

# 基于 Mumford-Shah 模型的参数估计和 两阶段图像分割方法

李政文<sup>1</sup>, 王卫卫<sup>1,2</sup>, 水鹏朗<sup>2</sup>

(1. 西安电子科技大学数学系, 陕西西安 710071; 2. 西安电子科技大学雷达信号处理国防重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘 要:** Mumford-Shah 两相分片常数模型是一个有效的图像分割模型, 但当模型用于带有噪声的图像时, 其水平集解法存在对初始解和长度参数敏感这两个问题. 文中给出一种两阶段分割方法, 首先利用传统的简单分割方法获得一个粗分割, 再将其作为变分模型的初始解, 从而实现自动选取初始解. 文中还给出一个有效的自适应长度参数估计模型, 该模型依据图像中噪声方差大小来确定参数. 两阶段分割方法和自适应参数估计结合起来使得算法大大减弱了对参量的敏感性, 而且可以正确、快速地分割. 针对一些计算机生成图像和实际图像的实验结果验证了算法是有效的.

**关键词:** 图像分割; 变分模型; 偏微分方程

**中图分类号:** TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 12-2242-04

## Parameter Estimation and Two Step Segmentation Based on Mumford-Shah Model

LI Zheng-wen<sup>1</sup>, WANG Wei-wei<sup>1,2</sup>, SHUI Peng-lang<sup>2</sup>

(1. Dept of Math., Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;

2. Key Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** Mumford and Shah's variational model in the 2 phase piecewise constant case is very efficient in image segmentation. However, if the original image is contaminated by some noise, the level set method for solving the model is very sensitive to the initial level set function and the parameter of the length of the evolving contour. Here we propose a two step segmentation method, where in the first step, a coarse segmentation is obtained by using some traditional method, and in the second step, the coarse segmentation is used as an initial solution in the variational model. Moreover, we gave a model for adaptively estimating the parameter of the length of the evolving contour, where the parameter is defined as an increasing function of the variance of the noise. Combination of the two step segmentation and the adaptive estimation model not only enables automatic evolution but also ensures fast and accurate partition. Experiment on some computer produced images and real images shows that the algorithm proposed here is very efficient.

**Key words:** image segmentation; variational model; partial differential equations

## 1 引言

图像分割是目标识别、计算机视觉研究中最关键的处理步骤之一, 分割结果的好坏直接影响其后续的识别和理解.

传统的图像分割方法有门限法, 区域生长法等<sup>[1]</sup>, 但是这些方法的效果都不很理想. 在过去的十几年间, 基于能量泛函最小化的变分方法和基于偏微分方程的方法已成为两大主流研究方向. 其中 M Kass 等于 1988 年提出的 'snakes' 模型<sup>[2]</sup>, D Mumford 等于 1989 年提出的变分模型一简称为 MS 模型<sup>[3]</sup>, 得

到了广泛研究. S Osher 等提出的水平集技术由于允许有尖点, 角和自动拓扑变化等优点被广泛应用于曲线演化问题中<sup>[5-7, 12]</sup>.

T F Chan 和 L Vese 就 MS 模型的两相分片常数情形, 结合水平集方法<sup>[4]</sup>, 提出了水平集实现模型<sup>[7]</sup>. 之后, 又提出了分片光滑图像和多相图像的水平集实现模型<sup>[8-10]</sup>. 这些水平集模型具有如下几个优点: 由于消除了梯度项, 从而可以对没有明确定义边缘的图像进行分割; 初始曲线可以任意选取; 可以自动探测目标的内部边缘. 因此本文的讨论主要基于两相分

片常数的水平集模型<sup>[7]</sup>.

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是有界开集, 给定输入图像  $u_0$ , 希望找到一个边缘  $\Gamma$  及图像  $u$ , 使得  $u$  在  $\Omega/\Gamma$  上是分片常数的, 其中一个相是常数  $c_1$ , 另一个相是常数  $c_2$ . 此时 MS 模型可简化为极小化如下能量泛函

$$F(u, \Gamma) = \int_{\Omega_1} |u_0 - c_1|^2 dx dy + \int_{\Omega_2} |u_0 - c_2|^2 dx dy + v \cdot \text{Length}(\Gamma) \quad (1)$$

其中  $v \geq 0$ , 前两项称为保真项, 最后一项称为正则项.

T F Chan 和 L Vese 利用水平集函数, 导出了主动轮廓模型, 简称为 G-V 模型. 假设目标的边缘是闭合曲线,  $\Phi$  是一个水平集函数, 将目标的边缘曲线表示为  $\Gamma = \{(x, y) : \Phi(x, y) = 0\}$ . 曲线内、外部区域分别表示为  $\Omega_1 = \{(x, y) : \Phi(x, y) > 0\}$ ,  $\Omega_2 = \{(x, y) : \Phi(x, y) < 0\}$ . 引入 Heviside 函数  $H(\Phi) = \begin{cases} 1, & \Phi \geq 0 \\ 0, & \Phi < 0 \end{cases}$ , 则能量泛函(1)可以表示为:

$$F(\Phi, c_1, c_2) = v \int_{\Omega} |\nabla H(\Phi)| dx dy + \int_{\Omega} |u_0 - c_1|^2 H dx dy + \int_{\Omega} |u_0 - c_2|^2 (1 - H) dx dy \quad (2)$$

$$c_1 = \int_{\Omega} u_0 H dx dy / \int_{\Omega} H dx dy, \quad c_2 = \int_{\Omega} u_0 (1 - H) dx dy / \int_{\Omega} (1 - H) dx dy \quad (3)$$

分别为  $u$  在区域  $\Omega_1, \Omega_2$  上的灰度平均值.

能量范函(2)关于水平集函数求极小, 得到相应的曲线演化方程:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \delta_{\epsilon}(\Phi) \left[ v \cdot \text{div} \left( \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) - (u_0 - c_1)^2 + (u_0 - c_2)^2 \right], \quad (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

初始条件为:  $\frac{\delta_{\epsilon}(\Phi)}{|\nabla \Phi|} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  在  $(x, y) \in \partial \Omega$ , 且  $\Phi(t, x, y)|_{t=0} = \Phi^0(x, y)$ .

文献[7]中采用两步法求解问题(4), 分割得到的图像为  $u = c_1 H(\Phi) + c_2 H(-\Phi)$ .

式(4)中  $\Phi^0$  和  $v$  的选取是非常关键的, 分割结果依赖于这两个参数的选取. 在文[3, 7~10]等给出的模型中, 用户需要实验地选取初始解  $\Phi^0$  和参数  $v$  来获得需要的分割图像. 而实际上, 在很多应用场合, 例如机器视觉和模式识别等中, 需要将图像精确或比较精确地分割出来, 然后再做进一步处理. 所以实验地选取参数的方法对海量图像处理是不现实的. 因此, 本文就两相分片常数 G-V 模型, 研究如何根据输入图像自动选取初始水平集函数和自适应估计长度参数, 从而快速获得精确或比较精确的分割图像.

## 2 两阶段分割方法及参数估计

### 2.1 两阶段分割

设  $u_0 = I + n$  是输入图像,  $n$  为噪声,  $I$  是两相分片常数图像,  $\Gamma$  是常数区域之间的边缘. 分割的目的是找到具有边缘  $\Gamma$  的分割图像  $u$ . G-V 模型对初始解敏感, 关键在于(2)是一个非凸问题. 文[11]中指出, 两相分片常数模型(1)或(2)是不能

避免局部极小解存在的, 但是这些局部极小解大多数情况下都是比较少的而且相互之间间隔较远. 因此, 如果我们能选取  $u$  附近的一个初始解开始迭代, 则可以避免落入其它极小解, 而找到正确的分割图像  $u$ .

基于以上分析, 我们来找接近  $u$  的初始解. 从实际应用考虑, 目前有很多简单的图像分割技术, 例如边缘检测法、分水岭法等. 这些方法虽然比较简单, 但是只能找到粗略的分割图像, 不能做到像基于变分的方法那样准确定位边缘. 因此, 可以先用简单的分割方法得到一个粗略的分割, 然后将其作为变分模型的初始解进一步分割.

设  $u_0$  表示输入的图像,  $\Phi$  表示任意分割结果所对应的水平集函数,  $\Phi^0$  表示初始的水平集函数,  $S$  表示预分割算子,  $u^0$  表示预分割获得的图像, 则两阶段分割方法描述如下:

Step1 对输入图像做预分割  $u^0 = S(u_0)$ ;

Step2 将  $u^0$  初始化为符号距离函数  $\Phi^0$ ;

Step3 根据式(4)迭代, 直到获得稳定解  $\Phi$ ;

在上面两阶段分割方法中, 预分割可以采用一些简单快速的方法, 例如形态学算子. 由于初始解比较接近真实解, 所以一般来说进行很少迭代即可达到稳定. 同时也避免了原算法<sup>[7]</sup>需要在迭代过程中重新初始化符号距离函数的问题, 大大降低了运算量.

### 2.2 参数估计方法

MS 模型(1)或水平集模型(2)中的长度参数遵循如下基本事实: 当  $v$  取小时, 更注重分割图像与原图像接近, 分割图像能保留像由噪声点产生的小区域等大部分细节. 随着  $v$  越来越大, 更加注重正则项, 因此只有较大面积的物体才能被保留, 像噪声点等被抑制. 随着噪声的增强, 不能希望分割结果与输入图像很接近, 所以应该增大长度参数. 也就是说, 长度参数应该是噪声能量的增函数.

有很多方法来估计噪声的方差, 这里我们结合分割问题给出另一种噪声方差估计, 然后用于长度参数的估计问题.

设输入图像为  $u_0 = I + n$ ,  $n$  为独立同分布的零均值 Gauss 噪声, 即  $n \sim g(0, \sigma^2)$ ,  $I$  为干净的两相分片常数图像,  $\Gamma$  为  $I$  的真实边缘. 假设  $\Phi_w$  满足  $\Gamma = \{(x, y) : \Phi_w(x, y) = 0\}$ ,  $c_{1w}, c_{2w}$  分别记为输入图像  $u$  在区域  $\{(x, y) : \Phi_w \geq 0\}$  和  $\{(x, y) : \Phi_w < 0\}$  内的灰度平均值. 计算这两个均值, 有

$$\begin{aligned} c_{1w} &= \int_{\Omega} u_0 H(\Phi_w) dx dy / \int_{\Omega} H(\Phi_w) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (I + n) H(\Phi_w) dx dy / \int_{\Omega} H(\Phi_w) dx dy \\ &= [ \int_{\Omega} I \cdot H(\Phi_w) dx dy + \int_{\Omega} n \cdot H(\Phi_w) dx dy ] / \int_{\Omega} H(\Phi_w) dx dy \\ &= I|_{\{(x, y) : \Phi_w \geq 0\}} + \bar{n}_1 \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\bar{n}_1 = \int_{\Omega} n \cdot H(\Phi_w) dx dy / \int_{\Omega} H(\Phi_w) dx dy$  表示区域  $\{(x, y) : \Phi_w \geq 0\}$  内噪声的均值,  $I|_{\{(x, y) : \Phi_w \geq 0\}}$  表示真实图像在区域  $\{(x, y) : \Phi_w \geq 0\}$  上的常数值. 同理可得

$$c_{2w} = I|_{\{(x, y) : \Phi_w < 0\}} + \bar{n}_2 \quad (6)$$

$\bar{n}_1 = \int_{\Omega} n \cdot H(\Phi_w) dx dy / \int_{\Omega} H(\Phi_w) dx dy$  表示区域  $\{(x, y) :$

$\Phi_w < 0$  内噪声的均值,  $I|_{f(x,y): \Phi_w < 0}$  表示真实图像在区域  $f(x,y): \Phi_w < 0$  上的常数.

将  $c_{1w}, c_{2w}$  代入到能量泛函式(2)的后两项, 并记为

$$\begin{aligned} E_w &= \int_{\Omega} (u_0 - c_{1w})^2 H(\Phi_w) dx dy + \int_{\Omega} (u_0 - c_{2w})^2 H(-\Phi_w) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (I + n - c_{1w})^2 H(\Phi_w) dx dy + \int_{\Omega} (I + n - c_{2w})^2 H(-\Phi_w) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (n - \bar{n}_1)^2 H(\Phi_w) dx dy + \int_{\Omega} (n - \bar{n}_2)^2 H(-\Phi_w) dx dy \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \triangleq \sigma^2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  分别表示在区域  $f(x,y): \Phi_w \geq 0$  和  $f(x,y): \Phi_w < 0$  内的噪声方差.

由上面推导过程可知, 当刚好精确分割时, 分割出来的图像在两个相上与输入图像的差值分别是  $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ , 误差能量分别是  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ , 这就意味着选取的长度参数刚好能将两个相上的大小是  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  的噪声抑制而获得分割图像  $u = c_{1w}H(\Phi_w) + c_{2w}H(-\Phi_w)$ .

我们选择  $v = (\sigma^2/l_w)^a$ , 其中  $\sigma^2$  如式(7)所定义,  $a \geq 1, l_w = \int_{\Omega} |\nabla H(\Phi_w)|$ . 当图像  $I$  给定, 则  $l_w$  给定, 随着噪声方差  $\sigma^2$  增大,  $v$  也增大. 我们选择真实图像长度  $l_w$  作为一个变量, 是因为考虑到  $l_w$  可以在一定程度上反映目标的大小. 实际计算中, 用预分割图像的边缘长度来近似  $l_w$ , 用预分割图像的能量近似  $\sigma^2$ .

结合两阶段分割方法和参数估计模型, 我们给出如下两阶段分割算法:

- Step1 预分割  $u^0 = S(u_0)$ , 重新初始化为符号距离函数  $\Phi^0$ ;
- Step2 根据式(3)计算均值  $c_{10}, c_{20}, l_{w0} = \int_{\Omega} |\nabla H(\Phi^0)|$ ;
- Step3 用  $c_{10}, c_{20}$  近似  $c_{1w}, c_{2w}$ , 根据(7)计算  $\sigma^2$ ;
- Step4 计算  $v = (\sigma^2/l_{w0})^a$ ;
- Step5 根据式(4)迭代直到获得稳定解  $\Phi$ .

### 3 实验结果

我们选取一些计算机生成的图像和实际图像来验证两阶段分割算法的有效性. 如果没有什么特别说明, 我们选取  $a = 1$ .

在图 1 中, 含有很强的噪声, 原算法很难找到适当的初始水平集函数和长度参数. 而用本文给出的算法可以很快地获得较精确的分割结果.

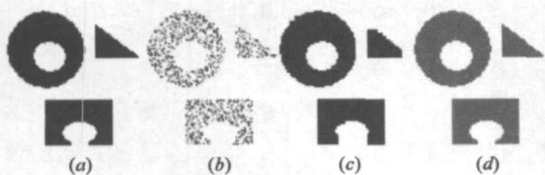


图 1 (a)原图, (b)原图被均值为 0 标准差为 200 的 Gauss 白噪声污染的图像, (c)预分割图像, (d)分割结果.  $C_1=100.28, C_2=356.07$ , 估计的参数为  $v=3.8964e+003$ , 迭代次数 4

在图 2 中, 目标灰度值和背景灰度值很相近, 用原 G-V 算法几乎不能分离出目标; 而用本文的算法可以有效地解决这个问题. 注意, 为了便于观察, 在显示图像时, 将目标灰度值作了放大处理.

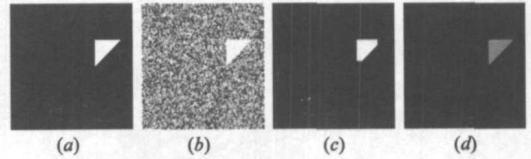


图 2 (a)原图 (背景和目标的灰度值分别为 0, 5), (b)原图被均值为 0 方差为 25 的 Gauss 白噪声污染的图像, (c)预分割图像, (d)分割结果.  $C_1=6.024, C_2=0.017$ , 估计参数  $v=2.2832$ , 迭代次数 5

对于小目标图像, 用原 G-V 模型也是很难处理的, 本文方法对此问题也可以有效解决. 实验 3 说明了这一点.

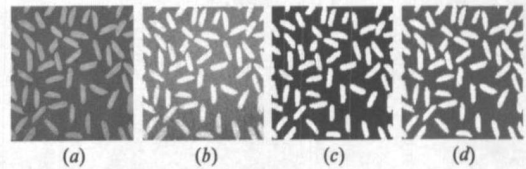


图 3 (a)原图 (来源于 Matlab 自带图像), (b)原图被均值为 0 标准差为 30 的 Gauss 白噪声污染的图像, (c)预分割图像, (d)分割结果.  $C_1=195.12, C_2=118.01$ , 估计的参数为  $v=334.5362$ , 迭代次数 9

以上实验都是针对计算机生成图像, 结果说明, 对这类噪声图像, 两阶段分割算法是很有效的.

下面我们对实际图像加以验证. 图 4(a) 是一个航拍图像, 目标是一辆坦克, 有很强的非均匀背景噪声. 如果用原 G-V 算法, 必须严格选取合适的长度参数和初始解, 否则无法正确分割. 这里我们用本文的算法得到了较准确的分割. 由于噪声较强, 且在预分割图像时有较大误差, 为了矫正这一误差, 我们取  $a = 1.25$ .

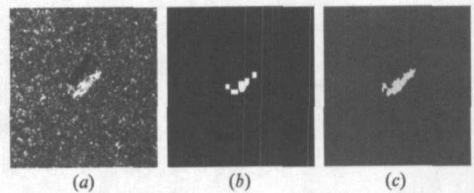


图 4 (a)航拍原图像, (b)预分割图像, (c)分割结果.  $C_1=218.07, C_2=70.86$ , 估计的参数为  $v=1.2213e+004$ , 迭代次数 20

### 4 结论

两相分片常数图像的 G-V 分割模型存在初始解和长度参数难以选取的问题. 针对这一问题, 本文提出了两阶段分割方法和自适应参数估计模型. 理论分析和实验结果都说明了文中的算法具有较普遍的有效性, 且算法可以快速实现. 本文方法对于基于图像分割的后续处理系统, 例如目标识别等是非常有意义的.

参考文献:

[1] Gonzalez R C, Woods R E. Digital Image Processing (Second

Edition)[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.

- [2] Kass M, Witkin A, et al. Snakes: active contour models[J]. International Journal of Computer Vision, 1988, 1(4): 321–331.
- [3] Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communications of Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5): 577–685.
- [4] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton Jacobi formulation [J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12–49.
- [5] Zhao H K, Chan T, et al. A variational level set approach to multiphase motion[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 127(1): 179–195.
- [6] Malladi R, Sethian J A, et al. A topology independent shape modeling scheme[A]. Proceedings of SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision II[C]. San Diego: Baba C Vemuri, 1993. 246–258.
- [7] Chan T, Vese L. Active contours without edges [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266–277.
- [8] Vese L, Chan T. A multiphase level set framework for Image segmentation using the Mumford and Shah model[J]. International Journal of Computer Vision, 2002, 50(3): 271–293.
- [9] Vese L. Multiphase object detection and image segmentation

[R]. Los Angeles: UCLA CAM, 2002.

- [10] Chung J, Vese L. Image segmentation using a multilayer level set approach[R]. Los Angeles: UCLA CAM, 2003.
- [11] Bresson X, et al. Global minimizers of the active contour/snake model[R]. Los Angeles: UCLA CAM, 2005.
- [12] Caselles V, Kimmel R, et al. Geodesic active contours[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1): 61–79.

#### 作者简介:



李政文 男, 1981 年生于广东省梅州兴宁市, 硕士研究生, 研究方向为图像分割、小波分析及其在信号处理中的应用.

E-mail: lzwalwen@sina.com

王卫卫 女, 1970 年生于陕西省西安市, 副教授, 主要研究方向为小波理论、偏微分方程及其在信号处理和图像处理中的应用、数字水印、数据压缩. E-mail: wwwang@mail.xidian.edu.cn

水鹏朗 男, 1967 年生于陕西省蓝田县. 教授、博士生导师, 研究方向为数据压缩、小波分析及其在信号处理中的应用、超宽带雷达处理等方面的研究. E-mail: plshui@xidian.edu.cn