

耦合映象格子中时空混沌的关联控制

周小安, 纪震, 张基宏

(深圳大学信息工程学院, 广东深圳 518060)

摘要: 本文提出了一种基于改善混沌信号关联性的时空混沌控制方法. 通过改善混沌信号的关联程度, 时空混沌系统能被快速地控制至平衡点或周期轨道. 文中首先给出了数学分析, 以耦合映象格子为例, 给出了仿真实验研究. 实验结果表明, 在平均控制步数的意义下, 较之传统的混沌控制方法而言, 此方法能将时空混沌系统更加快速地控制到目标轨道.

关键词: 混沌控制; 关联积分; 耦合映象格子; 时空混沌

中图分类号: O545 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 04-0797-04

Controlling Spatio-temporal Chaos in Coupled Map Lattice by Improvement of Correlativity

ZHOU Xiao-an, JI Zhen, ZHANG Ji-hong

(College of Information Engineering, Shenzhen University, Shenzhen, Guangdong 518060, China)

Abstract: A method for controlling chaos by improvement of correlativity is presented. The chaotic dynamic system can be controlled to its equilibrium point and periodic orbits by improving correlativity of a chaotic signal. Mathematical theory analysis is given and computer simulation results are provided to support such controllability of the coupled map lattice system.

Key words: chaotic control; correlation integral; the coupled map lattice; spatio-temporal chaos

1 引言

自 Ott, Grebogi 和 Yorke 在 1990 年成功地实现非线性系统中混沌行为的控制后^[1], 混沌系统的控制研究才日益受到科学工作者的广泛关注, 各种混沌控制方法应运而生, 形成了较为系统的控制理论与方法, 相继出现了连续自反馈控制^[2,3]、自适应控制^[4]等反馈控制方法和参数扰动混沌控制^[5]、漂移混沌控制^[6]等非反馈控制方法.

耦合映象格子中时空混沌的控制研究, 始于 1994 年, Hu Gang 和 Qu Zhilin^[7]利用定点反馈控制方法研究了将耦合映象格子中时空混沌控制到均匀/非均匀定态的问题, 并且成功地将暂态混沌控制到周期态; Auerbach^[8]应用小微扰反馈控制法, 对具有对流不稳定性的时空系统实现了稳定控制, 此后, 一些学者对耦合映象格子模型的时空混沌控制问题相继进行了有益的探讨^[9-15], 分别利用延迟反馈、状态反馈等技术实现了对耦合映象格子中时空混沌的控制. 本文根据反馈控制原理和随机过程理论, 提出了一种基于改善时空混沌信号

关联性的时空混沌系统控制方案. 通过使用这种控制方案, 时空混沌系统能稳定地收敛到它的平衡点或多周期轨道, 且收敛速度得到改善. 对离散耦合映象格子的仿真实验结果表明这种方法是可行的.

2 混沌控制原理

由于混沌系统具有类随机性, 其信号表现出杂乱无章, 自关联性近似为零. 混沌信号的自相关函数定义为:

$$R(k) = E[X(n-k)X(n)] \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-|k|} \sum_{i=1}^{N-|k|} x_{i+|k|} x_i \quad (1)$$

对于混沌系统, 其概率密度函数 $p(x)$ 的计算十分困难, 又由于式(1)中 x_i 与 $x_{i+|k|}$ 之间有极强的非线性, 因此式(1)难以直接计算. 所以其自相关函数 $R(k)$ 仍然难以计算.

为了表征混沌信号的关联程度, 本文引入关联积分^[15]的概念:

$$C_{xx}(r) = P(\|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)\| < r) \quad (2)$$

式中 C_{xx} 表示在相空间中 r 距离内找到与点 $\bar{x}(i)$ 的临近

点的概率, C_{xx} 刻画了相空间中混沌信号各状态间的关联程度. 可见关联积分可以表征混沌信号的自关联程度, 同时相对于自相关函数而言, 其计算容易. 本文考虑从提高系统的关联积分出发, 提高系统信号的关联程度, 从而将时空混沌系统更快地控制到期望的稳定点或周期轨道上.

关联积分可通过下式计算

$$C_{xx}(r) = P(\|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)\| < r) \\ = \frac{2}{(N-m)(N-m+1)} \sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j=i+1}^{N-m+1} \theta(r - \|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)\|) \quad (3)$$

式中, m 为相空间的维数, $\bar{x}(i) = (x_0(i), \dots, x_{m-1}(i))$, r 为计算关联积分时设定的距离, $\|\cdot\|$ 为欧氏范数. θ 为 Heaviside 阶跃函数:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

C_{xx} 表征了相空间中的各混沌状态间的关联程度. 对于混沌系统而言, 由于其类随机性, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $C_{xx} \rightarrow 0$. 本文仅讨论混沌序列, 为了改善混沌信号间的关联程度, 具体策略如下: 在某一时刻, 把离散混沌系统的当前输出信号加上它的延迟信号作为系统的下一个输入信号, 即对于混沌映射:

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (5)$$

加入控制信号:

$$\tilde{x}(n) = \alpha x(n) + (1-\alpha)x(n-k) \quad (6)$$

得到如下混沌系统:

$$x(n+1) = f(\tilde{x}(n)) \quad (7)$$

这里 α 是一个小于 1 的正数, 以便受控制的轨道落在混沌系统的相空间之内. 由式(3)、(5)、(6)可知:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(n) - x(n-k)\| &= \|\alpha x(n) + (1-\alpha)x(n-k) - x(n-k)\| \\ &= \|\alpha x(n) - \alpha x(n-k)\| \\ &= \alpha \|x(n) - x(n-k)\| < \|x(n) - x(n-k)\| \quad (8) \end{aligned}$$

因此

$$C'_{xx}(r) > C_{xx}(r) \quad (9)$$

如上述讨论, 引入控制后, 混沌信号各状态之间的关联性增强, 信号之间彼此影响增强, 从而混沌系统能被更快地控制到期望的稳定点或周期轨道上.

$$J' = \begin{pmatrix} -2ab(1-2\varepsilon) \cdot x^* + (1-a) & -2ab\varepsilon \cdot y^* & -2ab\varepsilon \cdot z^* \\ -2ab\varepsilon \cdot x^* & -2ab(1-2\varepsilon)y^* + (1-a) & -2ab\varepsilon \cdot z^* \\ -2ab\varepsilon \cdot x^* & -2ab\varepsilon \cdot y^* & -2ab(1-2\varepsilon) \cdot z^* + (1-a) \end{pmatrix}$$

J' 的特征根模的绝对值 $|\lambda|$ 与控制信号中系数 a 的关系如图 1 所示.

由图 1 可知, 当控制信号中系数 a 在 $(0, 0.68)$ 中取值时, J' 的特征根模的绝对值 $|\lambda|$ 小于 1, 此时, 耦合映象格子系统在平衡点 (x^*, y^*, z^*) 处是稳定的. 对耦合

3 耦合映象格子中时空混沌的控制

时空混沌可由耦合映象格子的扩展系统模型产生. 耦合映象格子被描述为:

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon_{i,i-1} - \varepsilon_{i,i+1})f(x_n(i)) + \varepsilon_{i-1,i}f(x_n(i-1)) + \varepsilon_{i,i+1}f(x_n(i+1)) \quad (10)$$

这里 i 表示格点位置, n 表示离散时间, $f(x)$ 描绘了在每个格点位置的局部混沌运动, 而 $\varepsilon_{i,i+1}$ 是 i 点到 $i+1$ 点的耦合强度, 也是 $i+1$ 点到 i 点的耦合强度, 即: $\varepsilon_{i,i+1} = \varepsilon_{i+1,i}$, 令 L 为格子的数量, 假定周期边界条件是 $x_n(i+L) = x_n(i)$, 为了方便分析, 取 $f(x) = 1 - bx^2$, $L = 3$, $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{2,1} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{2,3} = \varepsilon_{3,2} = \varepsilon_2$ 和 $\varepsilon_{1,3} = \varepsilon_{3,1} = \varepsilon_3$, 在这些条件下, 式(10)化为:

$$X_{n+1} = AF(X_n) \quad (11)$$

式中 $X_n = (x_n(1), x_n(2), x_n(3))^T$, A 是常数矩阵. 它的形式如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3 & \varepsilon_1 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 & 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_2 & 1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

将式(11)线性化后得:

$$\delta X_{n+1} = J\delta X_n \quad (12)$$

式中 $\delta X_n = (\delta x_n(1), \delta x_n(2), \delta x_n(3))^T$, J 是雅可比矩阵, 在耦合映象格子的平衡点 (x^*, y^*, z^*) , 雅可比矩阵为:

$$J = -2bx^* A \quad (13)$$

这里的 $x^* = y^* = z^*$ 为 $(\sqrt{1+4b}-1)/(2b)$

假定 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.15$, $b = 1.9$, 则式(13)中 A 的特征根模分别为 1.06, 1.06 和 1.93, 该系统的 Lyapunov 指数分别为 0.06, 0.06 和 0.66, 所以耦合映象格子系统的平衡点在各个方向上都不稳定, 控制更加困难.

在各格点加入控制信号 $\tilde{x}_n(i) = \alpha x_n(i) + (1-\alpha) \cdot x_{n-1}(i)$, 为了判断加入控制信号后耦合映象格子系统的平衡点是否稳定, 根据参考文献[16~19]提供的方法, 在平衡点 (x^*, y^*, z^*) 附近, 对耦合映象格子系统线性化, 得到雅可比矩阵为

映象格子系统进一步进行仿真分析, 得到的结果如图 2 至图 5 所示. 图 2 示出了耦合映象格子系统状态与控制系数 a 之间的变化关系. 初始位置为 $(0.1, -0.2, 0.1)$, 控制信号在迭代 100 次后加入. 图 2 显示随着格点 1 两状态之间控制系数 a 的增加, 耦合映象格子系统能被

控制收敛到周期 1、周期 2、周期 4 等多种周期轨道, 特别是控制系数 a 在 $(0, 0.68)$ 中取值时, 格点 1 的状态稳定在 x^* , 与前面的分析一致. 对其他格点进行仿真分析, 也有类似的结果. 本文仅讨论耦合映象格子系统受控后格点 1 状态的变化. 图 3 至图 5 分别给出了耦合系数取不同值时的控制结果. 图 3 给出了没有受到控制的离散耦合映象格子的时空行为. 在系统

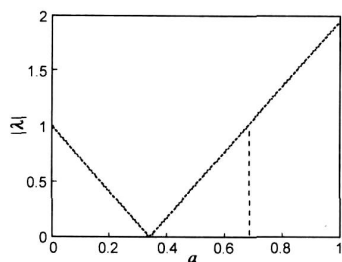


图 1 J' 的特征根模的绝对值 $|\lambda|$ 与控制信号中系数 a 的关系

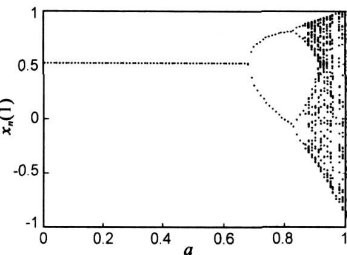


图 2 耦合映象格子系统格点 1 状态与系数 a 之间的变化关系

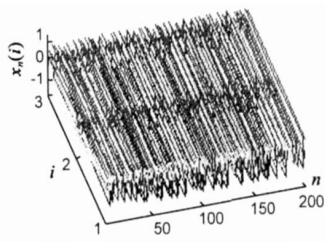


图 3 未受控制的耦合映象格子系统的时空行为

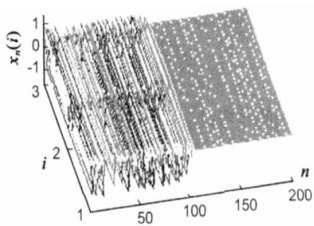


图 4 耦合映象格子系统时空不动点控制结果

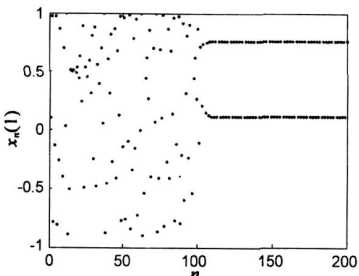


图 5 格点 1 状态周期 2 控制结果

迭代 100 次之后, 将本文介绍的控制方法应用于耦合映象格子时空混沌系统, 控制系数 a 取 0.5, 格点 1 状态的控制结果如图 4 所示; 控制系数 a 取 0.75, 格点 1 状态的控制结果如图 5 所示. 对于耦合映象格子系统周期轨道稳定性的判定可参见文献 [20~22] 提供的方法. 本文取与时空不动点的距离 r 为 10^{-4} . 未加控制时, 系统的关联积分 $C_{xx} = 0.0017$, 引入控制后, 系统的关联积分 $C_{xx} = 0.7978$. 可见引入控制后, 系统的自关联和明显提高.

从上面的例子可知, 运用本文所提出的控制方法, 时空混沌系统能够被控制收敛到期望的稳定点. 通过仿真分析还知道, 本文介绍的控制方法的控制参

数收敛范围较窄, 而采用传统的反馈控制方法的反馈系数收敛范围宽, 反馈系数的取值大约为 $(0.93, 2.06)$. 当取控制参数使得在平衡点处线性化后对应的雅可比矩阵的特征根绝对值最小时, 两者的控制收敛速度都最快, 且相差无几. 但在初始值相同、控制信号加入时间相同和控制目标点相同的情况下, 传统的反馈控制方法的平均控制步数约为 122 步, 而本文介绍的控制方法的平均控制步数约为 115 步, 在平均控制步数的意义下, 本文介绍的控制方法的控制速度较传统的反馈控制方法的控制速度快. 图 6 是采用变量反馈控制方法得到的某格点的控制结果. 反馈控制在时空混沌系统迭代 100 次之后加入, 反馈系数取 1. 图 7 是运用本文介绍的控制方法得到的同一格点的控制结果.

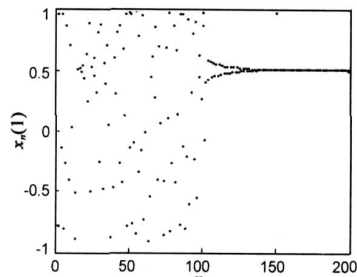


图 6 运用传统的反馈控制方法得到的时空不动点控制结果

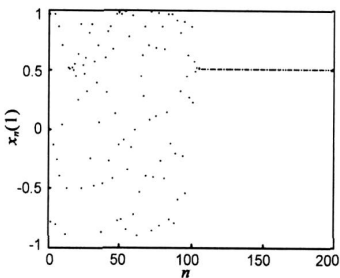


图 7 运用本文提出的控制方法得到的时空不动点控制结果

比较图 6 和图 7, 可以看出文中提出的控制方法比传统的反馈控制能够更快地将时空混沌系统控制到其时空不动点.

4 结论

本文提出了一个针对时空混沌系统的控制方法, 理论分析显示混沌随机序列的关联程度能通过把控制信号加入离散混沌系统而得到改善; 实验结果表明, 在平均控制步数的意义下, 较之传统的混沌控制方法而言, 此方法能将时空混沌系统更加快速地控制到目标轨道.

参考文献:

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke A J. Controlling chaos [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(11): 1196–1199.
- [2] Pyragas K. Continuous control of chaos by self controlling systems [J]. Phys Lett A, 1992, 170(6): 421–428.
- [3] Pyragas K, Tamasevicius A. Experimental control of chaos by delayed self controlling feedback [J]. Phys Lett A, 1993, 180(2): 99–102.
- [4] Huberman B A. Dynamics of adaptive systems [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1990, 37(4): 547–550.

- [5] Pettini M. Controlling chaos through parametric excitations [A]. Dynamics and Stochastic Processes [C]. New York: Springer, 1988. 242– 250.
- [6] Jackson A E. The entrainment and migration controls of multi attractor systems[J]. Phys Lett A, 1990, 151(6) : 478– 484.
- [7] Hu G, Qu Z L. Controlling spatio-temporal chaos in coupled map lattice systems[J]. Phys Rev Lett, 1994, 72(1) : 68– 71.
- [8] Auerbach D. Controlling extended systems of chaotic elements [J]. Phys Rev Lett, 1994, 72(8) : 1184– 1187.
- [9] Fang J Q, Ali M K. Nonlinear feedback control of spatiotemporal chaos in coupled map lattices[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 1997, 1: 283– 295.
- [10] Liu W P, Yu D J, R G Harrison. Control of patterns in spatiotemporal chaos in optics[J]. Phys Rev Lett, 1996, 76(18) : 3316– 3319.
- [11] 罗晓曙, 汪秉宏. 延迟反馈控制耦合映象格子中的时空混沌[J]. 原子能技术, 2001, 35(1) : 56– 59.
- [12] 蒋品群, 汪秉宏, 夏清华, 等. 耦合映象格子中时空混沌的状态反馈控制[J]. 物理学报, 2004, 53(10) : 3280– 3286.
- [13] 余群明, 王耀南. 时空混沌控制在联想记忆中的作用[J]. 电子学报, 2001, 29(5) : 678– 681.
YU Qun ming, Wang Yao nan. Spatiotemporal chaos control applied in associative memory[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(5) : 678– 681. (in Chinese)
- [14] Huang W. Stabilizing coupled map lattice systems with adaptive adjustment[J]. Phys Rev E, 2002, 66(3) : 219– 222.
- [15] 李春贵, 裴留庆. 一种识别混沌时间序列动力学异同性的方法[J]. 物理学报, 2003, 52(9) : 2114– 2120.
- [16] Chen G R, Dong X N. On feedback control of chaotic continuous time systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1993, 40(9) : 591– 601.
- [17] Kenney M P. Three steps to chaos: part I: Evolution[J]. IEEE Trans on Circuit and Systems, 1993, 40(10) : 640– 656.
- [18] Kenney M P. Three steps to chaos part II: A Chua's circuit

primer[J]. IEEE Trans on Circuit and Systems, 1993, 40(10) : 656– 674.

- [19] Grebogi C, Ying Cheng Lai. Controlling chaos in high dimensions[J]. IEEE Trans on Circuit and Systems, 1997, 40(10) : 656– 674.
- [20] Henry D I, Abarbanel, Lev Korzinov, et al. Small force of nonlinear systems to given orbits[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1997, 44(10) : 1018– 1023.
- [21] Duchesne L. Using characteristic multiplier loci to predict bifurcation phenomena and chaos a tutorial[J]. IEEE Trans on Circuit and Systems, 1993, 44(10) : 683– 688.
- [22] Boccaletti C, et al. The control of chaos: theory and applications[J]. Physics Reports, 2000, 329(3) : 103– 197.

作者简介:



周小安 男, 1968 年 3 月出生于湖南, 现为深圳大学信息工程学院副教授. 主要从事非线性电路系统理论、混沌系统控制及保密通信等研究. E-mail: xazhou@szu.edu.cn



纪 震 男, 1973 年 8 月出生于江苏溧阳, 现为深圳大学信息工程学院教授. 主要从事医学图像处理、数字水印技术及数字信号处理硬件系统等研究. E-mail: jizhen@szu.edu.cn

张基宏 男, 1964 年 8 月出生于江苏海安, 现为深圳大学信息工程学院教授. 主要从事数字图像处理、图像压缩技术等研究.

E-mail: zhangjihong@szu.edu.cn