性白噪声对利用指数遗忘分布的瞬时频率估计性能的影响: 当信噪比较高时候可认为, 噪声的影响使得信号的瞬时频率估计值是一个围绕真值波动的随机变量, 而瞬时频率的估计可以看作对指数遗忘分布的频谱极大值点的检测问题. 在这些极大值点处有:

$$\left.\frac{\partial|X(n,\Omega)|^2}{\partial\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i}=0 \tag{19}$$

利用上式, 对信号的指数遗忘分布在瞬时频率附近进行泰勒多项式展开:

$$\left.\frac{\partial|X(n,\Omega)|^2}{\partial\Omega}\right|_{\Omega=\Omega}=\left.\frac{\partial|Y_1(n,\Omega)|^2}{\partial\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i}+\Delta\Omega\cdot\left.\frac{\partial^2|Y_1(n,\Omega)|^2}{\partial^2\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i}+\left.\frac{\partial|Y_2(n,\Omega)|^2}{\partial\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i} \tag{20}$$

其中式(20) 中的第一项为 $Y_1(n,\Omega)$ 在瞬时频率真值位置的频率微分, $\Delta\Omega$ 为瞬时频率估计误差, $\Delta\Omega=\Omega_i-\Omega_i$, 第三项代表对 $Y_2(n,\Omega)$ 在瞬时频率估计值处的频率微分.

可以证明式(19) 中的第一项为 0, 因此瞬时频率的估计误差可以表示为:

$$\Delta\Omega=\left.\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i}\Big/\left.\frac{\partial^2\{Y_1(n,\Omega)\}}{\partial^2\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i} \tag{21}$$

对上式中的各项进行分析可以得到:

$$\left.\frac{\partial^2\{Y_1(n,\Omega)\}}{\partial^2\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i}=\sum_{k_1=-\infty}^{n}\sum_{k_2=-\infty}^{n}s(k_1)\cdot s^*(k_2)\cdot[-(k_1-k_2)]\cdot e^{K(k_1+k_2-2n)}\cdot e^{-j\Omega(k_1-k_2)}\Big|_{\Omega=\Omega_i} \tag{22}$$

经过计算可以得到:

$$\left.\frac{\partial^2\{Y_1(n,\Omega)\}}{\partial^2\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_i}=\frac{-2A^2}{K^2} \tag{23}$$

所以瞬时频率估计偏差的期望为:

$$E[|\Delta\Omega|^2]=\left(\frac{K^2}{-2A^2}\right)^2E\left[\left(\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right)\cdot\left(\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right)\right]_{\Omega=\Omega_i} \tag{24}$$

$$\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}=\sum_{k_1=-\infty}^{n}\sum_{k_2=-\infty}^{n}[s(k_1)\cdot E^*(k_2)+s(k_2)E^*(k_1)+E(k_1)E^*(k_2)]\cdot[-j(k_1-k_2)]\cdot e^{K(k_1+k_2-2n)}\cdot e^{-j\Omega(k_1-k_2)} \tag{25}$$

可以证明 $E\left[\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right]=0$. 因此有 $E[\Delta\Omega]=0$.

考虑瞬时频率估计的方差.

$$Var[\Delta\Omega]=E\{|\Delta\Omega|^2\}-E^2[\Delta\Omega]=E\{|\Delta\Omega|^2\}$$

$$E[|\Delta\Omega|^2]=\left(\frac{(1-e^{-K})^4}{2A^2e^{3K}}\right)^2E\left[\left(\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right)\cdot\left(\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right)\right]\Big|_{\Omega=\Omega_i} \tag{26}$$

通过计算:

$$E\left[\left(\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right)\cdot\left(\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right)\right]\Big|_{\Omega=\Omega_i}$$

$$=\sum_{k_1=-\infty}^{n}\sum_{k_2=-\infty}^{n}\sum_{k_3=-\infty}^{n}\sum_{k_4=-\infty}^{n}[s(k_1)E^*(k_2)+s(k_2)E^*(k_1)+E(k_1)E^*(k_2)][s^*(k_3)E(k_4)+s^*(k_4)E(k_3)+E^*(k_3)E(k_4)]\cdot(k_1-k_2)(k_3-k_4)\cdot e^{K(k_1+k_2+k_3+k_4-4n)}\cdot e^{-j\Omega(k_1-k_2-k_3+k_4)}\Big|_{\Omega=\Omega_i} \tag{27}$$

对式(27) 化简后可以得到:

$$E\left[\left(\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right)\cdot\left(\frac{\partial\{Y_2(n,\Omega)\}}{\partial\Omega}\right)\right]_{\Omega=\Omega_i}=\frac{5\cdot A^2R^2}{2K} \tag{28}$$

代入式(26), 可以得到信号的瞬时频率估计的方差为:

$$Var[\Delta\Omega]=\frac{5R^2K^3}{(2\pi)^2\cdot A^2}=\frac{5K^3}{\pi(2\pi)^2SNR} \tag{29}$$

5 仿真结果

在仿真试验中分别采用指数遗忘分布与伪 Wigner 分布对频率阶跃信号进行瞬时频率检测. 图 1 的虚线部分表示利用指数遗忘分布的频率检测结果, 实线表示伪 Wigner 分布的检测结果. 可以看到: 与伪 Wigner 分布方法相比, 指数遗忘分布能够更准确地定位频率的跳变位置, 且没有如图 1 中伪 Wigner 分布在频率跳变处的过渡. 图中数据长度为 256 点, 信噪比 10dB, 遗忘系数 K= 0.1, Wigner 分布采用 hamming 窗, 长度为 37.

利用指数遗忘分布进行正弦调频信号瞬时频率估计, 信噪比为 15dB, 遗忘系数. 图 2 表示了相应的检测结果, 图中实线表示瞬时频率的真值, 虚线代表瞬时频率的估计值, 为比较频率估计的结果, 将估计值与真值错开表示.

图 3 表示了利用指数遗忘分布的瞬时频率估计的方差与信噪比的关系的仿真结果, 横坐标表示信噪比, 单位为 dB, 纵坐标表示瞬时频率估计方差的对数, 三条曲线从上至下分别表示遗忘系数 K= 0.4、K= 0.3、K= 0.2 时的瞬时频率的估计方差随信噪比的变化情况. 该结果与理论分析一致. 即在信噪

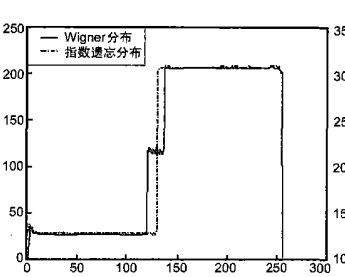


图 1 频率跳变信号的瞬时频率估计

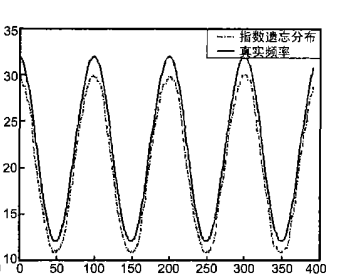


图 2 正弦调频信号的瞬时频率估计

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

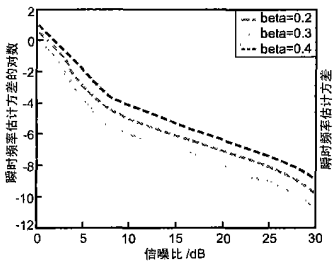


图 3　利用 EFT 的信号瞬时频率估计方差与信噪比的关系

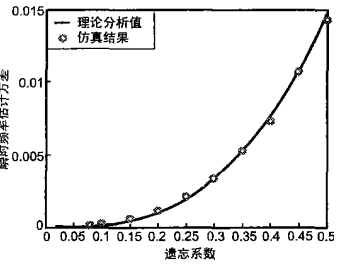


图 4　利用 EFT 的信号瞬时频率估计方差与遗忘系数关系

比相同的时候, 频率估计的方差与遗忘系数之间有固定的关系. 具体在仿真试验结果中: 遗忘系数为 K= 0. 3 时与 K= 0. 2 时相比, 在信噪比大于 7dB 的情况下前者的频率估计方差, 大约是后者的 3. 34 倍, 而当遗忘系数 K= 0. 4 与 K= 0. 2 时相比, 前者的方差大约为后者的 7. 976 倍, 同时方差的对数与信噪比近似为线性关系, 这个结果与理论分析是一致的.

图 4 所示的仿真试验对在信噪比为 10dB 的情况下, 利用不同遗忘系数的信号瞬时频率估计方差的分布情况进行了统计, 图中实线代表式(29)的理论分析结果, 而圆圈表示仿真试验的计算结果.

6　结论

指数遗忘分布是短时傅立叶变换一种特殊形式, 通过对单边指数窗口内部的信号取样进行频率分析来实现时间2频率联合表示. 采用单边指数窗口后, 可在时频分析中利用迭代运算, 因此与其他时频分析方法相比具有更高的计算效率, 更适用于数据较长和要求实时处理的场合. 在指数遗忘分布中时频分辨率的调节可以通过改变遗忘系数来实现. 在文章中对瞬时频率检测性能进行了分析, 同时方法的有效性在仿真结果得到了验证.

参考文献:

[1] P Rao, F J Taylor. Estimation of Instantaneous frequency using the discrete wigner distribution[J]. IEEE Electronics letter, 1990, 26(4): 246 - 248.

[2] 孙圣和, 吴岩巍. WVD 瞬时频率估计无偏估计研究[J]. 电子学报, 1996, 24(9): 102- 105.

[3] Vladimir Katovnik, L Stankovic. Instantaneous frequency estimation using the wigner distribution with varying and data2driven window length [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(9): 2315- 2325.

[4] L Stankovic, V Katkovic. Algorithm for the instantaneous frequency estimation using time2frequency distributions with adaptive window width[J]. IEEE Signal Processing letters, 1998, 5(9): 224- 227.

[5] L Stankovic, Igor Djurovic. Instantaneous frequency estimation by using the wigner distribution and linear interpolation[J]. Signal Processing, 2003, 83(3): 483- 491.

[6] Boualem Boashash, Peter O. shea. Use of the cross wigner2ville distribution for estimation of instantaneous frequency[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(3): 1439- 1445.

[7] Kwok H K, Jones D L. Improved instantaneous frequency estimation using an adaptive short2time Fourier transform[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000. 2964- 2972.

[8] Kwok H K C, Jones D L. Instantaneous frequency estimation using an adaptive short2time Fourier transform[A]. Conference Record of the Twenty2Ninth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers[C]. Urbana USA: Coordinated Sci Lab, 1996, 1(1): 543- 547.

[9] Lunji Qu, Kot A C, Soon Hwa Lum. Comparative study of some discrete instantaneous frequency estimators [A]. International Conference on Information Engineering[C]. Singapore: IEEE, 1995. 608- 612.

[10] Brian C Lovell, Robert C Williamson. The relationship between instantaneous frequency and time2frequency representations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(3): 1458- 1461.

[11] Boualem Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 80(4): 520- 568.

[12] Kay S. Statistically/ computationally efficient frequency estimation[J]. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988, ICASSP288, 4: 2292- 2295.

作者简介:



李　滔　男, 1971 年生于陕西省西安市, 现为西安电子科技大学博士研究生, 主要研究方向为阵列信号处理及时频分析.



杨绍全　男, 1938 年出生于浙江省台州市, 西安电子科技大学博士生导师, 主要研究方向为阵列信号处理及电子对抗技术.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net