

# 多层叠加 LDPC 码编码调制技术

王秀妮<sup>1</sup>, 马 啸<sup>1</sup>, 白宝明<sup>2</sup>

(1. 中山大学信息科学与技术学院, 广东广州 510275;

2. 西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 本文提出了一种多层叠加 LDPC 码编码调制系统. 与传统的基于速率分配的多层编码调制技术相比, 多层叠加编码调制系统具有很好的对称性和可扩展性. 通过分析比较 Turbo 码译码算法与 LDPC 码的译码算法的复杂度, 本文指出了多层叠加 LDPC 码编码调制系统具有译码简单, 易于实现的优点. 实验结果表明, 多层叠加 LDPC 码编码调制系统可以在不牺牲带宽的同时获得较好的性能.

**关键词:** LDPC 码; 多层叠加编码调制; Turbo 码

**中图分类号:** TN911.22

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112 (2009) 07-1536-06

## Multilevel Coded Modulation Based on Superimposed LDPC Codes

WANG Xiu2ni<sup>1</sup>, MA Xiao<sup>1</sup>, BAI Bao2ming<sup>2</sup>

(1. School of Information Science and Technology, Sun Yat2sen University, Guangzhou, Guangdong 510275, China;

2. StateKey Lab. of ISN, Xidian University, Xi. an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** In this paper, we propose a multilevel coded modulation system based on superimposed LDPC codes. Compared with traditional multilevel coding techniques, superimposed coded modulation system is symmetric among different layers and hence can be expanded easily. By comparing the decoding complexity of LDPC codes with that of turbo codes, we point out that the proposed superimposed LDPC coded modulation system can be easily designed and implemented. Simulation results show that superimposed LDPC coded modulation system has good performance without sacrificing bandwidth.

**Key words:** LDPC codes; superimposed multilevel coded modulation; Turbo codes

## 1 引言

在信息理论发展的初期, 人们就已经意识到只有将编码与调制两者结合到一起, 才能提高功率受限系统的带宽利用率. 直到上个世纪 70 年代末 80 年代初, 编码与调制的结合才有了实质性的突破, 标志性的成果有 Imai 和 Hirakawa 提出的多层编码 (MLC, MultiLevel Coding) 技术<sup>[1]</sup> 和 Ungerboeck 提出的网格编码调制 (TCM, Trellis Coded Modulation) 技术<sup>[2]</sup>. 两种编码调制方案分别从不同的角度出发, 将编码与调制结合到一起. 它们的共同之处是, 在码的设计和优化过程中, 考虑码字序列间的欧氏距离而并非汉明距离. 1993 年 Turbo 码<sup>[3]</sup> 问世之后, 编码调制技术又有了新的发展, 主要包括基于 Turbo 原理设计的 TTCM, BICM, MLC<sup>[4~10]</sup> 等. 1997 年 Duan 等<sup>[11]</sup> 提出了一种新的编码调制方案, 我们称之为多层叠加编码调制. 多层叠加编码调制方案可以同时获得编码增益和星座成形增益. 2004 年 Xiao Ma 和 Li Ping<sup>[12]</sup> 又

对多层叠加编码调制方案做了很多改进, 当编码速率为 2 比特/维时, 该系统的仿真性能已经超过了均匀 QAM 的理论极限.

1962 年 Gallager<sup>[13]</sup> 提出了一种低密度校验 (LDPC, low density parity check) 码. 然而在当时, LDPC 码并没有受到人们的重视. 1996 年 MacKay 和 Neal<sup>[14]</sup> 对 LDPC 码重新进行了研究, 发现 LDPC 码与 Turbo 码一样具有逼近 Shannon 限的性能, 从此 LDPC 码得到了迅速发展. 2003 年 Jilei Hou 等<sup>[15]</sup> 将 LDPC 码应用到多层编码调制系统中, 通过合理分配各层 LDPC 码的编码速率, 并利用密度进化算法优化各层 LDPC 码, 使系统在频谱资源有限的情况下获得了较高的编码增益.

多层编码调制技术发展至今, 根据各层分量码的设计准则, 大致可划分为两类: 一类是采用速率分配方式; 另一类是采用功率分配方式. 本文研究基于功率分配的多层叠加 LDPC 码编码调制方案. 与速率分配方式的多层编码调制技术相比, 本文提出的系统具有很好的对

收稿日期: 20070204; 修回日期: 200904213

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60572059); 国家自然科学基金委 广东省联合基金 (No. U0635003); 国家 863 高技术研究发展计划 (No. 2006AA01Z267)

©1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



其中,  $A_{k,0}$  表示  $A$  中对应第  $k$  位标记为 0 的所有点的集合;  $A_{k,1}$  表示  $A$  中对应第  $k$  位标记为 1 的所有点的集合;  $P(x_t)$  表示信号点  $x_t$  的先验概率, 其初始值为  $\frac{1}{2^K}$ . 设  $x_t$  的二进制标记为  $(v_t^0, v_t^1, \dots, v_t^{K-1})$ , 在迭代过程中  $P(x_t)$  可按照式 (7) 更新.

$$P(x_t) = \prod_{i \in \{0, \dots, K-1\} \setminus k} p(v_i^t) \quad (7)$$

译码过程中, 每一个码字比特的后验概率的对数似然比  $L(\hat{v}_t^k)$  可以表示为:

$$L(\hat{v}_t^k) = \ln \frac{p(v_t^k = 0 | \underline{y})}{p(v_t^k = 1 | \underline{y})} \quad (8)$$

其中  $\underline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{K-1})$ . 同时外信息  $y_t^k$  可以表示为:

$$y_t^k = L_e(\hat{v}_t^k) = \ln \frac{p(v_t^k = 0 | (\underline{y} \setminus y_t^k))}{p(v_t^k = 1 | (\underline{y} \setminus y_t^k))} \quad (9)$$

其中  $(\underline{y} \setminus y_t^k)$  表示第  $k$  层的先验信息中不包含  $t$  时刻的那部分. 在迭代过程中, 利用式 (9) 来更新式 (7), 进而更新式 (6), 然后再进行下一次迭代.

在传统的 MSD 译码算法中, 信息传递规则是将当前层译码器的硬判决值传递到下面的层中; 然而在多级迭代译码算法中, 每一层中的译码器都是一种软输入/软输出 (SISO) 译码器, 当前层的软输出信息不仅要反馈到其下面的层中, 而且还要反馈到其上面的各层中, 从而使译码信息得到充分利用. 具体的迭代译码算法可以参考文献 [16].

### 3 多层叠加 LDPC 码编码调制方案

多层叠加编码调制方案是多层编码调制方案中的一种, 文献 [12] 中研究了基于 Turbo 码的多层叠加编码调制方案. 本文将研究基于 LDPC 码的多层叠加编码调制系统.

#### 3.1.1 编码算法

图 1 给出的编码器是一种一般意义下的多层编码器. 在本文中, 编码器结构有自身的特点, 主要表现在两大模块中, 如图 4.5 所示. 在图 4 中, 编码器模块是由各分量码编码器和一个交织器两者共同构成. 图 5 中的映射器模块是由  $K$  个各自独立的映射器和一个 2 映射器构成. 本文中各独立映射器采用 2PAM 映射. 映射过程中, 各层编码信号被一个 2PAM 映射器映射成数据流  $A_k \# (1 - 2v^k)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, K-1\}$ , 其中  $A_k$  是在映射过程中, 第  $k$  层信息所对应的能量. 2 映射器的功能就

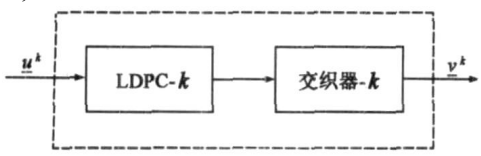


图4 第k层编码器内部结构

是将所有  $K$  层信号进行求和, 形成一种 1 和 0 信号  $\underline{x}$ , 用公式可以表示为:

$$\underline{x} = \sum_{k=0}^{K-1} A_k \# (1 - 2v^k) \quad (10)$$

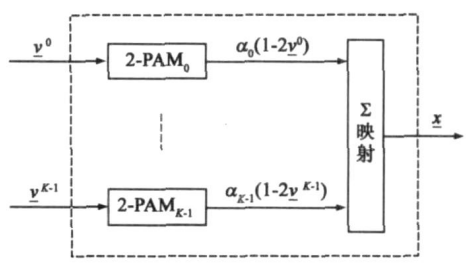


图5 映射器内部结构

从图 5 的映射器内部结构可看出, 该系统的每一层信息可对应不同的能量. 通过适当调节层间的能量关系, 可以改善迭代译码算法的性能, 同时还可以获得对各层信息的不等保护功能. 功率分配方案有多种形式, 可参考文献 [12, 17, 18] 等. 本文采用一种最简单的基于公式形式的功率分配方案 [12]. 设  $t$  时刻发送信号总能量为  $E_s$ , 则各层信号能量  $A_k$  之间的约束关系为:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{K-1} A_k^2 = E_s \\ A_i^2 \left( 1 + \sum_{j=i+1}^{K-1} A_j^2 \right) = A_{i-1}^2 \end{cases} \quad (11)$$

其中  $i$  依次取值为  $K-2, K-3, \dots, 0$ .

在传统的多层编码调制系统中, 如文献 [1, 15] 等, 互信息的链式法则表现为系统中各层之间的速率分配. 本文中所采用的功率分配方案, 其功能与速率分配类似. 但是在多层编码调制系统设计过程中, 功率分配方案可以简化系统设计的复杂度, 并有利于系统的扩展升级, 主要表现在:

(1) 在系统设计方面: 采用速率分配方案时, 系统中的每一层都要选择相应速率下的编码器和译码器. 因此如果系统的总层数为  $K$ , 则该系统中共需要  $K$  种结构不同的编码器和译码器. 然而, 在采用功率分配的情况下, 系统中的每一层可以选择完全相同的码. 因此在该系统中, 只需要设计一种编码器和译码器.

(2) 在工程应用方面: 若系统的总层数需要调整, 当采用速率分配方案时, 由于层数的调整导致系统中各层之间的速率必须重新分配, 因此各层中的分量码需要根据速率值进行重新选择, 相应的编码器和译码器也要重新设计. 这就给系统的扩展带来不便. 然而, 当采用功率分配方案时, 层数的调整导致各层之间的功率需要重新分配. 由于功率分配的多少并不影响分量码的结构, 因此分量码不需要再重新选择和设计, 这就给系统的扩展和升级带来方便.

#### 3.1.2 译码算法

多层叠加 LDPC 码编码调制系统可以按照 212 节中给出的多级译码(MSD)算法, 或者多级迭代译码算法进行译码. 但是在 311 节的编码算法中指出, 该系统的映射模块采用了一种独特的 2 映射器. 因此, 系统在解映射过程中可以利用 2 映射器自身的特点, 采用高斯近似解映射算法, 从而使解映射算法的复杂度随着系统层数的增加呈线性增长<sup>[12]</sup>. 译码器框图可以采用图 3 的形式. 虽然在解映射过程中该系统的所有 K 层信号可共用一个解映射器, 但是为了方便描述, 我们将其分开考虑. 对第 k 层来说, 其译码结构框图如图 6 所示.

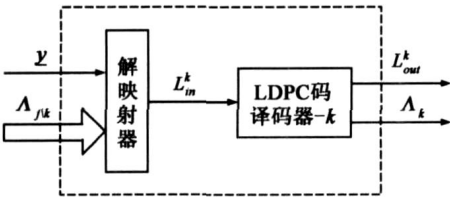


图6 第k层译码器框图

图 6 中, 信道接收到的信息  $y$  和其它层的软输出外信息  $y_{j \setminus k}$  一起输入解映射器, 通过高斯近似解映射算法, 得到分量码译码器的软输入信息  $L_m^k$ . 高斯近似解映射算法如下:

设信道噪声、接收端的接收信号以及第 k 层的编码输出信号分别表示为随机变量  $W$ 、 $Y$  和  $V^k$ , 则有:

$$Y = \sum_{k=0}^{K-1} A_k(1 - 2V^k) + W \quad (12)$$

现在考虑对信号  $V^k$  进行解映射, 则式 (12) 可以改写为

$$Y = A_k(1 - 2V^k) + W \quad (13)$$

其中  $W = W + \sum_{i \neq k} A_i(1 - 2V^i)$ . 不失一般性, 我们总假设信道噪声的方差  $R^2 = 1$ ; 而且将其它各层信息以及信道噪声一起近似看成是一种高斯噪声, 即  $W$  近似看作满足高斯分布  $W \sim N(L_W, R_W^2)$ , 其中:

$$L_W = \sum_{i \neq k} A_i(1 - 2L_{V^i}), R_W^2 = 1 + \sum_{i \neq k} 4A_i^2 R_{V^i}^2$$

$$L_{V^i} = P_{V^i}^{(a)}(1), R_{V^i}^2 = P_{V^i}^{(a)}(0)P_{V^i}^{(a)}(1)$$

则有:

$$P_{V^k}^{(e)}(m) W \exp \left[ - \frac{(y - A_k(1 - 2m) - L_W)^2}{2R_W^2} \right] \quad (14)$$

其中  $m$  取值为 0 或 1. 根据式 (14) 可知, 在对数域中, 第 k 层译码的软输入信息可表示为:

$$L_{in}^k = \frac{2A_k(y - L_W)}{R_W^2} \quad (15)$$

对于 LDPC 分量码, 本文采用基于 Tanner 图的信息传递译码算法<sup>[13]</sup>.

### 314 译码复杂度分析与比较

文献[12]中以 Turbo 码作为系统的分量码, 其译码

算法是基于 Trellis 的 BCJR 算法. 本文中的分量码采用的是 LDPC 码. 下面具体分析一下 LDPC 码与 Turbo 码的译码复杂度.

对于 LDPC 码来说, 由信息处理规则可知, 若在概率域中进行一次迭代译码, 则每一个变量节点需要  $2@d_v$  次乘法( $d_v$  代表变量节点的边数); 每一个校验节点, 需要  $4@d_c$  次乘法和  $2@d_c$  次加法( $d_c$  代表校验节点的边数). 对于 Turbo 码来说, 假设 Trellis 的状态数为  $N_s$ , 每一个状态的分支数为  $N_b$ . 在概率域中, 为了计算每一时刻的前向递推或后向递推, 我们所需要的计算量为  $N_s @N_b$  次乘法和  $N_s @(N_b - 1)$  次加法.

以 802116e/D8<sup>[19]</sup> 草案中的结构型不规则 LDPC 码和文献[12]中采用的 Turbo 码为例说明两者的译码算法复杂度. 设两种码的码长为  $10^4$ , 码率为 1/2. 对于 LDPC 码来说, 由统计可得, 其变量节点的平均边数  $\overline{d_v} = 4$ , 校验节点的平均边数  $\overline{d_c} = 8$ . 则其在一次迭代译码过程中所需要的乘法计算量如表一所示. 文献[12]中采用的 Turbo 码, 其状态数  $N_s = 4$ , 每个状态的分支数  $N_b = 2$ . 则在一次迭代译码过程中, Turbo 码所需的乘法计算量如表 2 所示.

从表中的数据可以看出, 在一次迭代译码中, 本文中采用的 LDPC 码, 其译码过程所需要的计算量要小于文献[12]中的 Turbo 码的计算量; 而且 Turbo 码迭代译码的计算复杂度会随着状态数的增加而显著增大. 更为重要的是, LDPC 码在译码过程中可以采用并行处理技术, 从而使译码速度得到很大提高.

表 1 LDPC 码一次迭代所需乘法次数

	变量节点	校验节点
单位节点所需乘法次数	2 @ 4	4 @ 8
节点总个数	$10^4$	$1/2 @ 10^4$
每类节点所需总乘法次数	$8 @ 10^4$	$16 @ 10^4$
一次迭代所需总乘法次数	$24 @ 10^4$	

表 2 Turbo 码一次迭代所需乘法次数

	前向递推	后向递推
状态数	4	4
每状态的分支数	2	2
码长	$10^4$	$10^4$
Trellis 个数	2	2
单向递推所需的乘法次数	$16 @ 10^4$	$16 @ 10^4$
一次迭代所需总乘法次数	$32 @ 10^4$	

### 4 性能仿真

在本文提出的多层叠加 LDPC 码编码调制系统中, 分量码 LDPC 码采用 802116e/D8<sup>[19]</sup> 草案中给出的形式, 它是一种不规则的结构型 LDPC 码, 具有几种相对简单的编码算法. 草案中给出的最大码长为 2304, 本文利用草案中的设计方法, 设计出一种码长为 9984, 码率为

1/2 的不规则结构型 LDPC 码. 为了与文献[15] 和文献[12] 进行比较, 本文分别对速率为 1 比特/维及 1.5 比特/维的系统进行了性能仿真, 其误比特率(BER) 性能曲线如图 9、10 所示. 仿真过程中, 分量码 LDPC 码的最大迭代次数为 50 次.

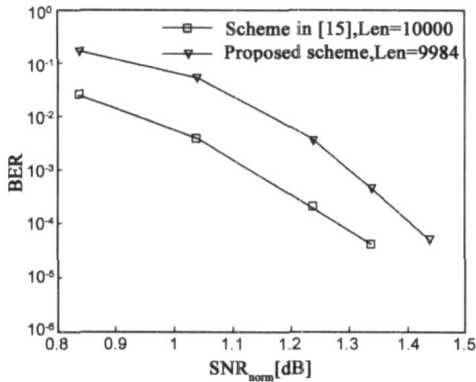


图9 LDPC码多层编码调制性能曲线

图中, 横坐标的信噪比(SNR) 采用归一化的形式, 这样便于直接从仿真曲线上看出系统的性能离 Shannon 限之间的距离. 设归一化信噪比为  $SNR_{norm}$ , 发送信号  $x_t$  的能量为  $E_s$ , 则有<sup>[20]</sup>

$$SNR_{norm} = \frac{E_s}{2^{2R} - 1} \quad (19)$$

图 9 是文献[15] 中基于速率分配方式的编码调制方案与本文中提出的编码调制方案的性能曲线. 其分量码都采用 LDPC 码, 速率为 1 比特/维. 在文献[15] 中, 译码采用多级译码算法(MSD). 从图中可以看出, 随着信噪比的增大, 本文提出的多层叠加编码调制的性能逐渐逼近文献[15] 中的性能, 当 BER 接近  $10^{-5}$  时, 两者之间的差别为 0.11 dB. 需要指出的是, 文献[15] 中的 LDPC 码是经过密度进化方法得到的最优形式, 而本文中采用的码的构造是一种基于种子矩阵的扩展, 还没有采用密度进化算法进行优化.

图 10 是两种不同分量码(LDPC 码与 Turbo 码) 的多层叠加编码调制方案之间的性能比较. 这种情况下, 数

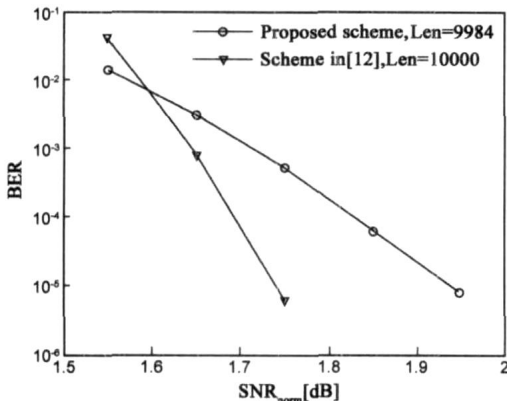


图10 LDPC码和Turbo码的多层叠加编码调制性能曲线

据的传输速率为 1.5 比特/维. 从图中可以看出, 本文提出的方案与文献[12] 中的方案相比, 其性能要差 0.12 dB. 根据前面的分析可知, LDPC 码的迭代译码算法比 Turbo 码简单, 而且当码长超过  $10^4$  时, LDPC 码的性能会优于 Turbo 码. 我们相信通过密度进化算法, 构造一种性能更好的 LDPC 码并应用到本系统中, 其性能会进一步改进.

## 5 结论

本文给出了一种多层叠加 LDPC 码编码调制方案, 并分析了多层叠加编码调制方案与传统的速率分配形式的多层编码调制方案之间的差别, 指出了多层叠加编码调制方案结构上的对称性和系统上的易扩展性. 文中还分析了 LDPC 码与 Turbo 码之间的译码复杂度, 指出将 LDPC 码应用到多层叠加编码调制系统中, 整个系统的复杂度可以得到简化. 实验结果表明, 当采用较好的 LDPC 分量码时, 该系统会在频谱资源受限的情况下, 获得较高的编码增益.

## 参考文献:

- [1] H Imai, S Hirakawa. A new multilevel coding method using  $\alpha_2$  and  $\alpha_3$  correcting codes [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, May 1977, 23(3): 371- 377.
- [2] G Ungerboeck. Channel coding with multilevel/phase signals [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, Jan. 1982, 28(1): 55- 67.
- [3] C Berrou, A Glavieux, P Thitimajshima. Near Shannon limit  $\alpha_2$  and  $\alpha_3$  correcting coding and decoding [A]. Proc. ICC. 1993 [C]. May 1993, 2: 1064- 1070.
- [4] P Robertson, T Worz. Bandwidth efficient turbo trellis coded modulation using punctured component codes [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1998, 16(2): 206- 218.
- [5] 郭东亮, 束锋, 吴乐南. 基于 TTCM 的联合编码调制算法 [J]. 电子学报, 2003, 31(07): 1092- 1094.  
Guo Dongliang, Shu Feng, Wu Lennan. Joint source / channel coding modulation algorithm based on TTCM [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(07): 1092- 1094. (in Chinese)
- [6] C Caire, G Taricco, E Biglieri. Bit interleaved coded modulation [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, May 1998, 40(3): 927- 946.
- [7] 牛凯, 吴伟陵, 高路, 杨红燕. BICM 在 DS/CDMA 中的应用 [J]. 电子学报, 2000, 28(11A): 53- 56.  
Niu Kai, Wu Weiling, Gao Lu, Yang Hongyan. The application of BICM for the DS/CDMA system [J]. Acta Electronica Sinica, 2000, 28(11A): 53- 59. (in Chinese)
- [8] U Wachsmann, R F H Fischer, J B Huber. Multilevel codes: theoretical concepts and practical design rules [J]. IEEE Trans.

- Inform. Theory, July 1999, 45(5): 1361- 1391.
- [ 9] P A Martin, D P Taylor. On multilevel codes and iterative multistage decoding [ J]. IEEE Trans. Commun. , Nov. 2001, 49(11): 1916- 1925.
- [ 10] L Ping, B Bai, X Wang. Low complexity concatenated two state TCM schemes with near capacity performance [ J]. IEEE Trans. Inform. Theory, Dec. 2003, 49(12): 3225- 3234.
- [ 11] L Duan, B Rimoldi, R Urbanke. Approaching the AWGN channel capacity without active shaping [ A]. Proc. IEEE Int. Inform. Theory [ C]. Ulm, Germany, June/ July 1997, 374.
- [ 12] X Ma, P Li. Coded modulation using superimposed binary codes [ J]. IEEE Trans. Inform. Theory, Dec. 2004, 50(12): 3331- 3343.
- [ 13] R G Gallager. Low Density Parity Check Codes. Cambridge [ D]. MA: MIT Press, 1962.
- [ 14] D J C MacKay, R M Neal. Near Shannon limit performance of low density parity check codes [ J]. IEE Electron. Lett. , Aug. 1996, 32(8): 1645- 1646.
- [ 15] J Hou, P H Siegel, L B Milstein, H D Pfister. Capacity approaching bandwidth efficient coded modulation schemes based on low density parity check codes [ J]. IEEE Trans. Inform. Theory, Sept. 2003, 49(9): 2141- 2155.
- [ 16] M Isaka, H Imai. On the iterative decoding of multilevel codes [ J]. IEEE J. Sel. Areas Commun. , May 2001, 19(5): 935- 943.
- [ 17] X Ma, L Ping. Power allocations for multilevel coding with sigma mapping [ J]. Electron. Lett. , May 2004, 40(10): 609- 611.
- [ 18] N Vamica, A Kavcic, X Ma, L Ping. Density evolution and LDPC code optimization for interleaver division multiple access [ A]. Global mobile congress [ C]. Shanghai, Oct. 2004.
- [ 19] IEEE 802.16e/D8- 2005, Draft IEEE standard for local and metropolitan area networks Part 16: Air interface for fixed and mobile broadband wireless access systems [ S]. May 2005.
- [ 20] G D Fomey Jr, G Ungerboeck. Modulation and coding for linear Gaussian channels [ J]. IEEE Trans. Inform. Theory, Oct. 1998, 44(6): 2384- 2415.

#### 作者简介:



王秀妮 女, 1980 年生于山东蓬莱, 中山大学通信与信息系统博士研究生, 主要研究方向是信道编码理论、LDPC 码、编码调制技术等。  
E-mail: wxiun@mail2.sysu.edu.cn

马啸 男, 1968 年生, 教授、博士生导师, 目前主要从事信息理论及其应用、编码调制理论及其应用、代数编码理论及其应用等方面的研究工作。E-mail: maxiao@mail.sysu.edu.cn

白宝明 男, 1966 年生, 教授, 博士生导师, 目前主要从事信息与编码理论、编码调制技术和无线通信、量子通信与编码等方面的科研工作。E-mail: bmbai@mail.xidian.edu.cn