

逼近算子在 MR 图像快速重建中的应用研究

李本星¹, 曹宝香¹, 马建华²

(1. 曲阜师范大学计算机科学学院, 山东曲阜 273165;

2. 南方医科大学生物医学工程学院医学信息研究所, 广东广州 510515)

摘要: 将逼近算子用于求解基于压缩感知理论的磁共振图像快速重建模型, 得到了一个高效的迭代重建算法. 将该算法用于部分 K 空间数据重建, 并就算法对噪声的敏感性以及算法对迭代初值的依赖性进行了仿真实验. 实验结果表明, 算法对噪声不敏感, 对初值也没有显著的依赖性, 该算法可由极少量 K 空间数据重建出高质量的 MR 图像.

关键词: 磁共振成像; 图像; 重建; 逼近算子; 压缩感知

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 12-2827-05

Proximity Operator and Its Application in Rapid MR Image Reconstruction

LI Ben-xing¹, CAO Bao-xiang¹, MA Jian-hua²

(1. School of Computer Science, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, China; 2. Institute of Medical Information & Technology, School of Biomedical Engineering, Southern Medical University, Guangzhou, Guangdong 510515, China)

Abstract: Proximity operator is used to solve the rapid magnetic resonance image reconstruction model based on compressed sensing theory and an efficient iterative algorithm is proposed. Experiments show that the proposed algorithm is not sensitive to noises, and that the algorithm does not depend on the choice of initial iterative values, and that faithful MR images can be reconstructed efficiently through the algorithm.

Key words: magnetic resonance imaging; image; reconstruction; proximity operator; compressed sensing

1 引言

压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 理论是由 Donoho^[1], Candès-Romberg 和 Tao^[2] 等人提出的一个新颖的信号采集、编码和解码的理论. Candès 证明了只要信号在某一个正交空间具有稀疏性, 就能以较低的频率采样信号, 而且能够以高概率重构该信号^[2]. 由于压缩感知理论在处理大规模稀疏或可压缩数据方面的巨大应用前景, 该理论一经提出就在许多领域受到了关注. 目前, 国外一些研究小组已开始将压缩感知理论用于压缩成像、医学图像处理、模数转换、CS 雷达、遥感图像处理、天文学、通信等领域. 最近, 压缩感知理论也逐渐为国内的研究者所关注, 出现了若干关于压缩感知理论及其研究进展方面的综述文章^[3,4] 及图像重建中观测矩阵的设计方面的论文^[5,6].

Lustig 等人^[7,8] 结合磁共振成像原理, 深入分析了压缩感知理论用于磁共振快速成像的可行性, 并给出了压缩感知理论在改进现有磁共振成像 (Magnetic Resonance Imaging, MRI) 技术方面的几个应用实例. 通常, 将

压缩感知理论在磁共振快速成像中的应用研究工作简称为 CS-MRI. CS-MRI 的基本思想是利用磁共振图像在适当变换域中的稀疏性, 直接对 K-空间数据进行随机降采样, 最后通过非线性重建算法重构图像.

Lustig 等人在文献^[7] 中用非线性共轭梯度法对 CS-MRI 重建模型进行数值求解, 然而非线性共轭梯度法收敛性的理论尚不完备, 有时甚至具有奇异 (bizarre) 的收敛性^[9]. 文献^[10] 提出了一个基于逼近算子的向前-向后分裂算法, 用于求解一般的信号恢复问题. 本文将文献^[10] 中求解信号恢复模型的算法思想用于求解 CS-MRI 重建模型, 给出了 MR 图像快速重建一个新算法. 该算法不需要解大规模的线性方程组, 也不用矩阵分解的方法, 算法中仅用到向量的运算以及矩阵与向量的乘法运算, 有效地解决了 CS-MRI 重建模型中大规模系统矩阵的存储与计算问题. 仿真实验表明, 算法可由极少量 K 空间数据重建出高质量的 MR 图像.

在国内, 目前尚未见到关于压缩感知理论用于 MR 快速成像方面的文献报道. 本文作者期望将基于逼近算子的算法用于对真实 MR 数据快速重建, 为压缩感知理

论早日应用于医学磁共振快速成像提供稳健高效的算法支持。

2 基于 CS 理论的 MR 图像快速重建

2.1 模型设计

压缩感知理论正为越来越多的研究者所熟悉,有兴趣的读者可阅读文献[1~6,11,12],本文不再赘述.压缩感知理论能否成功地用于 MR 图像快速重建主要取决于以下三方面的因素:(1) MR 图像是否具有稀疏性或可压缩性;(2) 如何构建随机测量矩阵,使得随机投影能保持必要的原始图像的信息,并且测量的方法是非适应性的;(3) 针对 MR 图像大尺度数据规模,如何设计高效的优化算法。

事实上,大部分 MR 图像在适当的稀疏变换域(如小波变换、有限差分变换等)中是稀疏的.由于小波变换是可逆的,在得到小波系数后通过逆小波变换即可得到 MR 图像.因此,基于 CS 理论的 MR 图像快速重建模型中,通常取小波变换作为稀疏变换。

在采集 MR 数据时,可以自由地设计采样轨道.目前使用最广泛的仍是笛卡尔采样,对笛卡尔采样数据进行重建非常简单,并且具有良好的系统鲁棒性.为大程度减少 K 空间采样数据,缩短扫描时间,并结合 K 空间数据分布特点,本文设计如下的采样模式:由于低频信息决定图像的主要结构信息,而高频信息决定图像的细节,因此对 K 空间中间的行密集采样,而对远离中心的行按独立同分布(independent and identically distributed, iid) Gaussian 分布随机采样.取小波变换作为对 MR 图像的稀疏变换 V .因此,基于 CS 理论的 MR 快速重建可通过求解下列有约束最优化问题实现:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad UV^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1)$$

其中, U 代表部分 Fourier 变换, V 为小波变换, \mathbf{b} 为测量数据, \mathbf{x} 是待重建 MR 图像的小波系数.通过求解最优化问题(1)得到 \mathbf{x} ,再对其进行逆小波变换即可得到重建的 MR 图像。

2.2 优化算法

本文将文献[10]中基于逼近算子的向前-向后分裂算法思想用于求解 CS-MRI 重建模型,给出求解有约束最优化问题式(1)一个新算法。

设实 Hilbert 空间 S 中的测量数据 \mathbf{b} , 实 Hilbert 空间 H 的图像 \mathbf{x} 满足下列数据模型:

$$\mathbf{b} = L\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (2)$$

其中 $L: H \rightarrow S$ 为线性算子, $\mathbf{n} \in H$ 为加性噪声.考虑下列更具一般性的问题:

问题 1 设 H, S, W 皆为实 Hilbert 空间

(1) $L: H \rightarrow S$ 为非零有界线性算子;

(2) $T: H \rightarrow W$ 为线性有界双射,且 $T^{-1} = T^*$;

(3) f 为 W 上的下半连续凸函数。

目标是

$$\min_{\mathbf{x} \in H} \gamma f(T\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{Lx} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (3)$$

设 g 是实 Hilbert 空间上的下半连续凸函数,称算子

$$\text{prox}_g: H \rightarrow H: \mathbf{x} \mapsto \arg \min_{\mathbf{y} \in H} g(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (4)$$

为函数 g 的逼近算子(proximity operator)^[10].基于逼近算子的算法的主要结果由以下定理给出:

定理 假设问题 1 的解集 G 非空, $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为正实数序列且满足

$$0 < \inf_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n < \frac{2}{\|L\|^2}$$

$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 $[0, 1]$ 上的序列且 $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

是 H 内两个序列,且 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < +\infty$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|c_n\| < +\infty$,

取定初始点 $\mathbf{x}_0 \in H$,对任意自然数 n ,定义下列迭代

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \lambda_n \{ (T^* \circ \text{prox}_{\gamma_n f} \circ T)[\mathbf{x}_n - \gamma_n (L^*(L\mathbf{x}_n - \mathbf{b}) + c_n)] + a_n - \mathbf{x}_n \} \quad (5)$$

则以下结论成立:

(1) $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 弱收敛于解集 G 中的一个点 \mathbf{x} ;

(2) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|L^*L(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\|^2 < +\infty$;

(3) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \| (T^* \circ \text{prox}_{\gamma_n f} \circ T)[\mathbf{x}_n - \gamma_n (L^*(L\mathbf{x}_n - \mathbf{b}))] - \mathbf{x}_n \| < +\infty$;

(4) $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 强收敛于 \mathbf{x} 当且仅当 $\lim d_G(\mathbf{x}_n) = 0$.

取 $\lambda_n \equiv 1$, $a_n \equiv 0$, $c_n \equiv 0$,显然这三个序列都满足定理中的条件,则迭代公式 $\mathbf{x}_{n+1} = (T^* \circ \text{prox}_{\gamma_n f} \circ T)[\mathbf{x}_n - \gamma_n L^*(L\mathbf{x}_n - \mathbf{b})]$ 是问题 1 的解。

现在对问题 1 进行简化,取 T 为单位算子,函数 $f(\cdot)$ 为 L_1 范数 $\|\cdot\|_1$,则有

$$(T^* \circ \text{prox}_{\gamma_n f} \circ T)(\mathbf{x}) = \text{prox}_{\gamma_n \|\cdot\|_1} \mathbf{x} = \text{sign}(\mathbf{x}) \cdot \max\{|\mathbf{x}| - \gamma_n, 0\} \quad (6)$$

即著名的软阈值(soft-thresholding)或收缩(shrinkage)算子.至此问题 $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k} \gamma \|\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{Lx} - \mathbf{b}\|_2^2$ 的解为

$$\mathbf{x}_{n+1} = \text{prox}_{\gamma_n \|\cdot\|_1} (\mathbf{x}_n - \gamma_n L^*(L\mathbf{x}_n - \mathbf{b})) \quad (7)$$

考虑有约束最优化问题式(1)的 Lagrange 形式

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k} \gamma \|\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (8)$$

其中 $A = UV^{-1}$, \mathbf{x} 为 MR 图像的小波系数.于是最优化问题式(8)的解为

$$\mathbf{x}_{n+1} = \text{prox}_{\gamma_n \|\cdot\|_1} [\mathbf{x}_n - \gamma_n (A^*(A\mathbf{x}_n - \mathbf{b}))] \quad (9)$$

具体算法参看后面的伪代码(算法 1),其中 \mathbf{b} 为随机降采样 K 空间数据(可以包含噪声), \mathbf{x}_0 为初值, \mathbf{x}_{k+1}

是重建的结果,它是要重建的 MR 图像的小波系数,对其进行逆小波变换即可得到 MR 图像.

算法 1

```

Require:  $A, \mathbf{b}, w, \mathbf{b}_0 = 0, \mathbf{x}_0, \gamma_0, \beta$ 

$$e = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2$$

While  $e \leq w$ 
Do

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{b} + (\mathbf{b}_k - A\mathbf{x}_k)$$


$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k \|\cdot\|_1} [\mathbf{x}_k - \gamma_k (A^* (A\mathbf{x}_k - \mathbf{b}_{k+1}))]$$


$$e = \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_{k+1}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2$$


$$\gamma_{k+1} = \beta \gamma_k$$

End
Output:  $\mathbf{x}_{k+1}$ 
    
```

3 实验与分析

3.1 MR 图像重建实验

为验证本文算法的有效性,我们分别采用本文算法、直接逆傅里叶变换和非线性共轭梯度法对脑部 MR 图像进行重建对比实验.实验平台为 Windows XP, Pentium(R)4CPU 双核 3.00GHz & 3.16GHz, 2GB 内存,程序设计采用基于 Matla7.0.4 编程实现.图像的大小为 256×256 ,仅取其 K 空间的 128 行数据,其中 100 行在 K 空间的中间部分连续采样,其余的 28 行服从 iid 的 Gaussian 随机分布.实验中,首先对部分 K 空间数据 \mathbf{b} 作逆傅里叶变换得到一 MR 图像,再对该 MR 图像进行小波变换,将该小波系数作为算法的初值 \mathbf{x}_0 .这样选取初值的好处是初值和部分 K 空间数据 \mathbf{b} 密切相关,迭代初值就包含了待重建图像的部分信息,使得初值的选择具有自适应性.

图 1 给出了对脑部全部 K 空间数据和部分随机降采样 K 空间数据重建得到的 MR 图像.其中,图 1(a)是采用全部 K 空间数据重建的图像,图 1(b)~(d)均为对部分 K 空间数据重建的结果,其中图 1(b)为对部分 K 空间数据进行直接逆傅里叶变换得到的 MR 图像,图 1(c)为非线性共轭梯度算法的重建结果,图 1(d)为本文算法的重建结果.从视觉上对图 1(a)和图 1(d)进行比较,可以看出本文重建算法对部分随机降采样 K 空间数据可以重建出理想的 MR 图像.由图 1(b)可以看出,由于采样的数据远远少于奈奎斯特采样定理所要求的数据量,直接逆傅里叶变换重建图像中含有严重的混叠伪影.

3.2 算法对噪声的敏感性分析

绝大多数磁共振图像是在 K 空间中进行采样获得,噪声在原始 K 空间数据中都是呈现零均值 Gaussian 白噪声分布.因此,本文采用 Gaussian 噪声模型设计重建算法对噪声的敏感性分析仿真实验.具体实验主要包括三个步骤:首先对 K 空间数据进行随机降采样;然后在降采样 K 空间数据中添加均值为零,不同方差的 Gaussian 白噪声;最后用本文重建算法对含噪声的随机降采样 K 空间数据进行重建得到 MR 图像.图 2(a)~(d)分别为对添加均值为零,方差为 0.01, 0.25, 1.00, 2.25 的随机降采样 K 空间数据进行重建得到 MR 图像,实验中采用的随机降采样方法与 3.1 节中的实验相同.从视觉上看,本文所提算法对噪声不敏感,对包含噪声的随机降采样 K 空间数据进行重建可以得到较为理想的 MR 图像.

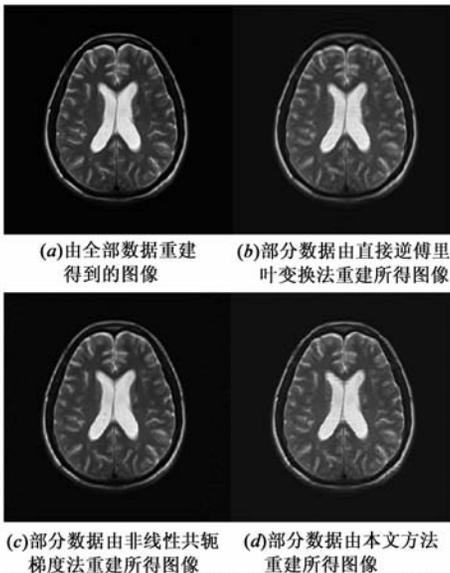


图1 不同算法对K空间数据重建得到的MR图像

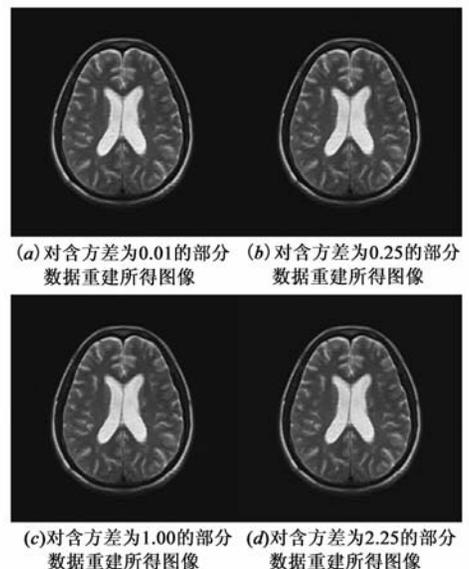


图2 对含不同方差噪声的数据重建结果

为做进一步的定量分析,表 1 从峰值信噪比、相对误差和重建时间三方面对含不同方差噪声的数据重建结果进行了比较.其中相对误差是将部分 K 空间数据

重建图像与全部 K 空间数据重建图像进行比较. 从表 1 可见, 原始 K 空间数据中添加的噪声方差为 0.01 时, 重建图像的峰值信噪比为 18.71, 相对误差为 0.0883, 当噪声的方差增加到 2.25 时, 重建图像的峰值信噪比为 18.42, 相对误差为 0.0913. 表明本文的重建算法对 K 空间数据数据中的 Gaussian 白噪声不敏感.

表 1 对含不同方差噪声的数据重建结果比较

方差(σ^2)	峰值信噪比(PSNR)	相对误差(Relative Error)	时间(s)
0.01	18.71	0.0883	27.42
0.25	18.68	0.0886	26.40
1.00	18.56	0.0896	26.34
2.25	18.42	0.0913	26.54

3.3 算法对初值的依赖性分析

在 3.1 和 3.2 部分, 实验中的初值的选取和部分 K 空间数据 b 相关, 使得初值的选择具有自适应性. 本小节将就算法对初值的依赖性进行分析. 为此, 我们设计如下的实验: 部分 K 空间数据 b 与 3.1 和 3.2 部分的实验相同, 取初值 x_0 分别为零矩阵和单位矩阵用本文算法进行重建, 得到的 MR 图像如图 3(b)、(c) 所示. 重建图像 3(d) 时初值的选择方法同 3.1 和 3.2 部分, 我们称之为自适应法. 为便于进行视觉上的比较, 我们仍将全部 K 空间数据重建得到的 MR 图像放在这里, 如图 3(a) 所示.

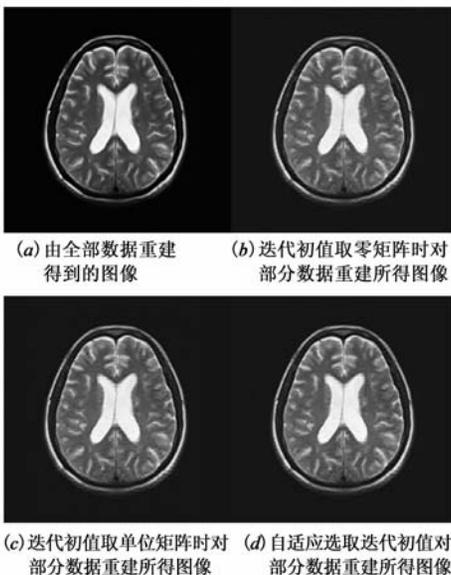


图3 不同初值条件下重建得到的MR图像

为对不同初值条件下重建结果做进一步的定量分析, 我们分别记录下初值取零矩阵、单位矩阵和自适应选取三种条件下重建图像的峰值信噪比, 相对误差和重建时间, 如表 2 所示. 由表 2 可见, 三种不同初值所重建得到的 MR 图像的峰值信噪比均约为 18.7, 部分数据重建图像与全部数据重建图像的相对误差均约为 0.088, 程序运行时间也没有显著差异. 表明本文所提算

法对初值的选取没有显著的依赖性. 同时, 实验结果还表明采取自适应选取初值的方法重建图像的质量均优于另外两种初值条件下的重建图像.

表 2 不同初值条件下重建结果比较

初值(x_0)	峰值信噪比(PSNR)	相对误差(Relative Error)	时间(s)
零矩阵	18.708	0.0883	26.03
单位矩阵	18.704	0.0884	26.91
自适应选择	18.714	0.0882	27.39

4 结论

本文针对当前 CS-MRI 重建模型优化求解的困难, 在对目前国际上最新的迭代算法进行分析研究的基础上, 将基于逼近算子的向前-向后分裂算法用于求解 CS-MRI 重建模型, 给出了一个 MR 快速重建迭代算法, 该算法的运行速度显著提高, 并且可由极少量 K 空间数据重建出高质量的 MR 图像. 文中的实验表明, 本文所提算法对 K 空间数据中的 Gaussian 噪声不敏感, 算法对迭代初值也没有显著的依赖性. 将 CS 理论用于医学磁共振快速成像还面临着许多技术难题, 本文作者期望将基于逼近算子的算法用于对真实 MR 数据快速重建, 为压缩感知理论早日应用于医学磁共振快速成像提供稳健高效的算法支持.

参考文献:

- [1] D Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [2] E J Candes, J Romberg, T Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2006, 52(2): 489 - 509.
- [3] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070 - 1081.
Shi Guang-ming, Liu Dan-hua, Gao Da-hua, et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070 - 1081. (in Chinese)
- [4] 李树涛, 魏丹. 压缩传感综述[J]. 自动化学报, 2009, 35(11): 1369 - 1377.
Li Shu-Tao, Wei Dan. A survey on compressive sensing[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(11): 1369 - 1377. (in Chinese)
- [5] 方红, 章权兵, 韦穗. 基于非常稀疏随机投影的图像重建方法[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(22): 25 - 27.
Fang Hong, Zhang Quan-bing, Wei Sui. Method of image reconstruction based on very sparse random projection[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(22): 25 - 27. (in Chinese)
- [6] 方红, 章权兵, 韦穗. 基于亚高斯随机投影的图像重建方法[J]. 计算机研究与发展, 2008, 45(8): 1402 - 1407.

- Fang Hong, Zhang Quan-bing, Wei Sui. A method of image reconstruction based on sub-gaussian random projection[J]. Journal of Computer Research and Development, 2008, 45(8): 1402 - 1407. (in Chinese)
- [7] M Lustig, D Donoho, J M Pauly. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58: 1182 - 1195.
- [8] M Lustig, D L Donoho, J M Santos, J M Pauly. Compressive sensing MRI[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008. 72.
- [9] J Nocedal, S J Wright. 数值最优化[M]. 北京: 科学出版社, 2006. 500 - 511.
- [10] P L Combettes, V R Wajs. Signal recovery by proximal forward-backward splitting [J]. SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(4): 1168 - 1200.
- [11] E Candes, T Tao. Decoding by linear programming[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2005, 51(12): 4203 - 4215.
- [12] R G Baraniuk, M Davenport, R DeVore, M B Wakin. A simple proof of the restricted isometry principle for random matrices (aka the Johnson-Lindenstrauss lemma meets compressed sensing) [EB/OL]. <http://dsp.rice.edu/cs/jlcs-v03.pdf>, 2009-10-12/ 2010-1-24.
- [13] 李本星. 部分 K 空间采样 MR 快速重建与相位解缠绕

[D]. 广州: 南方医科大学医学信息研究所, 2009.

- [14] D Baron, M B Wakin, M Duarte, et al. Distributed compressed sensing[EB/OL]. <http://dsp.rice.edu/cs/DCS112005.pdf>, 2009-10-12/ 2010-1-24.

作者简介:



李本星 男, 1975 年 11 月出生于山东省嘉祥县. 现为曲阜师范大学计算机科学学院讲师, 博士. 主要研究方向为医用磁共振成像算法研究.

E-mail: libenxing1975@163.com



曹宝香 男, 1955 年 2 月出生于山东省济宁市. 现为曲阜师范大学计算机科学学院教授, 山东省突出贡献中青年专家, 山东省教学名师. 曾主持国家自然科学基金 1 项, 主持完成国家教委、省科委等省部级课题 20 项, 发表论文 150 余篇. 2000 年获国务院政府津贴.

E-mail: bxcao@163.com