

一种基于图割的全变差图像去噪算法

吴亚东^{1,3}, 孙世新¹, 张红英², 韩永国³, 陈 波³

(1. 电子科技大学计算机科学与工程学院, 四川成都 610054; 2. 西南科技大学信息工程学院, 四川绵阳 621010; 3. 西南科技大学计算机科学与技术学院, 四川绵阳 621010)

摘 要: 本文提出一种基于图割的全变差(TV)图像去噪算法. 该算法将全变差去噪模型的能量函数最小化问题转化为图的最小割问题, 然后采用图割技术(最大流/最小割算法)求得能量函数的全局最优解. 并给出了去噪模型中, 均衡系数的自适应设定方案. 实验结果及分析表明, 该算法能有效抑制以往最小化方法产生的阶梯效应, 具有较优的复原效果.

关键词: 全变差; 图割; 最大流/最小割; 图像去噪

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 02-0265-04

Total Variation Image Denoising Algorithm Based on Graph Cut

WU Ya-dong¹, SUN Shi-xin¹, ZHANG Hong-ying², HAN Yong-guo³, Chen Bo³

(1. School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China;
2. School of Communication and Information Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621010, China;
3. School of Computer Science and Technology, Southwest University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621010, China)

Abstract: This paper presents a total variation (TV) image denoising algorithm based on graph cut. In this algorithm, the minimum of the total variation image denoising energy function was transformed to a minimum cut of a certain graph. Then, some maximum flow/minimum cut algorithms could solve this problem, and get the global minimum of the TV energy function. In addition, an adaptive method of the proportion coefficient is given. Experiment results show that the algorithm proposed could avoid the staircase effect occurred in some classical total variation minimization methods, and has the better restored effect.

Key words: total variation; graph cut; maximum flow/minimum cut; image denoising

1 引言

实际图像在形成、传输过程中, 不可避免会受到噪声干扰, 尽可能减少噪声对后续图像处理的影响, 非常具有现实意义. 图像去噪问题, 往往可以建模成一个能量函数的最小化问题. 由Rudin等人^[1]提出的全变差(TV: Total Variation)图像去噪模型已在图像复原领域得到广泛的应用和研究^[2~6].

目前, 有许多方法可用来最小化全变差图像去噪模型的能量函数^[1,4~6]. 设图像 u 是定义在 R^2 上的一个方形区域. 那么, 图像 u 的全变差可以表示为 $TV(u) = \int |\nabla u| dx dy$, 其中 ∇ 表示梯度算子. 对于图像去噪问题, 图像的全变差能量函数通常具有以下形式: $E = \int (u - u^o)^2 dx dy + \lambda TV(u)$, 其中 u^o 表示观测到的带噪图像, λ 表示均衡系数. 最小化能量函数 E 的经典方法, 一般采用梯度下降法^[1,4]. 运用梯度下降

法, 从能量函数可导出如下演化公式: $\frac{\partial u}{\partial t} = (u^o - u) + \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$, 其中 div 表示散度算子. 公式中最后一项表示图像 u 的曲率. 在数值计算中, 为了避免除数为零, 一般采用 $\sqrt{|\nabla u|^2 + \epsilon}$ 代替 $|\nabla u|$. 这为数值计算带来一些困难: 当 ϵ 不为零时, 得到的结果往往会平滑掉一些边缘信息; 即使 ϵ 趋于零, 通过演化公式可以得到收敛解, 但不能得到最优解^[5]. 另一方面, 在经典最小化方法中, 均衡系数 λ 对于图像中所有像素均取同一常数^[1,4], 忽略了观测图像的局部特征, 在复原图像中往往导致不同程度的阶梯效应.

针对上述最小化方法的不足, 本文给出了一种基于图割的全变差图像去噪算法. 该算法能够求得全变差能量函数的全局最优解, 并为均衡系数的选取提供较自由的空间, 从而有效抑制复原图像中的阶梯效应.

收稿日期: 2006-03-01; 修回日期: 2006-05-17

基金项目: 国家自然科学基金(No. 10576027)

2 基于图割的全变差离散模型

全变差图像去噪模型的能量泛函可表示为:

$$E = \int (u - u^0)^2 dx dy + \lambda \int |\nabla u| dx dy \quad (1)$$

其中, u^0 为所获得的观测图像, u 为复原图像, λ 为均衡系数.

由于 $|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$, 采用文献[6]中的差分格式有: $|\nabla u_{x,y}| = |u_{x,y} - u_{x+1,y}| + |u_{x,y} - u_{x,y+1}|$, 所以式(1)可以离散化为:

$$E = \sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n (u_{x,y} - u_{x,y}^0)^2 + \lambda \sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n [|u_{x,y} - u_{x+1,y}| + |u_{x,y} - u_{x,y+1}|] \quad (2)$$

另一方面, 图像去噪问题可看作一个亮度分配问题: 为图像中每一像素分配一个合适的亮度值. 设 P 为图像中像素的集合, L 为像素所有可能亮度值的集合. 我们可将式(2)写为:

$$E = \sum_{p \in P} (l_{px, py} - u_{px, py}^0)^2 + \lambda \sum_{(p,q) \in N} |l_{px, py} - l_{qx, qy}| \quad (3)$$

其中, u_p^0 表示带噪图像在像素 p 处观测到的亮度值, l_p 表示复原图像在像素 p 处的亮度值. 邻接关系 N 定义为: $N = \{ \{ p, q \} | p_x = q_x - 1, p_y = q_y, \text{OR}, p_x = q_x, p_y = q_y - 1 \}$. 其中, p_x 与 p_y 分别表示像素 p 在图像中水平和垂直坐标. 离散模型(2)和(3)在数值上没有差别, 但在含义上有所不同. 离散模型(3)可以解释为: 第一项衡量了当像素 p 分配亮度值 l_p 后, 与观测数据的偏差. 第二项表示了相邻像素之间势能的大小. λ 为均衡系数, 用来调节两项之间的比例关系. 模型(3)就是本文所建立的基于图割的全变差离散去噪模型. 下一节将根据模型(3)构造相应的图, 采用图割方法求得式(3)的最小值. 并在实验中讨论 的自适应选取方案.

3 基于图割的全变差图像去噪算法

Greig 等人^[7]首先运用最大流/最小割算法来求解计算机视觉问题中的能量函数最小化问题. 其基本思路是将图像中的每个像素视为构造图中的节点, 像素之间的邻接关系采用构造图的边表示. 将能量函数最小值转化为构造图的最小割. 采用最大流/最小割算法求解最小割, 并根据最小割为图像中的每个像素分配亮度值.

按照上述思路, 我们采用文献[8]的方法, 根据离散模型(3), 给出相应图的构造如下: 设有向图 $G = (\text{Vertex}, \text{Edge})$, 其中 $\text{Vertex} = \bigcup_{p \in P} \{v_{p1}, v_{p2}, \dots, v_{pk-1}\} \cup \{S, T\}$, S, T 为图的两个端点, 分别表示源和汇. p 表示图像中的像素, P 表示所有像素的集合. v_p 表示由一个像素按不同亮度级扩展得到的 $k-1$ 个节点, k 表示所有可能的亮度级总数. 图 G 的节点构造如图1所示.

边集合 $\text{Edge} = E_{\text{link}} \cup E_{\text{rlink}}$, 其中 $E_{\text{link}} = \bigcup_{p \in P} \{t_1^p, \dots, t_k^p\}$, $\dots, t_k^p\}$, 是由图中端点及像素 p 的扩展节点构成的边组成, $t_1^p = \{S, p_1\}$, $t_i^p = \{p_{i-1}, p_i\}$, $t_k^p = \{p_{k-1}, T\}$, 每条边 t_i^p 的权值为 $\lambda + (i - u_p^0)^2$, λ 为常数, i 为相应的亮度级. $E_{\text{rlink}} = \bigcup_{(p,q) \in N} \{n_{1,q}^p, \dots, n_{k-1,q}^p, \dots, n_{k,q}^p\}$, 是由邻接关系 N 中, 相邻像素对之间的对应扩展节点相连接得到. $n_i^{p,q} = \{ \{ p_i, q_i \} | \{ p_i, q_i \} \in N \}$, 每条 rlink

边的权值均为 λ . 图 G 边的构造及相应权值如图2所示.

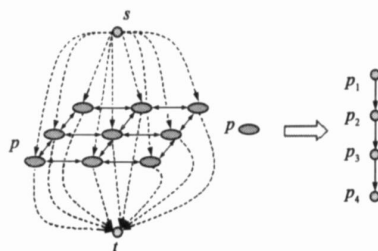


图1 图 G 的节点构造 (a) 由二维图像构造相应的图; (b) 像素 p 按其亮度级生成的扩展节点, 其中 $k=5$

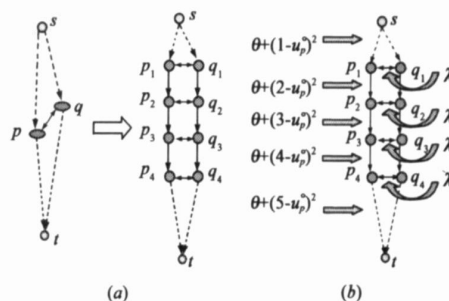


图2 图 G 边的构造以及边的权值 (a) 相邻像素 p 和 q 生成的子图, 其中 $k=5$; (b) 相邻像素 p 和 q 生成的子图中边的权值, 其中 $k=5$

下面证明, 上述所构造的有向图 G 的最小割在某种条件下就是离散模型(3)的最小值.

定理 当 $(k-1) + 1$ 时, 上述构造的有向图 G 的最小割对应于离散模型(3)的最小值.

证明 (1) 对于每个像素 $p \in P$ 而言, 图 G 中的最小割仅包含 $\{t_1^p, \dots, t_i^p, \dots, t_k^p\}$ 中的一条边.

假设图 G 的最小割 C , 对某一像素 p 而言, 含有两条 rlink 边: $t_i^p, t_j^p, i, j = [1, k], i < j$. 根据图 G 的构造过程可知, 所有 rlink 边的权值均为 λ . 通过像素 p 的邻域系统, 总可以找到一条割 C' , 使得割 C' 与割 C 的代价差至少为 $(\lambda + (j - u_p^0)^2) - (k-1)\lambda$. 由于 λ 为常量, 因此, 取 $(k-1) + 1$, 可以保证割 C' 的代价小于割 C , 与 C 为图 G 最小割相矛盾. 所以, 当 $(k-1) + 1$ 时, 对于每个像素 $p \in P$ 而言, 有向图 G 中的最小割仅包含 $\{t_1^p, \dots, t_i^p, \dots, t_k^p\}$ 中的一条边. 图3给出了图割的一个例子.

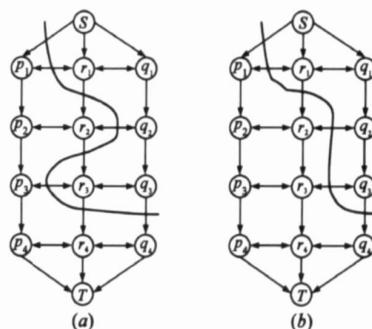


图3 图 G 中的割 (a) 割 C ; (b) 根据证明(1)中方法, 修正后的割 C'

(2) 有向图的最小割, 与离散模型(3)的最小值相对应.

由式(1)知,最小割 C 包含的边包括:每个像素中的一条 r -link 扩展边,以及若干 rr -link 条边.则最小割 C 代价为:

$$\text{cost}(C) = \sum_{p \in P} \sum_{l \in L} (l_p - u_p^0)^2 + \sum_{\{p, q\} \in N} |l_p - l_q| + \text{Num}(P) \cdot \lambda \quad (4)$$

其中, $\text{Num}(P)$ 为图像中像素个数.将式(4)与式(3)相比较,可以看出两式仅差常数 $\text{Num}(P) \cdot \lambda$.因此,由式(1)和式(2)知,定理得证.

综上所述,基于图割的全变差图像去噪算法的主要步骤如下:

Step1: 根据离散模型(3),以及上述构造方法,构造图 G .

Step2: 根据观测图像的局部特征,给出合适的均衡参数选取方案,并设 $(k-1)_{\max} + 1$.

Step3: 采用最大流/最小割算法,求解图 G 的最小割 C .

Step4: 根据最小割 C 以及映射关系 F ,为图像像素分配亮度值. F 定义为像素亮度值集合与像素集合之间的映射关系: $F: L \rightarrow P$. 对于任意像素 $p \in P$, 以及亮度值 $l \in L$ 有,若 $l_p^p \in C$, 则 $u_p = l$.

4 实验与分析

测试图像采用 128×128 的标准 Cameraman 以及文字灰度图像.通过加入方差为 20,均值为 0 的高斯噪声,产生带噪图像.为了说明算法的有效性,将本文算法与 ROF 方法^[1]进行对比实验.ROF 方法是采用梯度下降法最小化全变差能量函数的经典方法.复原效果采用峰值信噪比 (PSNR: Peak Signal Noise Ratio) 衡量.在 ROF 方法中,整幅图像采用相同的均衡参数.对于 Cameraman 图像,当时,ROF 方法达到最优去噪效果.去噪效果如图 4(b) 所示.事实上,由于图像本身是奇异的,所以均衡参数取固定值并不理想.因此,在本文的去噪算法中,可根据图像的局部特征,自适应设定 λ 值.可采用如下自适应策略^[8]:对于原始图像中可能的平滑区域设置较大的 λ , 强制平滑;对原始图像中可能的边缘区域,设置较小的 λ , 尽量保边.根据上述策略,本实验中采取如下方案:

$$\lambda = \begin{cases} 30, & \text{if } |u_q^0 - u_p^0| < \lambda, \{p, q\} \in N \\ 20, & \text{其他} \end{cases}$$

其中, λ 为噪声标准方差的估计, u_q^0, u_p^0 为带噪图像中两相邻像素的灰度值.最大流/最小割算法采用文献[9]中给出的实现方法.去噪效果见图 4(c).图 4(c) 与图 4(b), 相比,图割方法在 PSNR 上稍优于 ROF 方法,但在复原效果上可以看出图 4



图 4 Cameraman 图像去噪效果 (a)带噪图像, PSNR=22.4091 dB; (b)ROF 方法去噪效果, $\lambda=9$, PSNR=27.6339 dB; (c)图割方法去噪效果, PSNR=28.0002 dB

(c) 的阶梯效应明显减弱,具有较优的恢复效果.图 5 显示了图 4 中去噪后图像的局部放大效果.从图 5 可以看出,采用本文算法能够有效抑制阶梯效应的产生.图 6 给出了对文字图像的去噪效果.图 6(b) 为采用 ROF 方法的去噪效果,其中,图 6(c) 给出了图割方法的去噪效果.虽然图 6(c) 的 PSNR 值稍低于图 6(b),但其视觉效果明显优于图 6(b).这一点可以从图 6 的局部放大结果(图 7)看出.图 7(a) 中的阶梯效应比较明显,而图 7(b) 则很好的克服了阶梯效应的产生.

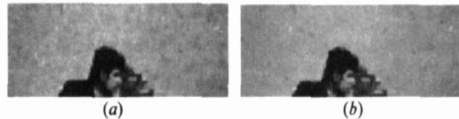


图 5 图 4 中去噪效果图的局部放大 (a) ROF 方法去噪后局部放大图像; (b) 图割方法去噪后局部放大图像

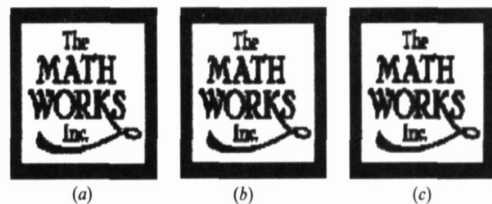


图 6 文字图像去噪效果 (a)带噪图像, PSNR=24.6227 dB; (b) ROF 方法去噪效果, $\lambda=7$, PSNR=26.9705 dB; (c) 图割方法去噪效果, PSNR=26.7061 dB

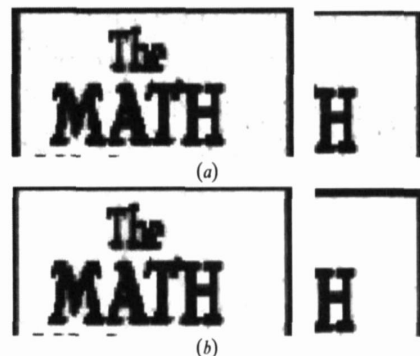


图 7 图 6 中去噪效果图的局部放大 (a) ROF 方法去噪后局部放大图像; (b) 图割方法去噪后局部放大图像

5 结论

本文从能量函数角度出发,将全变差图像去噪模型离散化后映射为基于图割的优化问题,给出一种基于图割的全变差图像去噪算法.该算法不仅能够避免以往最小化方法固有的局部最小缺点,而且能够根据带噪图像的局部特征,自适应设定均衡系数,充分利用图像的先验知识.实验结果表明,基于图割的全变差图像去噪算法能够有效抑制阶梯效应,具有较优的复原效果.然而由于构造的图结构比较庞大,使得本文算法在求解最小割过程中需要较多的存储空间和计算时间.设图像大小为 $M \times N$, 灰度级为 L , 则所构造图的节点个数为 $N \cdot N \cdot (L-1) + 2$, 有向边的数目约为 $M \cdot N \cdot (L+1) + 2 \cdot (L-1) \cdot (M \cdot (N-1) + N \cdot (M-1))$. 因此,本文算法至少需要 $5 \cdot M \cdot N \cdot L \sim 6 \cdot M \cdot N \cdot L$ 的存储空间.另一方面,算法的计算复杂度主要取决于最大流/最小割算法的具体实现.研究最大流/最

小割算法的高效实现,以提高算法效率,将是我们下一步的研究工作。

参考文献:

- [1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Phys D, 1992, 60(1-4): 259 - 268.
- [2] 吴亚东,孙世新. 基于二维小波收缩与非线性扩散的混合图像去噪算法[J]. 电子学报, 2006, 34(1): 163 - 166.
Wu Yadong, Sun Shixin. A new hybrid image denoising algorithm based on 2D wavelet shrinkage and nonlinear diffusion[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(1): 163 - 166. (in Chinese)
- [3] 张红英,彭启琮. 全变分自适应图像去噪模型[J]. 光电工程, 2006, 33(3): 50 - 53.
Zhang Hongying, Peng Qicong. Adaptive image denoising model based on total variation[J]. Opto Electronic Engineering, 2006, 33(3): 50 - 53. (in Chinese)
- [4] Chan T F, Osher S, Shen J. The digital TV filter and nonlinear denoising[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2001, 10(2): 231 - 241.
- [5] Darbon J, Sigelle M. Exact optimization of discrete constrained total variation minimization problems[A]. Proceedings of the Tenth International Workshop on Combinatorial Image Analysis[C]. Berlin: Springer Press, 2004. 548 - 557.
- [6] Chambolle A. Total variation minimization and a class of binary MRF models[A]. Fifth International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Berlin: Springer Press, 2005. 136 - 152.
- [7] Greig D, Porteous B, Seheult A. Exact maximum a posteriori estimation for binary images[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 1989, 51(2): 271 - 279.
- [8] Boykov Y, Veksler O, Zabih R. Efficient restoration of multi-color image with independent noise[EB/OL]. <http://www.csd.uwo.ca/faculty/yuri/Abstracts/jrssb98-abs.html>, 2004 - 02 - 24/2006 - 01 - 04.
- [9] Boykov Y, Kolmogorov V. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(9): 1124 - 1137.

作者简介:



吴亚东 男, 1979 年 4 月出生于河南周口, 2000 年获得郑州大学计算机科学系学士学位, 2003 年获得西南科技大学计算机科学与技术学院硕士学位, 现为电子科技大学计算机科学与工程学院博士研究生, 主要从事图像图形处理, 网络计算等方面的研究。

E-mail: wyd028@163.com

孙世新 男, 1940 年 3 月出生于湖北孝感, 1966 年毕业于四川大学数学系, 现为电子科技大学计算机科学与工程学院教授, 博士生导师, 主要从事图像处理, 网络计算技术, 并行/分布式计算及其应用、信息压缩技术、数值计算与组合算法等方面的研究。

张红英 女, 1976 年 1 月出生于四川德阳, 2000 年获得东北大学数学系学士学位, 2003 年获得西南科技大学信息工程学院硕士学位, 现为电子科技大学通信与信息工程学院博士研究生, 主要从事图像处理与分析等方面的研究。