

三维目标电磁散射矢量有限元/边界元法的公式研究

邱兆杰, 侯新宇, 许家栋, 万 伟

(西北工业大学电子信息学院, 陕西西安 710072)

摘 要: 研究应用于三维目标电磁散射分析的矢量有限元/边界元混合方法不同公式. 分析表明, 混合公式系统矩阵的条件数随边界元采用不同公式有很大差异, 从而导致混合公式的稳定性有很大不同. 并讨论了混合方法中边界元部分的单一检验基函数方法和组合检验基函数方法. 认为组合检验基函数方法仍可被视为单一检验基函数方法; 通过比较边界元部分使用单一检验基函数法和组合检验基函数法时所得计算结果, 纠正了只有使用组合检验基函数, 有限元/边界元混合方法才能得到精确结果的结论. 综合考虑计算结果可靠性、精度及对内部谐振的免疫力等因素, 给出了所推荐使用的有限元/边界元混合方法公式.

关键词: 有限元; 边界元; 混合方法; 电磁散射

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 09-1734-04

A Study of the Formulations of Hybrid Vector FEM/BEM for EM Scattering from 3-D Objects

Q U Zhao-jie HOU Xin-yu XU Jia-dong WAN Wei

(School of Electronic and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

Abstract We study the different formulations of the hybrid vector FEM/BEM (Finite Element Method/ Boundary Element Method) for 3-D scattering. It is shown that the condition number of matrices from different hybrid formulations varies greatly with different BEM formulations used and therefore the stability of the hybrid formulations varies correspondingly. Issues of combined testing function method and single testing function method for BEM are also discussed. We show that the combined testing function method can be viewed as the single testing function method. And the accuracy of the results obtained by the two methods is compared which rectified the conclusion that accurate results can be obtained by the hybrid method only when the combined testing function method is employed. Based on the reliability, accuracy, and ability to immune to the corruption of interior resonance, the formulation of hybrid vector FEM/BEM for 3-D scattering is recommended.

Key words finite element method; boundary element method; hybrid method; electromagnetic scattering

1 引言

有限元/边界元 (FEM/BEM) 混合方法是分析复杂目标电磁散射问题的一种十分有效的数值技术. 该方法通过引入包围散射体的虚构边界将分析区域分为内部区域和外部区域, 内部区域用有限元方法分析, 外部区域用边界元方法分析; 内、外区域的场则由虚构边界上场的连续性条件耦合起来.

FEM/BEM 混合方法首先被用于二维目标电磁散射分析, 后来 Paulsen 等^[1]将结点 FEM/BEM 方法应用于三维目标. 由于, 结点有限元方法处理三维电磁问题时遇到了三个主要困难^[2], 因此近年来出现的矢量有限元方法受到广

泛重视. 与之相应, 矢量 FEM/BEM 方法日益得到关注. 在混合方法中边界元部分可以有不同公式. 至今, 有关矢量 FEM/BEM 方法的文献大都是侧重于它的应用, 很少有对混合方法公式本身进行系统研究的. 文献 [3] 进行了一些这方面的工作, 通过分析涂层金属球电磁散射问题, 根据方程组迭代求解过程中解的收敛速度, 探讨了采用不同边界元公式时 FEM/BEM 混合方法的效率. 分析了混合方法中边界元公式的检验基函数问题, 并认为使用单一检验基函数得不到精确结果, 只有采用组合检验基函数才能得到精确结果. 随后它的一些工作^[4,5]即采用了组合检验基函数方法.

本文基于矢量有限元方法使用最为广泛的第一类

Whitney基函数, 分析了不同矢量 FEM/BEM 公式应用于不同类型典型目标的电磁散射问题时所形成系统矩阵的条件数. 分析表明, 不同混合公式的系统矩阵条件数有很大差异. 而系统矩阵条件数大小直接影响计算结果的可靠性, 从而不同公式的计算结果可靠性有很大不同. 并讨论了混合方法中边界元部分单一检验基函数方法和组合检验基函数方法. 认为组合检验基函数方法仍可被视为单一检验基函数方法; 比较使用单一检验基函数方法和组合检验基函数方法所得计算结果表明, 并非只有边界元使用组合检验基函数方法, FEM/BEM 混合方法才能得到精确结果, 使用单一检验基函数方法也能够得到精确结果. 最后, 综合考虑计算结果可靠性、精度、对内部谐振的免疫力等因素, 推荐了 FEM/BEM 混合方法使用的边界元公式.

2 电磁散射问题的矢量 FEM/BEM 混合方法基本方程

考虑图 1 所示的电磁散射问题, S 为包围散射体的虚构曲面, n 为曲面 S 的外法线单位矢量. S 曲面以内区域电磁场问题等价于下面泛函的变分^[3]

$$F(E) = \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times E) - k_0^2 \epsilon E \cdot E \, dV + \iint_S E \times H_0 \cdot n \, dS \quad (1)$$

式中, $H_0 = \eta_0 H$ (其中, η_0 为自由空间波阻抗, 下同), V 为曲面 S 包围的体积. 将内部区域离散为四面体单元, 采用第一类 Whitney 矢量基函数, 可得有限元方程组

$$KE + BH^s = 0 \quad (2)$$

要解有限元方程组, 还需建立边界元方程组

$$PE^s + QH^s = b^s \quad (3)$$

与有限元单元相应, 边界元单元使用三角形单元. 曲面 S 上场展开式

$$n \times E = \sum_{i=1}^M E_i^s S_i, \quad n \times H_0 = \sum_{i=1}^M H_i^s S_i \quad (4)$$

其中, $S_i = n \times N_i$, N_i 为定义在三角形单元上的第一类 Whitney 矢量基函数, M 为曲面 S 上棱边总数. 联立有限元、边界元方程组, 按照内视法^[2], FEM/BEM 混合方法最终需求解下面形式的方程组

$$AH^s = b \quad (5)$$

3 混合方法中的边界元公式

有限元部分公式是标准的, 而边界元有不同的公式, 即边界元方程组(3)的建立方法不唯一. 可选用电场积分方程, 或磁场积分方程, 或电场与磁场的混合积分方程. 同时, 也可使用不同的检验基函数. 检验基函数一般选用 S_i 或 $g_i (g_i = n \times S_i)$. 下面给出不同的边界元公式.

柯西主值意义下的电场积分方程为

$$E^{\text{inc}}(r) + \iint_S \{ [n \times E(r')] \times \nabla' G_0(r, r') - j_0 [n \times H_0(r')] G_0(r, r') + \nabla' \cdot (n \times H_0(r')) \nabla G_0(r, r') / k_0^2 \} dS' - c_0 E(r) = 0 \quad (6)$$

上式左边记作 $L_E(E, H_0)$. 柯西主值意义下的磁场积分方程为

$$H_0^{\text{inc}}(r) + \iint_S \{ [n \times H_0(r')] \times \nabla' G_0(r, r') + j_0 [n \times E(r')] G_0(r, r') + \nabla' \cdot (n \times E(r')) \nabla G_0(r, r') / k_0^2 \} dS' - c_0 H_0(r) = 0 \quad (7)$$

上式左边记作 $L_H(E, H_0)$. 其中, c_0 为常数 (对于光滑边界, c_0 等于 0.5), $G_0(r, r')$ 为自由空间格林函数.

利用式(4)离散电场积分方程, 并取 S_i 作检验基函数可得 TE 公式:

$$P_{TE} E^s + Q_{TE} H^s = b_{TE}^s \quad (8)$$

取 g_i 作检验基函数可得 NE 公式:

$$P_{NE} E^s + Q_{NE} H^s = b_{NE}^s \quad (9)$$

类似, 由磁场积分方程可得 TH、NH 公式, 由电场与磁场混合积分方程可得到 TETH、TENH、NETH 和 NENH 公式.

4 不同 FEM/BEM 混合方法公式的数值仿真比较与分析

采用不同的边界元公式, 则构成不同的 FEM/BEM 混合方法公式. 理论上, 可选用任一边界元公式建立边界元方程组(3). 然而, 选用不同的边界元公式, FEM/BEM 混合方法的性能有所不同.

4.1 计算结果可靠性与系统矩阵 A 的条件数

使用不同 FEM/BEM 混合方法公式计算金属球双站雷达散射截面 (RCS)

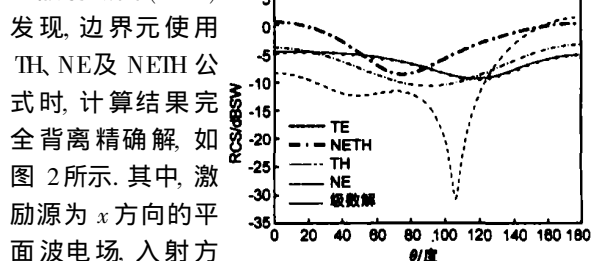


图 2 TH、NE、NETH 公式得到的金属球双站 RCS 完全错误

发现, 边界元使用 TH、NE 及 NETH 公式时, 计算结果完全背离精确解, 如图 2 所示. 其中, 激励源为 x 方向的平面波电场, 入射方向: $\theta^{\text{inc}} = 180^\circ$, $\varphi^{\text{inc}} = 0^\circ$, 给出的计算结果为 E 面内双站 RCS (下同). 为不失一般性, 又分别考虑了两个不同类型的典型目标: 介质球和涂层金属球的电磁散射问题. 计算结果出现了类似现象. 其中, 目标参数及剖分信息如下: (1) 金属球: 半径 $r = 0.21$ 共 842 条棱边, 边界棱边数为 252 (2) 介质球: $k_0 a = 0.5$ (a 为介质球半径), $\epsilon_r = 16$ 共剖分成 3598 条棱边, 边界棱边数为 594 (3) 涂层金属球: 金属球半径 $r = 0.33671$ 涂层厚度为 0.11 涂层介质相对介电常数 $\epsilon_r = 4$ 共 3642 条棱边, 边界棱边数为 1092

分析发现, 上述现象是由于边界元使用不同公式时,

矩阵 A 的条件数有很大差异, 从而计算结果的可靠性有很大不同所致. 下面采用定量计算并辅以定性估计的方法, 分析边界元采用不同公式时矩阵 A 的条件数.

定量计算矩阵 A 的条件数. 计算结果由表 1 给出. 从表 1 可以发现, 对于单独的电场或磁场积分方程, 边界元部分使用 TE 和 NH 公式时对应矩阵的条件数相对较小, 而

表 1 不同边界元公式所对应系统矩阵 A 的条件数 (Cond₁(A))

目标 \ 公式	TE 公式	NE 公式	TH 公式	NH 公式	TETH 公式	TENH 公式	NETH 公式	NENH 公式
介质球	7104	4.0×10^{17}	6.8×10^{16}	16	5177	851	2.6×10^{16}	44
金属球	672	2.0×10^6	6.6×10^5	27	543	64	2.3×10^5	81
涂层金属球	4174	1.6×10^6	1.2×10^7	221	3695	277	7.3×10^7	549

定性估计矩阵 A 的条件数. 计算矩阵的条件数要求其逆矩阵, 当矩阵的条件数很大时直接计算出的条件数往往不可靠, 这时通常还需辅以定性方法估计矩阵 A 的条件数. 广泛采用的定性方法是根据迭代过程中解的收敛速度估计条件数大小, 这一方法实质上是由“果”说明“因”, 即由于条件数大小影响解的收敛速度, 从而可反过来, 由解的收敛速度判断条件数大小. 这里则使用了一种不同的方法: 利用列选主元 LU 分解法分解矩阵 A, 根据 U 阵主对角线上元素模值接近零的程度判断不同公式对应矩阵 A 的条件数相对大小. 利用这一方法比较不同公式对应矩阵 A 的条件数相对大小, 可得到与前面相类似的结论. 这里给出了 FEM/BEM 混合方法计算金属球双站 RCS 时, 边界元使用 TENH 和 NETH 公式时 U 矩阵主对角线元素的模值大小, 如图 3 所示. 由

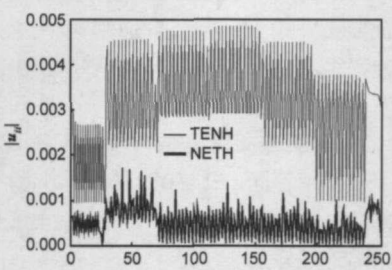


图 3 U 矩阵主对角线元素模值的比较 (图中给出了 TENH、NETH 公式对应的 U 矩阵对角线元素模值)

图可见, 使用 NETH 公式时 U 矩阵的一些主对角线元素模值非常接近零, 且相对于使用 TENH 公式, 主对角线元素模值明显整体偏小, 从而可判断出使用 NETH 公式时对应矩阵 A 的条件数较使用 TENH 公式大.

根据定量计算和定性估计, 边界元部分使用不同公式时, 矩阵 A 的条件数有很大差异. 其中, 使用 TH、NE 及 NETH 公式时, 矩阵 A 的条件数明显偏大. 而由数值分析理论, 矩阵 A 的条件数过大时, 微小的扰动误差可使方程组 (5) 的解严重偏离真实解, 从而导致边界元使用 TH、NE 及 NETH 公式时, FEM/BEM 混合方法所得计算结果严重背离精确解.

4.2 组合检验基函数方法与单一检验基函数方法

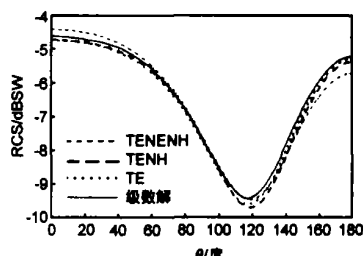
上述边界元公式使用 S_i 或 g_i 作检验基函数. 文献 [3] 认为, 使用单一的 S_i 或 g_i 作检验基函数不能有效检验积分

方程, 因而 FEM/BEM 混合方法得不到精确结果, 只有使用组合基函数即 $cS_i + (1-c)g_i$ 作检验基函数才能获得精确结果 (c 为常数且 $0 < c < 1$). 然而, 进一步分析组合检验基函数方法可以知道, 组合检验基函数方法与单一检验基函数方法并无本质区别. 例如, 文献 [3] 推荐使用的组合检验基函数方法公式 (TENENH 公式) 可等价于下方方程

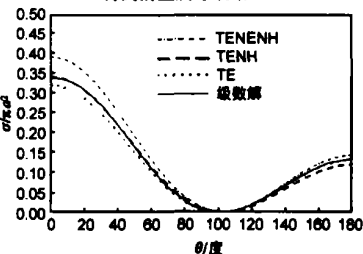
$$\alpha [d_E(E, H_0) + (1-c)n \times L_E(E, H_0)] + (1-\alpha)n \times L_H(E, H_0) = 0 \quad (10)$$

取 S_i 为检验基函数, 即检验空间仍为单一基函数 S_i 所张成空间: $\text{span}\{S_i\}_{i=1}^M$. 上式中, α 为常数且 $0 < \alpha < 1$. 对于其他组合检验基函数方法的公式也有类似等价. 即可以认为, 组合检验基函数方法只是使用了不同的积分方程, 并未改变检验空间. 因此, 组合检验基函数方法仍可被视为单一检验基函数方法.

从数值结果看, 与使用组合检验基函数方法比较, 边界元使用单一检验基函数方法时, FEM/BEM 混合方法计算结果具有很好的精度. 图 4 给出了边界元使用单一检验基函数方法的 TE、TENH 公式及文献 [3] 推荐的组合检验基函数方法的 TENENH 公式时, 混合方法所得金属球和介质球双站 RCS 与级数解比较, 由图可见,



(a) TE、TENH、TENENH 公式得到的金属球双站 RCS



(b) TE、TENH、TENENH 公式得到的介质球双站 RCS

图 4 非谐振时, 单一检验基函数方法与组合检验基函数方法计算结果精度的比较

FEM/BEM 混合方法的计算结果具有很好的精度, 即边界

元使用单一检验基函数方法时, FEM/BEM 混合方法能够得到精确结果. 模型参数及剖分信息同前.

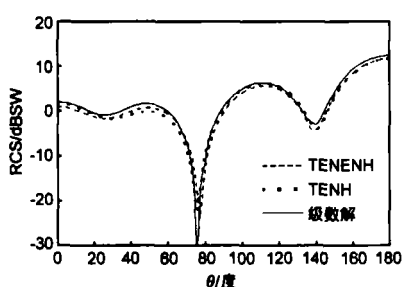


图 5 谐振时, 单一检验基函数方法与组合基函数方法计算结果精度的比较 (图中给出了 TENH 和 TENENH 公式得到的涂层金属球双站 RCS)

前面比较了非谐振情形下, 边界元使用单一检验基函数方法和组合检验基函数

数方法公式时 FEM/BEM 混合方法计算结果精度, 下面再进一步比较谐振时二者计算结果的精度. 使用单独的电场或磁场积分方程时, FEM/BEM 方法会遇到内部谐振问题. 为消除内部谐振, 边界元部分可采用混合积分方程式^[6]. 但不是所有的混合积分方程式都对内部谐振都具有免疫力^[3]: TENH 和 NENH 公式不具备这一性质, 只有 TENH 和 NEIH 公式能够消除内部谐振问题. 但边界元使用 NEIH 公式时, 我们发现, 由于对应矩阵 A 的条件数过大, 无论对于谐振情况, 还是非谐振情况, FEM/BEM 混合方法得到的计算结果都很差. 图 5 给出了边界元使用 TENH 和 TENENH 公式时 FEM/BEM 混合方法得到的处于谐振频率的涂层金属球双站 RCS. 金属球半径为 0.3423 λ , 介质厚度为 0.1017 λ , 相对介电常数 $\epsilon_r = 4.0$. 剖分信息: 共 3642 条棱边, 边界棱边数为 1092. 由图可见, 谐振情况下, 较 TENENH 公式, 边界元使用 TENH 公式时, FEM/BEM 混合方法计算结果与精确解的吻合程度依然很好.

5 结论

本文研究了应用于分析三维目标电磁散射问题的矢量 FEM/BEM 混合方法不同公式. 研究表明, 采用不同的边界元公式时混合方法所形成系统矩阵的条件数有很大差异, 从而计算结果可靠性有很大不同. 比较了边界元部分的单一检验基函数方法和组合检验基函数方法. 由理论分析, 组合检验基函数方法与单一检验基函数方法并无本质差异; 从数值结果看, 组合检验基函数方法并未提高计算结果精度. 而组合检验基函数方法相对于单一检验基函数方法, 其公式较为复杂. 基于本文中不同混合公式仿真结果的比较和分析, 综合考虑计算结果可靠性、精度、对内部谐振的免疫力等因素, 我们认为三维矢量 FEM/BEM 混合方法中边界元部分宜选用 TENH 公式.

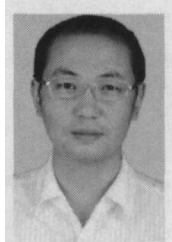
参考文献:

- [1] Paulsen K D, Lynch D R, Strobehn J W. Three-dimensional finite boundary and hybrid element solutions of Maxwell equations for lossy dielectric media[J]. IEEE Trans MTT, 1988, 36(4): 682-693.
- [2] 金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998.
- [3] Sheng X Q, Jin J M, et al On the formulation of hybrid finite-element and boundary-integral methods for 3-D scattering[J]. IEEE Trans Antennas Propagat 1998, 46(3): 303-311.
- [4] Sheng X Q, Yung E K N, et al Scattering from a large body with cracks and cavities by the fast and accurate finite element boundary-integral method[J]. IEEE Trans Antennas Propagat 2000, 48(8): 1153-1160.
- [5] Chew W C, Jin J M, et al Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics[M]. Boston: Artech, 2001.
- [6] Rao S M, Wilton D R. E-field, H-field and combined field solution for arbitrarily shaped three-dimensional dielectric bodies[J]. Electron Mag, 1990, 10(4): 407-421.

作者简介:



邱兆杰 男, 1968 年出生于山东, 1991 年、2004 年分别于西北工业大学获学士学位和硕士学位, 现正在攻读博士学位. 主要从事电磁计算研究. E-mail: qiu Zhaojie601@163.com



侯新宇 男, 1969 年出生于陕西, 副教授, 主要从事电磁理论、建模与算法方面的研究工作. E-mail: hou xinyu@nwpu.edu.cn

许家栋 男, 1948 年出生于安徽, 教授、博士生导师, 长期从事微波技术、天线与电磁散射理论方面的研究工作, 获国家及省部级科技进步奖多次, 部级专家.

万伟 男, 1936 年出生于甘肃, 教授, 长期从事电磁数值方法、天线与电磁散射、频率选择表面分析与设计等研究工作.