

# 任意截面形状介质填充波导高次模求解的快速边缘元算法

彭 朕<sup>1,2,3</sup>, 盛新庆<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院电子学研究所微波成像技术国家重点实验室, 北京 100080;  
2. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081; 3. 中国科学院研究生院, 北京 100039)

**摘要:** 本文提出了一种精确求解任意截面形状介质填充波导高次模的快速边缘元算法. 数值实验表明: 与以往算法相比, 此算法所用内存巨幅减小, 计算效率极大提高. 具体数值研究了波导高次模求解精度和剖分疏密的关系. 本文还计算了矩形空波导、条状介质填充波导、以及方块介质填充波导的本征模, 与解析解或公布结果比较, 证实本算法计算精度极高且不含伪解. 最后本文还用开发的程序具体研究了内壁涂层波导的本征模.

**关键词:** 快速算法; 高次模; 边缘元; 介质填充波导

中图分类号: O441 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2005)12-2149-04

## Fast Algorithm of Edge Element for the High-Order Modes in Dielectric-Loaded Waveguides with Arbitrarily Transverse Cross Sections

PENG Zhen<sup>1,2,3</sup>, SHENG Xinqing<sup>1,2</sup>

(1. National Key Laboratory of Microwave Imaging Technology, Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;  
2. Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;  
3. Graduate University, Chinese Academy of Science, Beijing 100039, China)

**Abstract:** A fast algorithm of edge element is presented for the computation of the high order modes in dielectric loaded waveguides with arbitrarily transverse cross sections. Numerical examples show that this algorithm requires greatly less memory and has significantly higher efficiency, compared with the previous algorithm. The relation between computation accuracy and division mesh is investigated numerically. The computations of propagation constants of the eigen modes in rectangle waveguides and various dielectric loaded waveguides demonstrate the high efficiency and accuracy of the proposed algorithm. At last, the eigen modes in the interior coated waveguide are investigated with the developed code based on our proposed algorithm.

**Key words:** fast algorithm; edge element; high order modes; dielectric loaded waveguide

### 1 引言

用边缘元方法求解介质填充波导本征模问题已有较长历史, 且计算方法已比较成熟<sup>[1-3]</sup>. 然而, 以往研究关注的只是主模、第一、第二高次模而已, 更高次模的计算很少涉及. 近年来, 波导不连续性问题的快速混合法分析<sup>[4]</sup>, 尤其是带有电大且深的腔结构飞行器散射的模匹配分析, 都需要准确求解波导的很高次模的本征值及本征函数. 而波导高次模的准确求解就需要剖分很密, 从而离散本征值方程未知数就很多, 事实表明以往算法在内存和计算效率上对这类问题都有很大困难, 难以胜任.

本文正是在这一背景下, 利用边缘元方法、稀疏矩阵存储技术, 稀疏矩阵快速多波前 LU 分解技术以及本征值方程的 F RAM (Implicitly Restarted Arnoldi Method) 算法, 提出了一种精

确求解任意截面形状介质填充波导高次模的快速边缘元算法. 本文首先给出求解介质填充波导高次模问题的边缘元离散方程, 然后详呈我们设计的快速求解算法, 最后给出数值实验及算例, 以证实此算法的高效、精确.

### 2 边缘元分析

众所周知, 介质填充波导本征模问题可等效为下列全电场矢量泛函的变分问题<sup>[5]</sup>:

$$\begin{cases} \delta F(\mathbf{e}) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$F(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \int \left\{ \beta^2 \left[ \frac{1}{\mu_r} (\mathbf{e}_+ \cdot \nabla \mathbf{e}_+) \cdot (\mathbf{e}_+ \cdot \nabla \mathbf{e}_+) - \epsilon_r k_0^2 \mathbf{e}_+^2 \right] + \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{e}_- \cdot \nabla \times \mathbf{e}_- - \epsilon_r k_0^2 \mathbf{e}_- \cdot \mathbf{e}_- \right\} dS \quad (2)$$

式中  $k_0, \beta$  分别表示自由空间以及波导本征模的传播常数,  $\epsilon_r$  为相对电介电常数,  $\mu_r$  为相对磁介电常数, 且有  $e_x = \beta E_x, e_y = \beta E_y, e_z = -jE_z$ . 很明显, 此泛函只涉及  $k_0, \beta$  的平方项, 因而离散可得由  $k_0$  确定  $\beta$  的广义本征值形式. 利用三角形边缘元基函数离散泛函可得

$$F(e) = \frac{1}{2} e_1^T A_{11} e_1 + \frac{1}{2} \beta^2 \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

对式(3)求变分, 可以得到数学上的标准的广义本征值方程

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = -\beta^2 \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

由于方程式(4)左边系数阵奇异, 因而有一系列本征值为 0 的简并本征矢量. 这些简并本征矢量是没有物理意义的. 为此, 将方程改写成

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \frac{\theta^2}{\theta^2 - \beta^2} \begin{bmatrix} B_{11} + \frac{1}{\theta^2} A_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

这里,  $\theta^2 = k_0^2 \epsilon_{\max} \mu_{\max}$ ,  $\epsilon_{\max}$  和  $\mu_{\max}$  分别是波导中填充介质的最大相对介电常数和磁导率. 方程式(5)按从大到小顺序的本征值对应的便是介质填充波导的从主模到高次模的顺序. 这对于求解和确定波导高次模式比较有利的. 将式(5)写成标准广义本征值方程形式

$$Ax = \lambda Bx \quad (6)$$

### 3 广义本征值求解的快速算法

由于方程式(6)中矩阵  $B$  非正定, 因此无法直接利用 RAM 快速算法求解. 为此, 我们首先利用稀疏矩阵多波前 LU 快速分解技术将  $B$  进行 LU 分解, 将广义本征值方程式(6)转化成一般隐式本征值方程, 再用 IRAM 快速算法求解. 为表达方便, 不妨设定矩阵的维数为  $m$ , 欲求模值最大的  $n$  个特征值, 那么具体算法便可表述为

(1) 使用稀疏矩阵快速 LU 分解技术<sup>[6]</sup>分解矩阵  $B$ , 原方程可转化为

$$Ax = \lambda Ux$$

$$U^{-1}L^{-1}Ax = \lambda x$$

(2) 进行 Arnoldi 分解<sup>[7]</sup>. 初始矢量  $v_1$ ,  $m$  为矩阵的维数

$$U^{-1}L^{-1}AV_m = V_m H_m + f_m B_m^T$$

其中  $H_m$  是  $m \times m$  维的上 Hessenberg 矩阵,  $V_m^H B_m = I_m$ .

(3) 使用以下方式计算矩阵和矢量相乘  $U^{-1}L^{-1}Av_1$

(a) 使用稀疏矩阵存储的矩阵  $A$  与初始矢量  $v_1$  相乘:

$$z = Av_1$$

(b) 计算前向回代  $z = L^{-1}z$

(c) 计算后向回代  $z = U^{-1}z$

(4) 计算矩阵  $H_m$  的  $m$  个特征值, 对这个特征值按从大到小进行排序, 划分为  $k$  个和  $m-k$  个. 若此  $k$  个特征值满足迭代终止条件, 则求解结束; 否则, 进行以下步骤.

(5) 使用移位 QR 迭代算法计算  $H_m Q_m = Q_m H_m^+ + Q_m$ ,  $Q_m$  为正交阵

(6) 进行 Arnoldi 分解  $U^{-1}L^{-1}AV_k^+ = V_k^+ H_k^+ + f_k^+ e_k^T$ , 其中  $V_k^+ = V_m Q_k$ ,  $H_k^+$  为  $H_m$  的  $k$  次主子矩阵.  $Q_k$  为  $m \times k$  维矩阵,

包含  $Q_m$  的前  $k$  列.

(7) 返回步骤 3 计算矩阵和矢量相乘.

本文第四部分将用具体数值实验及算例证明, 以上算法所用内存很少和计算效率极高. 对于求解波导模式, 尤其是高次模式, 是非常适用的算法.

$k$  步 Arnoldi 分解算法

Input:  $(A, v_1)$

Put  $v_1 = v / \|v\|$ ;  $w = Av_1$ ,  $a_1 = v_1^H w$

Put  $f_1 \leftarrow w - v_1 a_1$ ;  $V_1 = (v_1)$ ;  $H_1 \leftarrow (a_1)$ ;

For  $j = 1, 2, 3, \dots, k-1$

$\beta_j = \|f_j\|$ ;  $v_{j+1} \leftarrow f_j / \beta_j$ ;

$V_{j+1} \leftarrow (V_j, v_{j+1})$ ;  $H_j \leftarrow \begin{pmatrix} H_j \\ \beta_j e_j^T \end{pmatrix}$ ;

$w \leftarrow Av_{j+1}$ ;

$h \leftarrow V_{j+1}^H w$ ;  $f_{j+1} \leftarrow w - V_{j+1} h$ ;

$H_{j+1} \leftarrow \begin{pmatrix} H_j & h \\ h^H & h^H h \end{pmatrix}$

End For

## 4 计算实例与分析

基于上述算法基本原理, 我们利用文[5]中的按行索引的一维稀疏矩阵存储技术和文[6]中的多波前 LU 分解技术, 以及文[7]中的 IRAM 算法, 编写了一个通用的求解介质填充波导本征模的程序. 下面要用具体实例来验证此程序的精确、高效.

### 4.1 算法所用内存及计算效率

要准确求解波导高次模, 波导截面需剖分很密, 这样便带来方程未知数的快速增加. 因此, 算法的计算效率对波导高次模的准确求解起着重要的作用. 为证实本文算法的高效性, 本文使用文[3]中的常规算法和本文算法分别求解矩形波导的本征模. 所用内存和计算时间见表 1. 由表 1 可见, 与以往算法比, 本文算法所用内存极少, 所用时间极短. 本文计算结果都是在 Pentium 4, 1GHz CPU, 1GB Memory, IBM 台式机上进行.

表 1 本文算法和文[3]常规算法需要计算内存和计算时间的比较

波导剖分	未知数	本文算法		文[3]常规算法	
		算法使用内存/MB	算法计算时间/s	算法使用内存/MB	算法计算时间/s
20×20	1681	1.08	0.48	56	536
40×40	6561	6	1.48	超过 1000	
80×80	25921	26	4.03		
120×120	58081	64	15		
200×200	160801	202	63		

### 4.2 剖分次数与计算精度

如何选择剖分, 既能保证高次模计算精度, 又能提高计算效率, 是一个十分重要的问题. 本文以矩形波导为例研究了剖分选择和计算精度之间的关系. 大量计算表明, 如果矩形波导长边剖分  $M$  等分, 宽边剖分  $N$  等分, 那么为使矩形波导模式  $TE_{mn}$  和  $TH_{mn}$  导模传输常数的计算误差控制在 1%, 需要满足:

$$M \geq 8 \times m, \quad N \geq 8 \times n$$

例如, 欲求长  $4 \times \lambda$  宽  $2 \times \lambda$  矩形空波导  $TE_{43}$  模式的传输常数,

根据以上规律,长边和宽边分别剖分 32 和 24 等分最为合适.表 2 给出了不同剖分的计算结果,由表 2 可见确实  $M=32, N=24$  计算结果最好.为比较剖分次数的增加对计算精度的影响,仍以长  $4 \times \lambda$  宽  $2 \times \lambda$  矩形空波导为例,矩形波导宽边剖分 2 等分不变,长边剖分分别为 10, 20 和 40 等分.计算结果如表 3 所示.同样表明,计算结果与上述本征模计算精度和剖分关系规律基本相符.

表 2 矩形空波导 TE<sub>4,3</sub>模式传输常数计算值与解析值比较

解析值	$M=20, N=20$	$M=40, N=20$	$M=32, N=24$
2.720699	2.644095	2.706406	2.721804
误差%	2.815605	0.5253413	0.040608376

表 3 不同剖分下矩形波导模传输常数计算值的误差

模式	剖分			
	10×20 误差/%	20×20 误差/%	40×20 误差/%	60×20 误差/%
TE11	$3.33 \times 10^{-2}$	$6.76 \times 10^{-3}$	$8.69 \times 10^{-5}$	$4.19 \times 10^{-5}$
TE21	$4.10 \times 10^{-2}$	$1.21 \times 10^{-2}$	$4.90 \times 10^{-3}$	$4.65 \times 10^{-3}$
TE31	$2.26 \times 10^{-1}$	$5.00 \times 10^{-2}$	$7.70 \times 10^{-3}$	$5.39 \times 10^{-4}$
TE41	1.62	0.68	$3.55 \times 10^{-3}$	$3.22 \times 10^{-3}$
TE51	3.57	2.63	0.75	$3.56 \times 10^{-2}$
TE61	6.57	3.23	2.05	$1.50 \times 10^{-1}$
TE71	14	22	4.62	$6.00 \times 10^{-1}$

4.3 介质填充波导高次模传输常数

为进一步验证本文算法的精确和高效,下面计算不同形

表 6 不同厚度有耗涂层介质填充波导传输常数计算值

本征模式	空波导(解析值)	空波导(计算值剖分 160×80)	空波导(计算值剖分 40×20)	涂层( $t=0.5\lambda$ )
主模	3.135451	3.135446	3.135451	3.9618 1.7952i
第一高次模	3.116952	3.116952	3.116967	3.9617 1.7954i
第二高次模	3.116952	3.116948	3.116967	3.9551 1.7973i
第三高次模	3.110762	3.110762	3.110762	3.9543 1.7987i
第四高次模	3.110762	3.110749	3.110658	3.9520 1.7997i
第五高次模	3.092116	3.092115	3.092084	3.9509 1.8014i
第六高次模	3.092116	3.092110	3.091802	3.9354 1.8066i
第七高次模	3.085875	3.085886	3.085965	3.9346 1.8084i
第八高次模	3.060786	3.060777	3.060735	3.9201 1.8136i
第九高次模	3.060786	3.060735	3.060021	3.9177 1.8173i
第十高次模	3.041834	3.041834	3.042087	3.9099 1.8197i
第十一高次模	3.041834	3.041834	3.042087	3.9077 1.8231i
第十二高次模	3.035490	3.035498	3.035713	3.8777 1.8346i
第十三高次模	3.035490	3.035427	3.034412	3.8762 1.8367i
第十四高次模	3.016379	3.016379	3.016379	3.8522 1.8483i
第十五高次模	3.016379	3.016379	3.016379	3.8493 1.8513i
第十六高次模	3.016379	3.016279	3.014658	3.8350 1.8563i
第十七高次模	3.016379	3.016279	3.014658	3.8327 1.8586i
第十八高次模	2.984255	2.984255	2.984883	3.7854 1.8808i
第十九高次模	2.984255	2.984255	2.983938	3.7842 1.8814i

式介质填充波导的本征模.首先计算条形介质填充波导,如图 1 所示.由表 4 可见,计算值与解析值吻合得很好.而且计算结果中无伪解.然后计算有耗块状介质填充波导的本征模,如

表 4 条形介质填充波导传输常数计算值

本征模	解析值	计算值	误差(%)
主模	2.51335	2.51409	0.0297
第一高次模	5.41743i	5.40468i	0.23
第二高次模	5.55289i	5.54233i	0.19
第三高次模		6.44983i	
第四高次模		6.47426i	
第五高次模		8.82194	
第六高次模		9.03707i	
第七高次模		9.39498i	
第八高次模		11.6728i	
第九高次模		11.7037i	

表 5 有耗块状介质填充波导传输常数计算值( $t=1, \lambda=2$ )

本征模	计算值
主模	3.7666- 1.8299i
第一高次模	3.1771- 1.9209i
第二高次模	3.0573- 2.0294i
第三高次模	2.9005- 0.2628i
第四高次模	2.6296- 0.3266i
第五高次模	2.6089- 0.2204i
第六高次模	2.5375- 0.1202i
第七高次模	1.9966- 2.3417i
第八高次模	1.6593- 0.9761i
第九高次模	1.9741- 0.2695i

图 2 所示.图 3 给出了本文计算结果与其他文献的比较,再次证实本文算法的精确.表 5 给出了高次模的计算值.最后,本文计算了大尺寸内壁有耗介质涂层波导,如图 4 所示.此波导长

边  $8\lambda$ 、宽边  $4\lambda$ ，介质涂层厚度为  $0.5\lambda$ 。对此波导剖分，长边剖分为 160 份，宽边剖分为 80 份，整个波导截面被分为 25600 个小三角形单元。整个计算过程使用内存 100MB，计算时间 19s。计算结果见表 6。从表 6 实验结果中我们观察到，矩形空波导前二十个本征模式的传输常数计算精度都非常高，计算精度并没有严格按照从波导主模至高次模递减的顺序。初步分析是由于我们采用了非常细密的剖分所致：对于主模  $TE_{10}$  来说，相当于一个波长剖分了 320 份，从而导致数值累计误差增大。为验证我们的分析，我们用长边分 40 份，宽边 20 份的剖分再进行了计算，实验结果列在表 6 中。此次的实验结果主模计算非常准，而高次模的计算精度有所下降，证实了我们的分析。

## 5 结论

本文提出了一种精确求解任意截面形状介质填充波导高次模的快速边缘元算法。数值实验表明此算法所用内存很小，计算效率极高。给出了求解波导高次模的经验优化剖分规律。通过对矩形空波导、条状介质填充波导、以及方块介质填充波导的本征模的计算，以及与解析解或公布结果比较，证实本算法计算精度极高且不含伪解。最后本文还用开发的程序具体研究了内壁涂层波导的本征模。

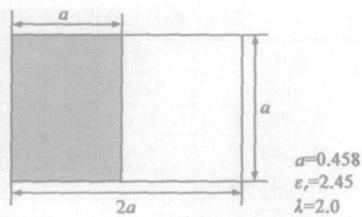


图 1 条型介质填充波导

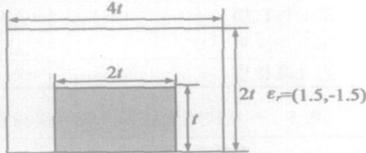


图 2 有耗块状介质填充波导

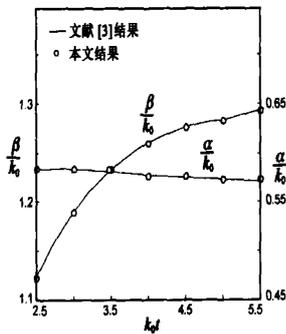


图 3 有耗块状介质填充波导主模色散曲线

## 参考文献:

- [1] J F Lee, D K Sun, Z J Cendes. Full waves analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements [J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1991, MTT- 39(8): 1262- 1271.
- [2] M Koshiba, K Inoue. Simple and efficient finite element analysis of microwave and optical waveguide [J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1992, MTT- 40(2): 371- 377.
- [3] X Q Sheng, S J Xu. An efficient high order mixed edge rectangular element method for lossy anisotropic dielectric waveguides [J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1997, MTT- 45(7): 1009- 1013.
- [4] S J Xu, X Q Sheng. Coupling of edge element and mode matching for multistep dielectric discontinuity in guiding structures [J]. IEEE Trans, Microwave Theory Tech, 1997, MTT- 45(2): 284- 287.
- [5] 盛新庆. 计算电磁学要论 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [6] I S Duff, J K Reid. The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear system [J]. ACM Trans on Mathematical Software, 1983, 9: 302- 325.
- [7] R B Lehoucq, D C Sorensen. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration [J]. SIAM J. Matrix Analysis and Applications, 1996, 17(4): 789- 821.

## 作者简介:

彭 朕 男, 1982 年 7 月出生于河南省信阳, 于 2003 年获中国科学技术大学电子工程与信息科学系学士学位, 同年进入中国科学院电子学研究所硕博连读, 从事计算电磁学、电磁散射特性以及高性能算法的研究。E-mail: Sharonshao@vip.sina.com.

盛新庆 男, 1968 年 8 月出生于安徽省黄山市。北京理工大学教授, 博士生导师, 2001 年度中国科学院“百人计划”入选者, 2004 年度教育部长江学者特聘教授。主要从事计算电磁学、目标电磁特性、微波成像及遥感、电磁兼容、天线理论及设计等方面的研究, 出版专著一本《计算电磁学要论》, 列入当代杰出青年科学文库, 共发表论文 90 余篇, 其中 SCI 论文 30 余篇, EI 论文 40 余篇。E-mail: xsheg@bit.edu.cn.